DESCRIZIONE DI NUOVE TAVOLE LOGARITMICHE DELLE FUNZIONI
CIRCOLARI ED IPERBOLICHE COSTRUITE DAL PROFESSORE
ANGELO FORTI E CORREDATE DELLA LORO MONOGRAFIA E
DI VARIE LORO APPLICAZIONI ALLA MECCANICA ED ALL'AL-
GEBRA.

I.

Nel Tomo VI degli *Annali delle Università Toscane*, ho inserita una serie completa di *Nuove Tavole logaritmiche delle Funzioni circolari ed iperboliche*. Esse vi sono stampate da oltre tre anni, e nel Tomo V di detti *Annali* (anno 1858-1861) sono inserite varie applicazioni che ne feci alla risoluzione di alcuni problemi di ottica-matematica. Il ritardo sino ad ora della loro pubblicazione è dipeso da giusta ragione.

Il Ch. Commendatore Professore O. F. Mossotti Senatore del Regno d'Italia, che con lutto del paese e danno della scienza, ha cessato non ha guari di vivere, aveva da molto tempo intesa la necessità di queste Tavole e si conveniva insieme della convenienza del loro divulgamento nelle mani dei matematici a simiglianza delle Tavole dei logaritmi comuni.

In seguito ragionando meco di nuovo della utilità che se ne ritrarrebbe nella risoluzione di molti problemi così di algebra, come di meccanica razionale e di astronomia per rispetto a certi casi di triangoli sferici, ha concluso con propormi questo lavoro, lasciando a me la cura di esporre nella Prefazione ch'ei vi farebbe, la descrizione della loro costruzione e dell'uso di esse.

Mancato ai vivi quell'uomo emerito, tra i tanti e pre-

ziosi manoscritti che ne ha ereditata la scienza; si sono ritrovati quelli altresì sulle *Funzioni iperboliche*.

Per isventura essi non sono completi; nè tutti condotti ad eguale perfezione. Eseguita le parti che mi riguardavano, bisognava compiere anche quella che l'illustre Professore, si era riserbata.

Avutone l'incarico dal Ch. Prof. Enrico Betti, alla cui alta intelligenza furono sottoposti tutti i manoscritti indicati, ho impiegato le mie deboli forze, riempiendo le lacune, a pubblicare insieme alle Tavole, ed illustrati da qualche nota, quelli tra essi che si riferivano alle Funzioni iperboliche.

Gli articoli che ho dovuto aggiungere sì per compiere, come per collegare tra loro le parti scritte dal prefato Professore, sono distinti col segno * uno posto al principio ed un altro alla fine di essi.

E qui mi sento in dovere di dichiarare che questa ultima operazione mi è riuscita penosa; perciocchè quegli che aveva lasciate quelle Memorie, mi era stato affezionato maestro ed aveva efficacemente cooperato a farmi ottenere la cattedra di matematiche al R. Liceo di Pisa, alla quale io aveva concorso.

—?

La natura di questo Giornale non comporta che io esponga qui la parte storica delle Funzioni iperboliche e le loro proprietà derivanti dal loro uso nell'analisi, nell'Astronomia, e nella Fisica. Quelli che amassero di conoscerli a fondo, possono consultare i Vol. XXII e XXIV delle *Memorie dell'Accademia di Berlino* dove sono inseriti i lavori di Lambert, il quale si può considerare come il vero autore della teorica delle Funzioni iperboliche, e possono anche leggere la Prefazione che feci alle Tavole delle quali trattiamo (1).

(1) Queste Tavole circolari ed iperboliche insieme alla Prefazione che ne dà la storia, la costruzione e l'uso, si trovano vendibili presso i principali libraj di Pisa. Nel calcolo delle formule che ho stabilite per costruirle, ho fatto uso di cure assidue e scrupolose. Impiegate in varie applicazioni esse corrisposero esattamente.

Ciò che qui ho intenzione di fare, è di esporre le formule, le quali riassumono in sè le proprietà caratteristiche di queste Funzioni, e che sono state da me scelte per costruire le Tavole stesse, onde queste si prestassero ad un rapido uso e in ogni caso. Fatto questo, esibire delle formule che ho pure stabilite, le quali danno i valori delle Funzioni iperboliche corrispondenti a piccoli aumenti attribuiti ad argomenti dati e che sono acconci soprattutto nei casi in cui il metodo delle interpolazioni non fosse idoneo. Infine scegliere tra le tante applicazioni delle Funzioni iperboliche alle matematiche e alla fisica, per la quale le nostre Tavole sono utili principalmente, una ad esempio che spesso si affaccia, voglio dire *la caduta di un grave in un mezzo resistente*.

3.

Sia $A b d e C$ un circolo di raggio $AC = 1$ (*Tav. II. fig. 1*) ed EAB un'iperbola equilatera di semi-assi $= 1$; le equazioni del primo e della seconda, assumendo C per centro e AC e Cb ad angolo retto tra loro per assi della x e delle y , saranno rispettivamente

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad (1') \quad x^2 - y^2 = 1.$$

Consideriamo un arco $Ap = \phi$ e tiriamo il raggio Cp , che prolungheremo sino all'incontro dell'iperbola in P . Abbassiamo $p q$ e $P Q$ perpendicolari all'asse delle x , e finalmente eleviamo dal punto A la perpendicolare AT sino all'incontrare CP in T .

Nominiamo ω il doppio settore circolare di cui ϕ è l'arco ed $h \omega$ il doppio settore iperbolico corrispondente; sarà

$$p q = \text{sen } \omega \quad ; \quad C q = \cos \omega$$

e per analogia

$$P Q = \text{senh } \omega \quad ; \quad C Q = \cosh \omega.$$

Sappiamo dalla Geometria analitica che

$$(2) \quad \cos \omega = \frac{e + e}{2} \quad ; \quad \sin \omega = \frac{e - e}{2i}$$

$$(2') \quad \cosh \omega = \frac{e + e}{2} \quad ; \quad \sinh \omega = \frac{e - e}{2}$$

essendo $i = \sqrt{-1}$.

Se dal punto d'incontro T della tangente AT con la secante CT , noi conduciamo TS parallela all' asse delle x sino ad incontrare il cerchio in S e si tiri il raggio CS , l'angolo $SCA = \tau$, è stato chiamato da Lambert *angolo trascendente* e gode di proprietà rimarchevoli ed utilissime. Intanto si ha, in seguito della costruzione suddetta,

$$(3) \quad \sin \tau = \tan \phi.$$

Ora vado a provare con Lambert che

$$(4) \quad \sec \tau = \cosh \omega \quad ; \quad \tan \tau = \sinh \omega.$$

Infatti dalla (3) si ricava

$$(5) \quad \sec \tau = \frac{1}{\cos \tau} = \frac{\cos \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} \quad ; \quad \tan \tau = \frac{\sin \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}.$$

Riferiamo l'iperbola a coordinate polari, si ha

$$CQ = x = r \cos \phi \quad ; \quad PQ = y = r \sin \phi.$$

Sostituendo questi valori nella equazione (1') dell'iperbola, ricaveremo

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

quindi

$$CQ = \frac{\cos \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} \quad ; \quad PQ = \frac{\sin \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

ossia

$$(6) \quad \cosh \omega = \frac{\cos \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} \quad ; \quad \sinh \omega = \frac{\sin \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}},$$

le quali confrontate con le (5), ci danno le (4).

E qui farò notare che in virtù di questa proprietà dell'angolo trascendente si può descrivere la iperbole per punti; infatti (fig. 2) condotto un raggio $C\phi$, lo prolungo in t sino all'incontro della tangente rt ; tiro $t\tau$ parallela all'asse delle x sino ad incontrare la circonferenza in τ ; conduco il raggio $C\tau$ e lo prolungo in e sino che v' incontri la tangente rt ; prendo $Cx = Ce$; innalzo da x una perpendicolare Cx sino a che incontri in p la parallela a Cx condotta da e ; il punto p è un punto della iperbole equilatera.

Come dalla (3) e dalle (6) ricaviamo τ , $\sinh \omega$ e $\cosh \omega$ in funzione di ϕ , possiamo esprimere anche l' ω in funzione di ϕ .

Dalla (2) ricavo a quest' uopo

$$\tanh \omega = \frac{e^{\omega} - 1}{e^{\omega} + 1}$$

da cui

$$e^{\omega} = \frac{1 + \tanh \omega}{1 - \tanh \omega} = \frac{1 + \tan \phi}{1 - \tan \phi} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \phi \right) :$$

e passando ai logaritmi tabularii, avremo

$$(7) \quad \omega = \frac{\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \phi \right)}{2 \log e}$$

Prendendo per argomento ϕ (come ho fatto per costruire le Tavole) e facendo variare ϕ di minuto in minuto primo, da 0° a 45° , ho ottenuto per mezzo di (3), delle (6) e della (7) i valori corrispondenti di

$$\tau \quad ; \quad \log \sinh \omega \quad ; \quad \log \cosh \omega \quad ; \quad \log \omega .$$

A lato a ciascuna colonna ne ho posta una per le *differenze*; interpolando le quali si ottengono le correzioni da farsi ai valori numerici di queste funzioni per un accrescimento di δ minuti secondi attribuito ad un argomento dato ϕ . Ma siccome l'interpolazione in alcuni casi ci allontanerebbe dal vero, così ho dovuto stabilire delle formule semplici, con le quali le correzioni stesse si potessero ottenere con facilità ed esattezza quando $\delta \stackrel{=}{<} 10''$.

A queste prime Tavole, ne ho fatto seguire altre sotto il titolo di *angoli trascendenti; valori rispettivi dei doppii settori iperbolici e logaritmi delle loro tangenti*.

Era infatti necessario di avere delle Tavole che dessero il doppio settore iperbolico in funzione dell'angolo trascendente τ assunto come *argomento*, come pure avere il valore del logaritmo di $\sinh \tau$, ossia della tangente ϕ corrispondenti a tutti i valori di τ da 0° a 90° .

A questo effetto riprendiamo la formula

$$e^{\frac{2\omega}{e}} = \frac{1 + \tan \phi}{1 - \tan \phi} = \frac{1 + \sinh \tau}{1 - \sinh \tau} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tau \right) ,$$

da cui

$$(8) \quad \omega = \frac{\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tau \right)}{\log e} ,$$

da cui ho potuto ricavare ω , ossia il valore numerico del *doppio settore iperbolico* corrispondente a tutti i valori di minuto in minuto di $\frac{1}{2} \tau$ da 0° a 45° , ossia di tutti i valori di τ da 0° a 90° da due minuti a due minuti.

Per avere finalmente tutti i valori di $\log \tan \phi$ corri-

spondenti ai detti valori di τ , è bastato, in virtù della relazione (3), che io copiassi delle Tavole dei logaritmi ordinarii il valore del seno di tutti gli angoli da 0° a 90° procedendo da due a due minuti primi.

Per dare al lettore una idea precisa di queste mie Tavole, ne trascrivo due, una appartenente alle prime corrispondente all'argomento $\omega = 14^\circ. 00'$; l'altra appartenente alle seconde corrispondente all'argomento $\frac{1}{2}\tau = 7^\circ. 00'$; tanto più che di esse avrò appunto bisogno per l'applicazione alla caduta di un grave in un mezzo resistente.

M	ang. tras τ	D	cosh	D	sinh	D	2 setth	D
0	⁰ 14.26.16 ⁰⁰	" "	0,01394	5	9,41071	57	9,40603	56
1	14.27.22	1.6	0,01397	4	9,41128	57	9,40639	56
2	14.28.27	1.6	0,01401	5	9,41183	58	9,40715	56
3	14.29.33	1.6	0,01404	4	9,41243	57	9,40771	56
4	14.30.39	1.6	0,01408	4	9,41300	57	9,40827	56
5	14.31.45	1.6	0,01412	5	9,41357	57	9,40883	56
6	14.32.51	1.6	0,01415	4	9,41414	57	9,40939	56
7	14.33.57	1.6	0,01419	5	9,41471	57	9,40995	55
8	14.35.03	1.6	0,01422	4	9,41528	57	9,41050	56
9	14.36.09	1.6	0,01426	4	9,41585	57	9,41106	56
10	14.37.15	1.6	0,01430	5	9,41642	57	9,41162	55
11	14.38.21	1.6	0,01433	4	9,41699	57	9,41217	56
12	14.39.27	1.6	0,01437	5	9,41756	56	9,41273	55
13	14.40.33	1.6	0,01440	4	9,41812	57	9,41328	56
14	14.41.39	1.6	0,01444	4	9,41869	57	9,41384	55
15	14.42.45	1.6	0,01448	5	9,41926	56	9,41439	55
16	14.43.51	1.6	0,01451	4	9,41982	57	9,41494	56
17	14.44.57	1.6	0,01455	4	9,42039	56	9,41550	55
18	14.46.03	1.6	0,01459	5	9,42095	57	9,41605	55
19	14.47.09	1.6	0,01462	4	9,42152	56	9,41660	55
20	14.48.15	1.6	0,01466	4	9,42208	56	9,41715	55
21	14.49.21	1.6	0,01470	5	9,42264	57	9,41770	55
22	14.50.27	1.6	0,01473	4	9,42321	56	9,41825	55
23	14.51.33	1.7	0,01477	4	9,42377	56	9,41880	55
24	14.52.40	1.6	0,01481	4	9,42433	56	9,41935	55
25	14.53.46	1.6	0,01485	5	9,42489	56	9,41990	55
26	14.54.52	1.6	0,01488	4	9,42545	56	9,42045	55
27	14.55.58	1.6	0,01492	4	9,42601	56	9,42100	54
28	14.57.04	1.7	0,01496	5	9,42657	56	9,42154	55
29	14.58.11	1.6	0,01499	4	9,42713	56	9,42209	55
30	14.59.17	1.6	0,01503		9,42769		9,42294	
M	sin τ = tang		sec τ = cosh		tang τ = sinh		tangh = tang	

$$\frac{1}{2} \tau = 7^{\circ}$$

M	2 setth	D	log tang ϕ	D	M	2 setth	D	log tang ϕ	D
0	0,24681		9,38368		30	0,26484		9,41300	
		60		101			60		94
1	0,24744	60	9,38469	101	31	0,26544	61	9,41394	94
2	0,24801	60	9,38570	100	32	0,26603	60	9,41488	94
3	0,24861	60	9,38670	101	33	0,26663	60	9,41582	95
4	0,24921	60	9,38771	100	34	0,26723	60	9,41675	95
5	0,24981	60	9,38871	100	35	0,26785	61	9,41768	95
		60		100			60		95
6	0,25041	60	9,38971	100	36	0,26846	60	9,41861	95
7	0,25101	60	9,39071	99	37	0,26906	61	9,41954	95
8	0,25161	60	9,39170	100	38	0,26967	60	9,42047	95
9	0,25221	60	9,39270	99	39	0,27027	60	9,42140	92
10	0,25281	60	9,39369	98	40	0,27087	60	9,42232	92
		61		99			61		92
11	0,25341	61	9,39467	99	41	0,27147	61	9,42324	92
12	0,25402	60	9,39566	98	42	0,27208	60	9,42416	91
13	0,25462	60	9,39664	98	43	0,27268	60	9,42507	92
14	0,25522	60	9,39762	98	44	0,27328	61	9,42599	91
15	0,25582	60	9,39860	98	45	0,27389	60	9,42690	91
		60		97			61		91
16	0,25642	60	9,39958	97	46	0,27449	61	9,42781	91
17	0,25702	60	9,40055	97	47	0,27510	60	9,42872	90
18	0,25762	60	9,40152	97	48	0,27570	60	9,42962	91
19	0,25822	60	9,40249	97	49	0,27630	61	9,43053	90
20	0,25882	61	9,40346	96	50	0,27691	60	9,43143	90
		60		96			61		90
21	0,25943	60	9,40442	96	51	0,27751	61	9,43233	90
22	0,26003	60	9,40538	96	52	0,27812	60	9,43323	89
23	0,26063	60	9,40634	96	53	0,27872	61	9,43412	90
24	0,26123	60	9,40730	95	54	0,27933	60	9,43502	89
25	0,26183	61	9,40825	96	55	0,27993	60	9,43591	89
		60		95			61		89
26	0,26243	60	9,40921	95	56	0,28053	60	9,43680	89
27	0,26304	60	9,41016	95	57	0,28114	61	9,43769	88
28	0,26364	60	9,41111	94	58	0,28174	60	9,43857	89
29	0,26424	60	9,41205	95	59	0,28235	60	9,43946	88
30	0,26484	60	9,41300		60	0,28295		9,44034	
M	2 setth	D	log sin τ	D	M	2 setth	D	log sin τ	D

$$\frac{1}{4} \tau = 7^{\circ}$$

4.

Formule per le quali si passa dalle Tavole iperboliche procedenti nell'argomento di minuto in minuto, a quelle procedenti di δ in δ secondi.

Per avere il valore di τ , $\log \omega$, $\log \cosh \omega$, $\log \sinh \omega$ corrispondenti ad un argomento ϕ che contenesse anche dei minuti secondi, si commetterebbe in molti casi un errore sensibile se si prendessero le parti proporzionali delle differenze dei due valori successivi di essi i cui argomenti differiscono di un minuto primo. Per ottenere con maggiore esattezza le correzioni da farsi a quest'oggetto, ecco le formule che ho dimostrato anche per la idea che, ristampando o io od altri queste Tavole, si volesse far procedere l'argomento di 10 in 10 secondi come è stato praticato nelle Tavole comuni trigonometriche.

Si tratta dunque, avendosi

$$\log \operatorname{sen} \tau = \log \tan \phi \quad ; \quad \log \cosh \omega = \log \frac{\cos \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

$$\log \omega = \log \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \phi \right)}{2 \log e} \quad ; \quad \log \sinh \omega = \log \frac{\operatorname{sen} \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} .$$

trovare gli aumenti che devono subire i primi membri di queste equazioni, dipendentemente ad un accrescimento δ'' dato a ϕ nei secondi.

Diamo dunque un accrescimento δ alla ϕ e gli aumenti che ne risulteranno nei secondi membri saranno quelli da darsi ai primi.

Si ha dall'algebra che

$$\log \operatorname{sen} (x + \delta) - \log \operatorname{sen} x = \log \cos \delta + M \tan \delta \cot x$$

$$\log \cos (x + \delta) - \log \cos x = \log \cos \delta - M \tan \delta \tan x$$

e ponendo per approssimazione

$$\log \cos \delta = \log \cos 10'' = 0 ,$$

avremo :

$$\log \operatorname{sen} (x + \delta) - \log \operatorname{sen} x = M \tan \delta \cot x ,$$

$$\log \cos (x + \delta) - \log \cos x = -M \tan \delta \tan x ,$$

dove

$$M = \text{modulo} = \log e = 0,43429448 .$$

Ciò posto cerchiamo $\Delta \log \operatorname{sen} r$. Abbiamo

$$\log \tan \phi = \log \operatorname{sen} \phi - \log \cos \phi$$

$$\log \tan (\phi + \delta) = \log \operatorname{sen} (\phi + \delta) - \log \cos (\phi + \delta)$$

$$\log \tan (\phi + \delta) - \log \tan \phi = [\log \operatorname{sen} (\phi + \delta) - \log \operatorname{sen} \phi]$$

$$- [\log \cos (\phi + \delta) - \log \cos \phi]$$

$$= M \tan \delta (\cot \phi + \tan \phi)$$

$$= 2 M \frac{1}{\operatorname{sen} 2 \phi} \tan \delta ;$$

quindi si avrà

$$(1) \quad \Delta \log \operatorname{sen} r = M \frac{2}{\operatorname{sen} 2 \phi} \tan \delta = 2 M \operatorname{cosec} 2 \phi \tan \delta .$$

Passiamo a cercare $\Delta \log \cosh \omega$. Si ha

$$\log \frac{\cos \phi}{\sqrt{\cos 2 \phi}} = \log \cos \phi - \frac{1}{2} \log \cos 2 \phi$$

$$\log \frac{\cos (\phi + \delta)}{\sqrt{\cos 2 (\phi + \delta)}} = \log \cos (\phi + \delta) - \frac{1}{2} \log \cos 2 (\phi + \delta)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(\phi + \delta)}{\sqrt{\cos 2(\phi + \delta)}} - \log \frac{\cos \phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} &= [\log \cos(\phi + \delta) - \log \cos \phi] \\
 &\quad - \frac{1}{2} [\log \cos 2(\phi + \delta) - \log \cos 2\phi] \\
 &= -M \tan \delta \tan \phi + \frac{1}{2} M \tan 2\delta \tan 2\phi \\
 &= -M (\tan \delta \tan \phi - \frac{1}{2} \tan 2\delta \tan 2\phi) \\
 &= -M \left(\tan \delta \tan \phi - 2 \frac{\tan \delta \tan \phi}{(1 - \tan^2 \delta)(1 - \tan^2 \phi)} \right) \\
 &= -M \tan \delta \tan \phi \left(1 - \frac{2}{1 - \tan^2 \phi} \right) \\
 &= M \tan \delta \tan \phi \frac{1 + \tan^2 \phi}{1 - \tan^2 \phi} = M \tan \delta \frac{\tan \phi}{\cos 2\phi},
 \end{aligned}$$

avendo fatto per approssimazione $\tan^2 \delta = 0$. Onde

$$(2) \quad \Delta \log \cosh \omega = M \frac{\tan \phi}{\cos 2\phi} - \tan \delta.$$

Con metodo analogo ritrovo

$$(3) \quad \Delta \log \sinh \omega = M \frac{\tan \delta}{\tan \phi \cos 2\phi}.$$

Passiamo finalmente a $\Delta \log \omega$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \phi\right)}{2 \log e} &= \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \phi\right) - \log 2 \log e \\
 &= \log \sin\left(\frac{\pi}{4} + \phi\right) - \log \cos\left(\frac{\pi}{4} + \phi\right) - \log 2 \log e.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \delta \right)}{2 \log e} &= \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \delta \right) - \log 2 \log e \\ &= \log \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \delta \right) - \log \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \delta \right) - \log 2 \log e,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\log \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \delta \right)}{2 \log e} - \log \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)}{2 \log e} &= \left\{ \log \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \delta \right) - \log \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \right\} \\ &\quad - \left\{ \log \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \delta \right) - \log \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \right\} \\ &= M \tan \delta \cot \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) + M \tan \delta \tan \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \\ &= M \tan \delta \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) + \tan \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \right\} \\ &= 2 M \frac{\tan \delta}{\operatorname{sen} 2 \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)},\end{aligned}$$

onde

$$(4) \quad \Delta \log \omega = 2 M \frac{\tan \delta}{\operatorname{sen} 2 \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)} = 2 M \frac{\tan \delta}{\cos 2 \varphi}.$$

Le (1), (2), (3), (4) ci danno la soluzione del problema che ci eravamo proposti.

Di formule affatto simili si farebbe uso volendo fare procedere le seconde Tavole di 10 in 10 secondi.

*Applicazione delle Tavole iperboliche alla caduta dei gravi
in un mezzo resistente.*

Le funzioni iperboliche sono state felicemente applicate alla teorica dell'*ascesa* e *discesa* dei gravi. Infatti:

1.^o Esse conservano alle formule che danno la discesa una perfetta analogia colle corrispondenti circolari che determinano l'*ascesa*, perciocchè da queste si passa alle prime con un semplice cangiamento di segno ad una costante e colla sostituzione dei simboli delle funzioni iperboliche a quelli delle circolari analoghe. Se invece si facesse uso degli esponenziali, questa analogia sparirebbe.

2.^o Siccome all'*ascesa* di un grave, succede la sua *discesa*, le formule che lo accompagnano nella prima sono surrogate, non da diverse, ma da analoghe iperboliche, tosto ch'esso incomincia a discendere.

È perciò che l'illustre Prof. Mossotti ha trattato questa teorica nella sua *Meccanica razionale* col mezzo delle funzioni circolari ed iperboliche.

Sia V il volume di una sfera di raggio r ; D la sua densità, e g la forza di gravità; la sua massa verrà data da $D V$ e il suo peso da $g D V$; che se rappresentiamo con Δ la densità del mezzo in seno del quale si muove; lo stesso volume V di questo mezzo peserà $g \Delta V$; quindi pel principio di Archimede, il peso del mobile si residuerà a

$$g V (D - \Delta) = g \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 (D - \Delta) .$$

Nello scendere, la sfera subirà una resistenza per parte del mezzo stesso, la quale sappiamo che è proporzionale alla densità di questo e al quadrato della velocità v del mobile; sicchè rappresentando con σ un numero, che esprima la proporzionalità indicata, la resistenza alla caduta del grave verrà data da $\sigma \Delta v^2$ e quindi la forza motrice F della sfera si ridurrà a

$$(1) \quad F = g \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 (D - \Delta) - \sigma \Delta v^2 .$$

Il coefficiente σ si suole valutare nel modo seguente; esso è proporzionale alla massima sezione orizzontale S eseguita nel mobile, e a due numeri $n + n'$ che riguardano la resistenza prodotta dalle curve secondo le quali si piegano i filetti fluidi dinanzi e dietro alla sezione S . Indicando con γ un coefficiente, costante per uno stesso fluido, avremo

$$\sigma = \gamma (n + n') S = \gamma (n + n') \pi r^2 ,$$

e quindi la (1) diverrà

$$(2) \quad F = g \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 (D - \Delta) - \gamma (n + n') \pi r^2 \Delta v^2 .$$

Ora essendo la forza motrice

$$F = M \cdot f ,$$

dove M è la massa e f la forza acceleratrice del corpo, avremo dalla (2)

$$(3) \quad f = \frac{1}{M} \left\{ g \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 (D - \Delta) - \gamma (n + n') \pi r^2 \Delta v^2 \right\} .$$

Allorchè un corpo cade in un mezzo resistente, alla sua massa

$$V D = \frac{4}{3} \pi r^3 D ,$$

se ne aggiunge un'altra, la quale è quella porzione di fluido che vi aderisce, il cui volume è una frazione i del corpo che cade; onde la massa che conviene aggiungere a quella della sfera, verrà data da

$$i V \Delta = i \frac{4}{3} \pi r^3 \Delta ,$$

quindi

$$(4) \quad M = \frac{4}{3} \pi r^3 (D + i \Delta) .$$

Poisson ha trovato analiticamente che

$$i = \frac{1}{2} .$$

Sostituendo in (3) per M il suo valore dato da (4) avremo che la forza acceleratrice della nostra sfera sarà

$$(3') \quad f = g \frac{D - \Delta}{D + i\Delta} - \frac{\gamma}{r} \frac{(n + n')}{D + i\Delta} v^2. \quad (1)$$

Da questa, per mezzo di una integrazione, si ricava che lo spazio verticale z che descrive il grave in un tempo t nel mezzo resistente, e la velocità v che ha alla fine di quel tempo, sono dati dalle formule

$$(5) \quad z = \frac{k^2}{g'} \log \frac{\cosh \frac{g'}{k} (t + c)}{\cosh \frac{g'}{k} c}; \quad (6) \quad v = k \tanh \frac{g'}{k} (t + c)$$

dove k e c sono due costanti, da determinarsi coi dati della esperienza e dove è posto per brevità

$$(7) \quad g' = g \frac{D - \Delta}{D + i\Delta}.$$

Supponiamo che quando

$$t = 0 \quad \text{sia} \quad v = 0$$

allora la (6) ci darà

$$0 = k \tanh \frac{g'}{k} c$$

e siccome nè k , nè g' sono nulli, sarà

$$\tanh \frac{g'}{k} c = 0;$$

ossia

$$c = 0 \quad \text{e quindi} \quad \cosh 0 = 1$$

(1) Vedi Meccanica razionale del Prof. O. F. Mossotti. Firenze Tipografia Piatti.

per cui la (5) diverrà

$$(8) \quad z = \frac{k^2}{g'} \log \cosh \frac{g'}{k} t.$$

Resta a dire del significato di k e a determinarne il valore. Rappresento con k la velocità massima di cui dovrebbe essere dotato il grave per rendere nulla la sua forza acceleratrice f . Ponendo dunque $f=0$ dopo avere nella equazione (4') sostituito k a v , avremo

$$g \frac{D - \Delta}{D + i \Delta} = \frac{\frac{3}{4} \gamma (n + n')}{r} \frac{\Delta}{D + i \Delta} k^2,$$

da cui

$$(9) \quad k^2 = \frac{\frac{4}{3} g r}{\gamma (n + n')} \left(\frac{D}{\Delta} - 1 \right).$$

Le equazioni (7) e (9) determinano completamente la z nella (8).

Prendendo per g la gravità all'equatore, per Δ la densità dell'aria rispetto all'acqua la cui densità è assunta per unità, per D quella del ferro di cui ho supposto formata la sfera e facendo per approssimazione $\gamma (n + n') = \frac{1}{4}$, come usano gl'idraulici, poi facendo $r = 1$, $t = 15''$, avremo

$$g = 9^m,78078 \quad , \quad \Delta = 0,001293187 \quad , \quad D = 7,778$$

$$g' = 9^m,77834 \quad , \quad \log \frac{k^2}{g'} = 4,5067994 \quad , \quad \frac{g'}{k} t = 0,2617124,$$

per cui la (8) si ridurrà

$$(9) \quad z = \frac{k^2}{g'} \log \cosh (0,2617124).$$

Dalle nostre seconde Tavole troveremo, interpolando, che ad

$$\omega = 0,2617124 \quad , \quad \text{corrisponde} \quad \frac{1}{3} r = 7^o.24'.48'',24$$

e quindi

$$\tau = 14^{\circ}.49'.36'',48.$$

Andiamo ora alle prime, ed al solito interpolando, ricaveremo che a

$$\tau = 14^{\circ}.49'.36'',48 \quad \text{corrisponde} \quad \log \cosh \omega = 0,014708.$$

Quindi dalla (6) otterremo

$$\log z = \log \frac{k^2}{g'} + \log \log \cosh (0,2617124) = \log \frac{k^2}{g'} + \log 0,014708.$$

Fatto il calcolo, ci darà

$$z = 457^m,422,$$

che sarà prossimamente lo spazio che descriverà la nostra sfera nel seno dell'aria all'equatore nel tempo di 15" partendo dalla quiete. Ho detto per approssimazione, poichè $\gamma (n + n') = \frac{1}{4}$ che soddisfa abbastanza per l'aria è una palla di vetro cava di cinque pollici inglesi, noi l'abbiamo posta per la nostra.

6.

Prima di chiudere questo scritto, ci stimiamo in dovere di dire qualche cosa intorno alle Tavole iperboliche del sig. Gudermann.

Nei Vol. VI. VII. VIII. e IX. del *Giornale di Crelle*, il sig. Gudermann ha inserite le sue Tavole iperboliche, le quali sono di due specie. Le prime danno l'*angolo trascendente*, ch'egli chiama *numero longitudinale* (*longitudinal Zahl*) quando è dato il *doppio settore iperbolico*, ch'egli chiama *numero di lunghezza* (*länge zahl*) e viceversa; le altre danno i logaritmi di $\sinh$, e di $\cosh$, dato essendo il doppio settore.

Queste seconde peraltro non cominciano dal doppio

settore $= 0$, ma sibbene dal doppio settore $= 2$ in poi, poichè, secondo dice egli stesso, le prime non si prestano bene ad un rapido uso, quando il doppio settore è maggiore di 4. Onde l'uso delle Tavole del sig. Gudermann non è uniforme. Se il doppio settore dato è > 2 , allora le sue seconde Tavole si prestano direttamente a dare i logaritmi delle funzioni iperboliche corrispondenti; se al contrario è < 2 , allora conviene ricorrere alle prime che danno invece l'angolo trascendente, ottenuto il quale per ricavare i logaritmi delle funzioni iperboliche corrispondenti, è d'uopo ricorrere alle Tavole logaritmiche ordinarie.

Invece l'uso delle nostre Tavole è uniforme e più semplice. Imperocchè se è dato il logaritmo del doppio settore, si ricava subito dalle prime il $\log \sinh$, e il $\log \cosh$; e viceversa. Se poi è dato il valore *numerico* del doppio settore, le seconde Tavole danno l'angolo trascendente corrispondente, e quindi risalendo alle prime, si può anche ricavare da esse con semplici interpolazioni i logaritmi delle corrispondenti funzioni iperboliche.

Ma il vantaggio principale delle nostre Tavole e per cui le crediamo essenzialmente superiori a quelle del sig. Gudermann, si è quello di dare i logaritmi tanto delle funzioni iperboliche, quanto delle funzioni circolari, ordinati secondo uno stesso argomento, che è il doppio settore circolare, e quindi di potere avere con esse il modo più facile e spedito di calcolare le formule, che contengono riunite le une e le altre funzioni.

Che se un giorno esse verranno estese ad argomenti procedenti di 10 in 10 secondi e con sette cifre decimali, allora, dato essendo numericamente il valore di una funzione qualunque circolare ed iperbolica, ovvero del suo logaritmo, si cercasse quello delle corrispondenti funzioni, si potrà fare a meno assolutamente di associare alle nostre Tavole, quelle dei logaritmi ordinari dei numeri, anche nel caso che il problema richiedesse una grande esattezza, nello stesso tempo che l'angolo o la funzione iperbolica data, non fossero contenute esattamente nelle Tavole; perciocchè l'interpolazione *delle differenze* non produrrebbe allora errori sensibili.

Nell'applicazione delle funzioni iperboliche alla risoluzione delle equazioni di 3.^o grado che il lettore troverà eseguita ed esposta con ampii dettagli nella mia Prefazione alle Tavole ho fatto notare che anche così come sono le Tavole stesse, il metodo d'interpolazione conduce ad errori affatto trascurabili. Certamente l'interpolazione non può usarsi per i valori di ϕ assai vicini a $\frac{\pi}{4}$; ma questo incon-

veniente si riscontra anche nelle Tavole ordinarie pei logaritmi dei numeri assai piccoli, pei coseni assai grandi, ec.

È perciò che ho dato le formule con cui si possono calcolare con moltissima approssimazione e speditezza le piccole correzioni corrispondenti all'aumento di δ secondi nell'argomento dato, essendo $\delta = 10''$.

Dopo ciò che ho detto, porto fiducia che le Tavole iperboliche che ho costruite debbano essere di qualche utilità alla scienza.