Der Begriff der Grenze.

Von

H. STEINHAUS in Jaslo (Österreich).

Die Aufgabe, die hier behandelt werden soll, ist, ein möglichst einfaches System von Axiomen anzugeben, mit deren Hilfe man die Begriffe „Grenze“ und „konvergente Folge“ definieren kann, ohne die ziemlich komplizierten Ungleichungen der üblichen Definitionen einzuführen. *)

Wir werden zeigen, daß die gebräuchliche Definition unseren Axiomen genügt, und daß sie die einzige ist, die es tut; die Hauptsache aber wird in der Untersuchung der *Unabhängigkeit* der Axiome liegen; die gewonnenen Resultate werden zeigen, daß man unser System durch kein einfacheres ersetzen kann. Zu diesem Zweck werden wir „Pseudokonvergenzen“ konstruieren, nach der Methode, die seit den Arbeiten Hilberts über die Grundlagen der Geometrie klassisch geworden ist. Am Schlusse kommt das eigentümliche Verhalten der einfacheren Systeme zur Sprache.

§ 1.

Definitionen.

Wir gehen hier nicht näher auf die übliche Definition der Grenze und der konvergenten Folge ein, wir heben nur hervor, daß wir nur unendliche Folgen behandeln, und ferner, daß wir mit dem heutigen Gebrauch übereinstimmend die „gegen unendlich konvergenten Folgen“ immer als *divergent* bezeichnen werden. Wenn eine Folge

$$\{s_n\} \equiv s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots,$$

die Eigenschaft hat, daß alle ihre Glieder, absolut genommen, kleiner sind, als eine feste Zahl N , werden wir sie als *beschränkt* bezeichnen. Wenn eine Folge $\{s_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{p_n\}$ enthält, so nennen wir den Grenzwert der letzteren eine *Teilgrenze* der Folge $\{s_n\}$. Um Mißver-

*) Wir meinen hier die *logische* Einfachheit und *logische* Kompliziertheit; für die *Anwendungen* bleibt die gebräuchliche Definition immer die einfachste.

ständnissen vorzubeugen, erinnern wir noch daran, daß wir uns auf reelle Zahlen beschränken wollen.

Die Worte *konvergent*, *divergent*, *Grenzwert* werden in der Folge nur in dem üblichen Sinne gebraucht, ebenso die Schreibweise $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$.

Wir betrachten nun die Menge Ω aller möglichen Folgen und wählen eine Untermenge M dieser Menge; einer jeden Folge $\{a_n\}$, die zu M gehört, soll eine und nur eine endliche Zahl a entsprechen; a wird dadurch eine Funktion von abzählbar vielen Variablen $a = f[\{a_n\}]$ oder kürzer geschrieben

$$a = f\{a_n\}.$$

Wir unterwerfen die Menge M und die Funktion f gewissen Bedingungen, die wir *Axiome* nennen. Durch diese Bedingungen werden eine oder mehrere Mengen M mit den entsprechenden Funktionen implizit definiert werden: wir sagen, daß wir damit ein *Summationsverfahren* definiert haben.

§ 2.

Die Axiome.

Unser vollständiges System besteht aus den sieben folgenden Axiomen:

1. Wenn eine Folge $\{a_n\}$ zu M gehört, gehört eine jede Teilfolge von $\{a_n\}$ zu M .

2. Wenn $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zu M gehören und $\{b_n\}$ eine Teilfolge der Folge $\{a_n\}$ ist, so ist $f\{a_n\} = f\{b_n\}$.

3. Wenn $\{a_n\}$ zu M gehört, so gehört auch $\{k + a_n\}$ zu M .

4. Wenn $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zu M gehören und $a_n + k = b_n$ ist (für alle n), so ist $f\{b_n\} = k + f\{a_n\}$.

5. Wenn alle a_n positiv sind, so ist $f\{a_n\}$ nicht negativ.

6. Wenn alle a_n negativ sind, so ist $f\{a_n\}$ nicht positiv.

7. Wenn M' eine Menge von Folgen bezeichnet, die mit einer entsprechenden Funktion f' ein den vorhergehenden Axiomen gehorchendes Summationsverfahren definiert, so ist M' entweder mit M identisch, oder eine Untermenge von M .*)

Man sieht unmittelbar, daß man die Bedingungen 1 2 3 4 5 6 erfüllt haben wird, wenn man für M die Menge aller konvergenten Folgen nimmt — diese Menge wollen wir immer mit $\bar{M}$ bezeichnen —, und $f\{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$

setzt. Es wird aber auch 7 erfüllt sein. Es sei nämlich Π ein Summationsverfahren, Γ die zugehörige Menge und φ die zugehörige Funktion; wenn Π den Axiomen 1 2 3 4 5 6 gehorcht, so gelten die beiden folgenden Sätze:

*) Ein „Vollständigkeits-Axiom“.

$\alpha)$ Für alle konvergenten, zu Γ gehörenden Folgen $\{a_n\}$ ist

$$\varphi\{a_n\} = \lim_{n=\infty} \{a_n\}.$$

Es sei $\alpha = \lim_{n=\infty} \{a_n\}$; $\varphi\{a_n\} - \alpha = \varepsilon$; **3** und **4** geben:

$$\varphi\{a_n - \alpha + \delta\} = \varphi\{a_n\} - \alpha + \delta = \varepsilon + \delta; \quad \varphi\{a_n - \alpha - \delta\} = \varepsilon - \delta.$$

Sei δ eine positive Zahl; die Gleichung $\alpha = \lim \{a_n\}$ belehrt uns, daß $\{a_n + \delta - \alpha\}$ unendlich viele positive Glieder enthält, und **1 2 5** sagen aus, daß $\varepsilon + \delta = \varphi\{a_n - \alpha + \delta\}$ nicht negativ ist; $\{a_n - \delta - \alpha\}$ hat unendlich viele negative Glieder, und aus **1 2 6** folgt, daß $\varepsilon - \delta = \varphi\{a_n - \delta - \alpha\}$ nicht positiv ist. Da aber δ eine beliebige positive Zahl ist, so folgt

$$\varepsilon = 0, \quad \text{oder} \quad \varphi\{a_n\} = \alpha = \lim \{a_n\} \quad \text{w. z. b. w.}$$

$\beta)$ Γ kann keine divergenten Folgen enthalten. Eine divergente Folge hat immer wenigstens eine der drei folgenden Eigenschaften: entweder hat sie zwei verschiedene Teilgrenzen, oder sie enthält eine Teilfolge mit positiven Gliedern, die unbegrenzt wachsen, oder eine Teilfolge mit negativen Gliedern, deren absolute Beträge unbegrenzt wachsen. Sei $\{d_n\}$ eine divergente Folge, die zu Γ gehört; enthielte sie zwei Teilfolgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, die gegen verschiedene Grenzen konvergierten, so hätten wir:

$$\{a_n\} \text{ und } \{b_n\} \text{ gehören zu } \Gamma \text{ (nach 1),}$$

$$\varphi\{d_n\} = \varphi\{a_n\}, \quad \varphi\{d_n\} = \varphi\{b_n\} \text{ (nach 2),}$$

$$\varphi\{a_n\} = \lim_{n=\infty} \{a_n\}, \quad \varphi\{b_n\} = \lim_{n=\infty} \{b_n\} \text{ (nach Satz } \alpha),$$

was der Voraussetzung $\lim_{n=\infty} \{a_n\} \neq \lim_{n=\infty} \{b_n\}$ widerspricht. Enthielte $\{d_n\}$ eine Teilfolge mit unbegrenzt wachsenden positiven Gliedern, so würden wir setzen $d = \varphi\{d_n\}$; **3** und **4** ergeben dann:

$$-1 = \varphi\{d_n - d - 1\}.$$

Nun enthält $d_n - d - 1$ sicher eine Teilfolge $\{p_n\}$ mit lauter positiven Gliedern; **1** und **2** lassen schließen:

$$\varphi\{p_n\} = \varphi\{d_n - d - 1\} = -1,$$

was dem Axiom **5** widerspricht. Analog erledigt man den dritten Fall. Somit ist $\beta)$ bewiesen.

Aus diesen Sätzen folgt, daß das der gewöhnlichen Konvergenz entsprechende Summationsverfahren $\bar{S}$ auch dem Axiom **7** genügt. Denn der Satz $\beta)$ sagt, daß, wenn ein Summationsverfahren die Axiome **1 2 3 4 5 6** befriedigt, die zugehörige Menge nicht über $\bar{M}$ hinausreicht. Dies ist aber gerade, was wir beweisen wollten. — Wir wissen jetzt, daß $\bar{S}$ das System **1 2 3 4 5 6 7** befriedigt. Ist es das einzige Summationsverfahren, welches dieses leistet?

7 sagt uns, daß *nur eine Menge zulässig ist*; da wir aus dem Vorhergehenden wissen, daß diese Menge $\bar{M}$ ist, folgt die Definition von $\bar{f}$ (der entsprechenden Funktion) ohne Zweideutigkeit aus **1 2 3 4 5 6** und α). Die Frage ist also zu bejahen und damit ist die Äquivalenz unseres Axiomensystems mit der gewöhnlichen Definition der konvergenten Folgen und der Grenze erwiesen.

§ 3.

Die Unabhängigkeit der Axiome.

Zunächst sehen wir, daß das System **1 2 3 4 5 6** nicht genügt, um daraus das der gewöhnlichen Konvergenz entsprechende Summationsverfahren $\bar{S}$ abzuleiten. Um dies zu zeigen, nehmen wir für M die Menge aller Folgen $\{k\} \equiv k, k, k, \dots, k, \dots$ und setzen $f\{k\} = k$. Das so gebildete Summationsverfahren erfüllt 7 nicht, obwohl es **1 2 3 4 5 6** erfüllt. Man kann ebenso leicht zeigen, daß keines der sechs ersten Axiome eine Folge der fünf übrigen ist.

Definieren wir die Menge M
als bestehend aus:

und die zugehörige Funktion,
wie folgt:

(α) allen Folgen der Form $\{k + \frac{1}{2^n}\}$,

$$f\left\{k + \frac{1}{2^n}\right\} = k,$$

(β) allen Folgen $\{a_n\}$,

$$f\{a_n\} = a_1,$$

(γ) der Folge $\{\frac{1}{2^n}\}$ mit ihren sämtlichen
Teilfolgen,

$$f = 0,$$

(δ) sämtlichen konvergenten Folgen,

$$f\{a_n\} = 2 \lim_{n=\infty} \{a_n\},$$

(ε) „ „ „

$$f\{a_n\} = -1 + \lim_{n=\infty} \{a_n\},$$

(ζ) „ „ „

$$f\{a_n\} = +1 + \lim_{n=\infty} \{a_n\}.$$

Wir haben damit sechs Summationsverfahren konstruiert und wir überlassen es dem Leser zu verifizieren, daß das Summationsverfahren

(α) dem System **2 3 4 5 6** genügt, ohne **1** zu genügen,

(β) „ „ **1 3 4 5 6** „ „ **2** „ „ „

(γ) „ „ **1 2 4 5 6** „ „ **3** „ „ „

(δ) „ „ **1 2 3 5 6** „ „ **4** „ „ „

(ε) „ „ **1 2 3 4 6** „ „ **5** „ „ „

(ζ) „ „ **1 2 3 4 5** „ „ **6** „ „ „

Gehen wir jetzt zum Axiom 7 über. Sein Inhalt variiert mit den vorhergehenden Axiomen, und man sollte eigentlich schreiben $7 = 7(123456)$, um dieses hervorzuheben. Man kann z. B. nicht a priori behaupten, daß, wenn $1234567(123456)$ erfüllt sind, auch das System $123457(12345)$ erfüllt sei (dieses wäre sogar in unserem Falle falsch). Die Schwierigkeiten, die damit verbunden sind, werden durch den folgenden Satz beseitigt:

Das Summationsverfahren $\bar{S}$ genügt keinem der Axiomsysteme I, II, III, IV, V, VI der beigefügten Tabelle

- I. 234567(23456)
- II. 134567(13456)
- III. 124567(12456)
- IV. 123567(12356)
- V. 123467(12346)
- VI. 123457(12345)

Und zwar:

$\bar{S}$ genügt nicht dem Systeme

I., weil man ein Summationsverfahren S^I herstellen kann, bei welchem die zugehörige Menge M^I aus $\bar{M}$ und aus allen Folgen $\{a_n\}$ besteht, die die Eigenschaft haben:

$$a_1 = a_2 < a_3 < a_4 < \dots,$$

wobei die a_n unbegrenzt wachsen; für diese Folgen definiert man $f^I\{a_n\} = a_1$, während für die $\{c_n\}$, die zu $\bar{M}$ gehören, $f^I\{c_n\} = \lim_{n=\infty} \{c_n\}$ festgesetzt wird. Man sieht, daß 23456 für S^I gelten, ohne daß M^I in $\bar{M}$ enthalten ist.

II., weil man ein Summationsverfahren S^{II} herstellen kann, dessen Menge M^{II} aus $\bar{M}$ besteht und außerdem aus allen solchen divergenten Folgen, die beschränkt sind und nur zwei endliche Teilgrenzen aufweisen; für die letzteren definiert man die zu S^{II} zugehörige Funktion f^{II} durch die Gleichung $f^{II}\{d_n\} = d_1$, für die zu $\bar{M}$ gehörenden Folgen $\{c_n\}$ wird dagegen wieder $f^{II}\{c_n\} = \lim_{n=\infty} \{c_n\}$ gesetzt; 13456 gelten für S^{II} , ohne daß M^{II} in $\bar{M}$ enthalten ist.

III., weil man ein Summationsverfahren S^{III} herstellen kann, wobei die Menge M^{III} aus $\bar{M}$ besteht und aus allen Folgen der Form $\{2^{n+1}\}$ — dabei ist $\{v_n\}$ eine beliebige Teilfolge von

$$\{n\} \equiv 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$$

Man hat zu setzen $f^{III}\{2^{n+1}\} = 0$ und $f^{III}\{c_n\} = \lim_{n=\infty} \{c_n\}$. Ähnliche Schlußfolgerungen wie oben.

IV., weil es ein Summationsverfahren S^{IV} gibt, wobei die Menge M^{IV}

aus $\bar{M}$ besteht und aus allen Folgen $\{a_n\}$, deren Glieder unbegrenzt wachsen und zwar so, daß

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots;$$

für diese Folgen setzt man dann: $f^{IV}\{a_n\} = 0$, während für die $\{c_n\}$ aus $\bar{M}$ die Definition $f^{IV}\{c_n\} = \lim_{n=\infty} \{c_n\}$ beibehalten wird. Analoge Schlußfolgerungen.

V., weil man ein Summationsverfahren S^V findet, dessen Menge M^V aus $\bar{M}$ besteht und aus allen Folgen von der Gestalt $\{k + 2^{v_n-1}\}$ — dabei ist v_n eine beliebige Teilfolge von $\{n\}$. Man definiert $f^V\{k + 2^{v_n-1}\} = k$ und $f^V\{c_n\} = \lim_{n=\infty} \{c_n\}$. Schlußfolgerungen wie oben.

VI., weil man ein Summationsverfahren S^{VI} findet, dessen Menge M^{VI} aus $\bar{M}$ besteht und aus allen Folgen von der Gestalt $\{k - 2^{v_n-1}\}$.*) Man definiert $f^{VI}\{k - 2^{v_n-1}\} = k$, $f^{VI}\{c_n\} = \lim_{n=\infty} \{c_n\}$. Schlußfolgerungen wie oben.

Diese sechs Beispiele zeigen, daß $\bar{S}$ keinem von den Systemen I, II, III, IV, V, VI genügt, sie zeigen aber noch mehr; nehmen wir z. B. das System I und streichen noch einige Axiome weg, etwa 2 3 4; dann bleibt das System 5 6 7(5 6) übrig; selbstverständlich genügt S^I den Axiomen 5 6, wir wissen aber, daß M^I nicht in $\bar{M}$ enthalten ist, daraus folgt also, daß $\bar{S}$ das System 5 6 7(5 6) nicht befriedigt. Dieselben Schlüsse kann man bei allen Systemen wiederholen und kommt dadurch zu dem Resultate, daß $\bar{S}$ keinem der Axiomsysteme genügt, die aus dem vollständigen Systeme durch Fortlassen von Axiomen bei Beibehaltung von 7 entstehen. Da aber $\bar{S}$ das einzige Summationsverfahren ist, welches dem vollständigen Systeme genügt, so folgt daraus, daß das vollständige System keine Folge der obengenannten Systeme sein kann. Das, was am Anfang dieses Kapitels gesagt wurde, zeigt andererseits, daß das vollständige System keine Folge derjenigen Systeme sein kann, die 7 nicht enthalten.***) *Damit ist aber die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome bewiesen.*

§ 4.

Ergänzende Bemerkungen.

Es bietet vielleicht einiges Interesse, zu wissen, ob die im vorigen Kapitel genannten Systeme I, II, ..., VI, überhaupt erfüllbar m. a. W. widerspruchsfrei sind.

*) $\{v_n\}$ hat dieselbe Bedeutung wie oben.

**) Dieses ließe sich auch ohne die Beispiele (α), (β), (γ), (δ), (ϵ), (ζ) aus $S^I, \dots, S^{VI}$ ableiten.

Die Antwort ist im Falle des Systems II und des Systems IV bejahend, in allen übrigen Fällen verneinend.

Vereinigen wir zu einer Menge M^{II} alle Folgen überhaupt und definieren $f^{\text{II}}\{a_n\} = a_1$, so erhalten wir dadurch ein Summationsverfahren S^{II} , welches allen Axiomen des Systems II entspricht.

Nehmen wir jetzt als Menge M^{IV} dieselbe Menge wie M^{II} und setzen für $f^{\text{IV}}\{a_n\}$ durchweg Null, so haben wir ein Summationsverfahren S^{IV} konstruiert, welches dem System IV genügt.

Nehmen wir an, es wäre möglich, das System I zu erfüllen, und es sei S^{I} das gesuchte Summationsverfahren mit seinen Bestandteilen M^{I} und f^{I} . S^{I} hat **234567(23456)** zu erfüllen. Sei Γ_1 die Menge aller beschränkten divergenten Folgen, die nur zwei Teilgrenzen haben, und sei φ_1 eine Funktion, die dem arithmetischen Mittel aus diesen zwei Teilgrenzen gleich ist. Γ_1 mit φ_1 definieren ein Summationsverfahren Π_1 , welches **23456** erfüllt. $\bar{S}$ erfüllt auch **23456**. S^{I} erfüllt aber **7(23456)**, daher muß M^{I} Γ_1 und $\bar{M}$ enthalten.*) Es gilt nun der leicht beweisbare *Hilfssatz*: „Wenn ein Summationsverfahren den Axiomen **23456** genügt und die zugehörige Menge die Menge $\bar{M}$ enthält, so ist die zugehörige Funktion gleich der gewöhnlichen Grenze für alle zu $\bar{M}$ gehörenden Folgen. Darnach ist $f^{\text{I}}\{1\} = 1$, $f^{\text{II}}\{2\} = 2$. Aber $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2}\right\}$ gehört zu Γ_1 , also a fortiori zu M^{I} und Axiom 2 gibt:

$$f^{\text{I}}\left\{\frac{3+(-1)^n}{2}\right\} = f^{\text{I}}\{1\} = 1 = f^{\text{I}}\{2\} = 2,$$

ein Widerspruch, der die Unmöglichkeit beweist, I zu erfüllen.

Ganz analog gestaltet sich der Beweis für die Unmöglichkeit, III zu erfüllen. Auch hier konstruiert man ein Summationsverfahren Π_{III} , welches **12456** befriedigt. Dabei ist Γ_{III} die Folge

$$\left\{1, 2, 1, 2\frac{1}{2}, 1, 2\frac{1}{4}, 1, 2\frac{1}{8}, \dots\right\}$$

mit ihren sämtlichen Teilfolgen und $\varphi_{\text{III}} = \frac{3}{2}$. Der Hilfssatz bleibt gültig, wenn man in seiner Aussage 3 durch 1 ersetzt, und man bekommt damit (in einer Bezeichnungsweise, die durch Analogie genügend erklärt ist) nach Axiom 2:

$$f^{\text{III}}\left\{1, 2, 1, 2\frac{1}{2}, 1, 2\frac{1}{4}, \dots\right\} = f^{\text{III}}\{1\} = 1 = f^{\text{III}}\left\{2 + \frac{1}{2^n}\right\} = 2,$$

den gesuchten Widerspruch.

*) Präzis sollte es heißen: M^{I} muß Γ_1 und $\bar{M}$ als *Untermengen* enthalten; es kommen aber nirgends Mengen als *Elemente* vor. *

Nehmen wir an, es existiere ein Summationsverfahren $\mathbf{S}^V$ mit der zugehörigen Menge M^V und der Funktion $\mathbf{f}^V$, welches $V \equiv 123467(12346)$ befriedigt. Definieren wir eine Menge Γ_V , die bestehen soll: aus allen konvergenten Folgen $\{\alpha_n\}$ mit der Eigenschaft $\alpha_n > \lim_{v=\infty} \{\alpha_v\}$ (für alle n), aus allen konvergenten Folgen $\{\beta_n\}$ mit der Eigenschaft $\beta_n < \lim_{v=\infty} \{\beta_v\}$, und schließlich aus allen divergenten Folgen $\{\delta_n\}$, die beschränkt sind und aus zwei konvergenten Teilfolgen, einer von der Kategorie $\{\alpha_n\}$ und einer von der Kategorie $\{\beta_n\}$ aufgebaut sind. Die zu Γ_V gehörende Funktion φ_V sei nun durch folgende Gleichungen erklärt:

$$\varphi_V\{\alpha_n\} = \lim_{n=\infty} \{\alpha_n\} - 1, \quad \varphi_V\{\beta_n\} = \lim_{n=\infty} \{\beta_n\}, \quad \varphi_V\{\delta_n\} = \lim_{n=\infty} \{\beta_n\}$$

($\{\beta_n\}$ bedeutet in der letzten Gleichung diejenige Folge der Kategorie $\{\beta_n\}$, die eine Teilfolge von $\{\delta_n\}$ ist). Damit haben wir ein Summationsverfahren hergestellt, das **12346** erfüllt. Aber $\bar{\mathbf{S}}$ tut es auch, infolgedessen muß $M^V \cap \Gamma_V$ und $\bar{M}$ enthalten. Die Folge $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ gehört zu Γ_V , und $\mathbf{f}^V\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ hat den bestimmten Wert k . Die Folge $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ gehört zu $\bar{M}$, und daher hat $\mathbf{f}^V\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ einen bestimmten Wert h . Nun ist die Folge $\left\{\frac{2n+1}{2n}\right\}$ eine Teilfolge von $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$, und die Anwendung der Axiome **12** gibt

$$\mathbf{f}^V\left\{\frac{2n+1}{2n}\right\} = h.$$

Die Axiome **34** geben ihrerseits:

$$\mathbf{f}^V\left\{\frac{4n+1}{2n}\right\} = \mathbf{f}^V\left\{1 + \frac{2n+1}{2n}\right\} = 1 + h.$$

Nun ist aber $\left\{\frac{4n+1}{2n}\right\}$ eine Teilfolge von $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$, und man hat (nach **12**)

$$\mathbf{f}^V\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \mathbf{f}^V\left\{\frac{4n+1}{2n}\right\} = 1 + h, \quad k = 1 + h.$$

Andererseits ist $\left\{\frac{2n-2}{2n-1}\right\}$ eine Teilfolge der beiden Folgen $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ und $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ zugleich, und man hat (nach **12**)

$$\mathbf{f}^V\left\{\frac{2n-2}{2n-1}\right\} = h = k,$$

also den Widerspruch

$$h = k.$$

Ebenso beweist man, daß **VI** nicht erfüllbar ist.

Was kann man aber über die Axiomsysteme sagen, die noch weniger Axiome enthalten (wie z. B. **23457(2345)**)? Man kommt durch ähnliche Überlegungen wie oben zu dem Satze, daß *alle Axiomsysteme, die 2, 4 und 7 zugleich enthalten, widerspruchsvoll sind; alle anderen sind widerspruchsfrei*. Nur das vollständige System bildet eine Ausnahme von dieser Regel.

Für die Betrachtungen des § 3 sind mir Bemerkungen des Herrn K. Jantzen von Nutzen gewesen, was ich nicht versäumen möchte, hier zu erwähnen.

München, 5. Juni 1910.