4. *Zur Elektronenbewegung in Metallen;* *von R. Gans.*

Die Erscheinungen der Wärme- und Elektrizitätsbewegung in Metallen sind von Riecke¹⁾, Drude²⁾ und Lorentz³⁾ behandelt worden. Wenn die prinzipielle Grundlage der drei Theorien auch nicht allzusehr voneinander abweicht, so sind die Resultate doch in so wesentlichen Punkten verschieden, daß jedenfalls nicht alle drei Theorien vollständig richtig sein können. Auch dort, wo formal von allen Forschern dieselbe Gesetzmäßigkeit gefunden worden ist, weicht die Bedeutung der Konstanten voneinander ab, so daß die Beziehungen der verschiedenen Erscheinungen zueinander nach den einzelnen Theorien ganz verschieden sind. So hängt z. B. die Hall-Konstante nach Riecke⁴⁾ von der spezifischen Verschiebungsgeschwindigkeit und der spezifischen Wanderungsgeschwindigkeit (Beweglichkeit) der positiven und negativen Elektronen ab, während nach Drude⁵⁾ der Temperaturkoeffizient der Konzentrationen und die Beweglichkeit in Frage kommt.

Der wesentliche Unterschied der Lorentzschen Theorie gegenüber den Theorien von Riecke und Drude ist der, daß nur negative frei bewegliche Elektronen angenommen werden, während die positiven fest an der Materie haften. Lorentz hat nämlich auf die Schwierigkeiten hingewiesen, die auftreten, sobald man annimmt, daß beide Elektronenarten frei beweglich sind. Der Vorzug der Lorentzschen Behandlungsweise besteht ferner in der Strenge der mathematischen Betrachtungen, vor allem in der Annahme des Maxwell'schen Ver-

1) E. Riecke, Wied. Ann. **66**. p. 353 u. p. 545. 1898.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. **1**. p. 566 u. **3**. p. 369. 1900.

3) H. A. Lorentz, Versl. Akad. v. Wetensch. zu Amsterdam **13**. p. 493. 1905.

4) l. c. p. 563 Formel (37).

5) l. c. p. 374 Formel (19).

teilungsgesetzes für die ungeordneten Geschwindigkeiten der Elektronen in einem homogenen Körper; es ergibt sich auf Grund kinetischer Überlegungen die Abweichung von diesem Verteilungsgesetz infolge der Einwirkung äußerer Umstände, wie Temperaturgefälle und Potentialgefälle.

Nicht behandelt ist jedoch von Lorentz eine ganze Gruppe von Erscheinungen, die bei Riecke und Drude eine wesentliche Rolle spielen, nämlich die Vorgänge, die durch ein äußeres Magnetfeld hervorgerufen werden. Hier liegt auch eine besondere Schwierigkeit der Lorentzschen Theorie, sich den tatsächlich beobachteten Vorgängen anzupassen, da infolge der alleinigen Beweglichkeit der negativen Elektronen nicht genug Konstante zur Verfügung stehen. Z. B. würde so das verschiedene Vorzeichen des Halleffektes nicht erklärt werden können. Hierauf hat schon Lorentz¹⁾ hingewiesen, aber gleichzeitig die Vermutung ausgesprochen, daß eine beschränkte Beweglichkeit der positiven Elektronen innerhalb des Metallmoleküles eventuell die Erscheinungen in gewünschter Weise erklären könnte. Sollte dies nicht der Fall sein, so bliebe nichts anderes übrig, als die neutrale Elektrizität, d. h. die Vereinigung eines positiven und eines negativen Elektrons, einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen.

Mir scheint es nun als Vorstudie notwendig, auf Grund der Lorentzschen Annahme die Bewegung *einer* Elektronenart unter dem Einfluß magnetischer Kräfte zu betrachten, um zu sehen, ob wenigstens in den Metallen die Erscheinungen dargestellt werden können, in denen der Halleffekt ein ganz bestimmtes — nämlich das negative — Vorzeichen hat — wie bei Wismut.

Es zeigt sich dabei, daß die äußeren Bedingungen wesentlicher in Betracht kommen als nach Riecke und Drude, nämlich ob die Vorgänge isotherm oder adiabatisch sind.

1. Die Abweichung vom Maxwell'schen Verteilungsgesetz.

Um den Elektronenstrom und den Wärmestrom in einer Platte, deren Ebene wir zur xy -Ebene machen und in deren

1) H. A. Lorentz, Ergebnisse und Probleme der Elektronentheorie p. 43 u. 47. Berlin 1905.

positiver Normalenrichtung (z -Achse) das konstante Magnetfeld $\mathfrak{H}$ sich befinde — x, y, z bilde in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem —, berechnen zu können, müssen wir ganz analoge Betrachtungen wie Lorentz¹⁾ anstellen.

Wir bezeichnen mit

$$f(\xi, \eta, \zeta) dS d\xi d\eta d\zeta = f \cdot dS \cdot d\lambda$$

die Anzahl negativer Elektronen im Volumelement dS , deren Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ zwischen den Werten ξ und $\xi + d\xi, \eta$ und $\eta + d\eta, \zeta$ und $\zeta + d\zeta$ liegen. Dann ist

$$(1) \quad N = \int f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda,$$

$$(2) \quad v_x = \int \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda,$$

$$(3) \quad v_y = \int \eta f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda,$$

$$(4) \quad W_x = \frac{1}{2} m \int \xi r^2 f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda,$$

$$(5) \quad W_y = \frac{1}{2} m \int \eta r^2 f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda.$$

Hier bedeutet N die Zahl negativer Elektronen in der Volumeinheit, v bez. W den Elektronen- bez. Wärmestrom in der Richtung, die durch den Index bezeichnet ist. $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ist das Quadrat der Geschwindigkeit, m die Masse eines Elektrons.

Sind X, Y, Z die Komponenten der Beschleunigung infolge der äußeren Kraft, so gilt²⁾ für stationäre Zustände

$$(6) \quad \begin{cases} n R^2 r \int \{f(\xi', \eta', \zeta') - f(\xi, \eta, \zeta)\} \cos \vartheta d\omega \\ = \frac{\partial f}{\partial \xi} X + \frac{\partial f}{\partial \eta} Y + \frac{\partial f}{\partial \zeta} Z + \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta. \end{cases}$$

Hier ist³⁾

$$(7) \quad n R^2 = \frac{1}{\pi l},$$

wo l die mittlere freie Weglänge eines Elektrons bedeutet.

1) H. A. Lorentz, Versl. Akad. v. Wetensch. zu Amsterdam 13. p. 493. 1905.

2) l. c. p. 498.

3) l. c. p. 500.

Ferner bedeutet ϑ den spitzen Winkel, den die Geschwindigkeit im Moment des Zusammenstoßes eines Elektrons mit einem Metallatom, welches als Kugel vom Radius R gedacht wird, und von denen n in der Volumeinheit vorhanden seien, mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte des Elektrons und des Metallatoms bilden. $d\omega$ ist der unendlich kleine räumliche Kegelwinkel, in dessen Innern die Mittelpunkte der gerade betrachteten gegen ein Atom stoßenden Elektronen liegen.

Ferner besteht die Beziehung¹⁾

$$(8) \quad \begin{cases} \xi' = \xi - 2r \cos \vartheta \cos f, \\ \eta' = \eta - 2r \cos \vartheta \cos g, \\ \zeta' = \zeta - 2r \cos \vartheta \cos h, \end{cases}$$

wo f, g, h die Winkel zwischen der Kegelachse $d\omega$ und den Koordinatenachsen sind.

In einem homogenen Metallstück, welches keinem äußeren Feld unterworfen ist, gelte das Maxwellsche Verteilungsgesetz²⁾

$$(9) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-h r^2},$$

wo

$$(10) \quad A = N \sqrt{\frac{h^3}{\pi^3}}$$

ist. Ferner ist das mittlere Geschwindigkeitsquadrat

$$(11) \quad \overline{r^2} = \frac{3}{2h}.$$

Setzt man dies der absoluten Temperatur T proportional, so wird

$$(12) \quad h = \frac{3m}{4\alpha T}.$$

Ist der Zustand im Metall variabel, so gilt das Maxwellsche Verteilungsgesetz nicht mehr, wir setzen

$$(13) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-h r^2} + \varphi(\xi, \eta, \zeta).$$

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 498.

2) l. c. p. 499.

Auf Grund dieser Gleichung wird die rechte Seite von (6)

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \left(-2hAX + \frac{\partial A}{\partial x} - r^2 A \frac{\partial h}{\partial x} \right) \xi e^{-hr^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} X + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} Y \\ \quad + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta \\ + \left(-2hAY + \frac{\partial A}{\partial y} - r^2 A \frac{\partial h}{\partial y} \right) \eta e^{-hr^2}, \end{array} \right.$$

denn das Problem ist nur von x und y abhängig, da in der z -Richtung keine Kräfte wirken sollen.

Nun zerlegen wir die Beschleunigungskomponenten X und Y in zwei Summanden entsprechend den elektrischen und magnetischen Kräften, so daß wir haben:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = X_1 + X_2, \quad X_1 = \frac{e}{m} \mathfrak{E}_x, \quad X_2 = \frac{e}{m} \mathfrak{H} \eta = \kappa \eta, \\ Y = Y_1 + Y_2, \quad Y_1 = \frac{e}{m} \mathfrak{E}_y, \quad Y_2 = -\frac{e}{m} \mathfrak{H} \xi = -\kappa \xi. \end{array} \right.$$

X_1 , Y_1 , $\partial T / \partial x$, $\partial T / \partial y$ seien unendlich klein, ihre höheren Potenzen, sowie $\partial^2 T / \partial x^2$ etc. werden vernachlässigt, da wir noch nie Erscheinungen beobachtet haben, die von diesen Gliedern herrühren. In den Klammern von (14) darf man statt X und Y schreiben X_1 bez. Y_1 , da $X_2 \xi + Y_2 \eta = 0$ ist. Die höheren Potenzen von $\mathfrak{H}$ oder κ wollen wir nicht vernachlässigen, da sie tatsächlich beobachtet sind; sie ergeben z. B. die Abhängigkeit der Hall-„Konstanten“ vom Magnetfeld.

Die außerhalb der Klammer in (14) stehenden Glieder lauten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} Y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta + \kappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi \right).$$

Wegen der oben angegebenen Vernachlässigungen kann man die ersten vier Terme dieses Ausdruckes als unendlich klein höherer Ordnung fortlassen, wie man noch einmal a posteriori, wenn φ gefunden ist, der Sicherheit halber beweisen kann; dann lautet (6)

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} n R^2 r \int \{ \varphi(\xi', \eta', \zeta) - \varphi(\xi, \eta, \zeta) \} \cos \vartheta d\omega \\ = \left(-2hAX_1 + \frac{\partial A}{\partial x} - r^2 A \frac{\partial h}{\partial x} \right) \xi e^{-hr^2} \\ \quad + \left(-2hAY_1 + \frac{\partial A}{\partial y} - r^2 A \frac{\partial h}{\partial y} \right) \eta e^{-hr^2} + \kappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi \right) \end{array} \right.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich φ . Um es zu finden, denken wir es uns nach Potenzen von κ entwickelt:

$$(17) \quad \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \kappa^{\nu} (F_{1\nu} \xi + F_{2\nu} \eta),$$

wo die $F_{1\nu}$ und $F_{2\nu}$ nicht mehr von ξ und η explizite, sondern nur noch von r abhängig sein sollen — es wird sich nachträglich zeigen, daß diese Annahme möglich ist. — Setzt man (17) in (16) ein, benutzt (7) und (8), und führt die Integration über $d\omega$ aus, so folgt

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{r}{l} \sum_{\nu=0}^{\infty} \kappa^{\nu} (F_{1\nu} \xi + F_{2\nu} \eta) &= \left(-2hA X_1 + \frac{\partial A}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - r^2 A \frac{\partial h}{\partial x} \right) \xi e^{-h r^2} \\ &+ \left(-2hA Y_1 + \frac{\partial A}{\partial y} - r^2 A \frac{\partial h}{\partial y} \right) \eta e^{-h r^2} \\ &+ \kappa \sum_{\nu=0}^{\infty} \kappa^{\nu} (F_{1\nu} \eta - F_{2\nu} \xi). \end{aligned} \right.$$

Vergleich der Potenzen von κ ergibt

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{10} &= \frac{l}{r} e^{-h r^2} \left(2hA X_1 - \frac{\partial A}{\partial x} + r^2 A \frac{\partial h}{\partial x} \right), \\ F_{20} &= \frac{l}{r} e^{-h r^2} \left(2hA Y_1 - \frac{\partial A}{\partial y} + r^2 A \frac{\partial h}{\partial y} \right); \\ F_{11} &= -\frac{l}{r} F_{20}, \quad F_{12} = \frac{l}{r} F_{21}, \\ F_{21} &= -\frac{l}{r} F_{10}, \quad F_{22} = -\frac{l}{r} F_{11} \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

Allgemein

$$F_{1\nu} = -\frac{l}{r} F_{2, \nu-1},$$

$$F_{2\nu} = -\frac{l}{r} F_{1, \nu-1},$$

woraus

$$F_{1\nu} = -\left(\frac{l}{r}\right)^{\nu} F_{1, \nu-2},$$

$$F_{2\nu} = -\left(\frac{l}{r}\right)^{\nu} F_{2, \nu-2}$$

folgt, so daß wir wegen (17) haben

$$\begin{aligned} \varphi = & \xi F_{10} \left\{ 1 - \left(\frac{\kappa l}{r} \right)^2 + \left(\frac{\kappa l}{r} \right)^4 - \dots \right\} \\ & + \frac{\kappa l}{r} F_{20} \xi \left\{ 1 - \left(\frac{\kappa l}{r} \right)^2 + \left(\frac{\kappa l}{r} \right)^4 - \dots \right\}, \\ & + \eta F_{20} \left\{ 1 - \left(\frac{\kappa l}{r} \right)^2 + \left(\frac{\kappa l}{r} \right)^4 - \dots \right\} \\ & - \frac{\kappa l}{r} F_{10} \eta \left\{ 1 - \left(\frac{\kappa l}{r} \right)^2 + \left(\frac{\kappa l}{r} \right)^4 - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden geometrischen Reihen lassen sich summieren, und wir erhalten

$$(20) \quad \varphi = \frac{F_{10} + \frac{\kappa l}{r} F_{20}}{1 + \frac{\kappa^2 l^2}{r^2}} \xi + \frac{F_{20} - \frac{\kappa l}{r} F_{10}}{1 + \frac{\kappa^2 l^2}{r^2}} \eta,$$

(20) ist ein Integral von (16) für alle Werte von κ , unabhängig von der Art der Entwicklung nach Potenzen von κ , die nur zum Auffinden der Lösung angewandt wurde. Daß die obigen geometrischen Reihen nur für $\kappa l/r < 1$ konvergieren, ist also für das Resultat völlig irrelevant.

Aus (20) ergibt sich das neue Verteilungsgesetz nach (13)

$$(21) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-h r^2} + \frac{F_{10} + \frac{\kappa l}{r} F_{20}}{1 + \frac{\kappa^2 l^2}{r^2}} \xi + \frac{F_{20} - \frac{\kappa l}{r} F_{10}}{1 + \frac{\kappa^2 l^2}{r^2}} \eta,$$

wo κ wegen (15) die Bedeutung hat

$$(22) \quad \kappa = \frac{e}{m} \zeta$$

und F_{10} bez. F_{20} sich aus (19) ergeben.

2. Der Elektronenstrom und der Wärmestrom.

Mit Hilfe von (21) lassen sich nun (2) bis (5) ausrechnen, und zwar werden bei der Integration über $d\lambda$ zur Berechnung von v_x der erste und dritte Term von (21) keine Beiträge liefern, da immer zu einem positiven Bestandteil ein gleich großer negativer vorhanden ist. v_y ergibt sich ohne weitere Rechnung aus v_x , indem man κ , F_{10} , F_{20} bez. durch $-\kappa$, F_{20} , F_{10} ersetzt.

Um in aller Strenge die Abhängigkeit der Vorgänge von der Stärke des Magnetfeldes $\mathfrak{H}$ zu bestimmen, und um es ganz deutlich zu machen, daß z. B. der Halleffekt keineswegs der ersten Potenz oder die Leitfähigkeitsveränderung der zweiten Potenz von $\mathfrak{H}$ proportional ist, wollen wir v_x und damit auch v_y für beliebig große Werte von $\mathfrak{H}$, d. h. für beliebig große Werte von κ berechnen. Dadurch ergibt sich, ob der Halleffekt und die Veränderung der Leitfähigkeit im Magnetfeld sich wenigstens bei Wismut und den sich ähnlich verhaltenden Körpern durch *eine* Elektronenart erklärt werden kann. Wir wollen aber zunächst die Annahme machen, daß im ganzen Metall die Temperatur T konstant ist, so daß in (19) die Differentialquotienten nach x und y verschwinden; das bedeutet: wir beschränken uns zunächst auf den isothermen Fall.

Experimentell würde man diese Bedingung um so besser verwirklichen, je mehr man für gute äußere Wärmeleitfähigkeit sorgt, so daß die Temperatureffekte nicht zustande kommen können.

Dann ist

$$(23) \quad \begin{cases} F_{10} = 2 h A X_1 l \frac{e^{-h r^2}}{r} = C_1 \frac{e^{-h r^2}}{r}, \\ F_{20} = 2 h A Y_1 l \frac{e^{-h r^2}}{r} = C_2 \frac{e^{-h r^2}}{r}, \end{cases}$$

also

$$(24) \quad v_x = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{C_1 + \frac{\pi l}{r} C_2}{1 + \frac{\kappa^2 l^2}{r^2}} r^3 e^{-h r^2} dr.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(25) \quad \kappa l = \gamma,$$

so folgt

$$(26) \quad \begin{cases} v_x = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dr e^{-h r^2} (C_1 r^3 + \gamma C_2 r^2 - \gamma^2 C_1 r - \gamma^3 C_2) \\ \quad + \frac{4\pi}{3} C_1 \gamma^4 \int_0^\infty \frac{r e^{-h r^2} dr}{r^2 + \gamma^2} + \frac{4\pi}{3} C_2 \gamma^5 \int_0^\infty \frac{e^{-h r^2}}{r^2 + \gamma^2} dr. \end{cases}$$

Auf die Auswertung dieser Quadraturen soll im Anhang eingegangen werden, um den Zusammenhang nicht zu stören.

Hier wollen wir nur das Endresultat derselben angeben.
Es wird

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \nu_x &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{C_1}{2h^2} + \frac{\gamma C_2 \sqrt{\pi}}{4\sqrt{h^3}} - \frac{\gamma^2 C_1}{2h} - \frac{\gamma^3 C_2 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{h}} \right) \\ &+ \frac{2\pi}{3} C_1 \gamma^4 e^{h\gamma^2} W(h\gamma^2) + \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{3} C_2 \gamma^4 e^{\gamma^2 h} \Theta(\gamma\sqrt{h}). \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet

$$\Theta(x) = \int_x^\infty e^{-x^2} dx$$

die Fehlerfunktion, für welche man Tabellen berechnet hat.¹⁾

Ferner ist

$$W(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$$

das Exponentialintegral, welches mit dem Integrallogarithmus in Beziehung steht, und für welches auch Tabellen²⁾ existieren. $\Theta(x)$ und $W(x)$ sind für alle endlichen Werte des Argumentes endlich. Für $x=0$ wird zwar $W(x)$ logarithmisch unendlich, aber in (27) kommt nur $\gamma^4 W(h\gamma^2)$ vor, welches für kleine Werte von γ (schwache Magnetfelder) Null wird wie $\lim_{x=0} x^4 \lg x$.

Aus (27) ergibt sich ν_y sofort durch Vertauschung von γ, C_1, C_2 mit bez. $-\gamma, C_2, C_1$; so daß wir haben

$$(28) \left\{ \begin{aligned} \nu_y &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{C_2}{2h^2} - \frac{\gamma C_1 \sqrt{\pi}}{4\sqrt{h^3}} - \frac{\gamma^2 C_2}{2h} + \frac{\gamma^3 C_1 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{h}} \right) \\ &+ \frac{2\pi}{3} C_2 \gamma^4 e^{h\gamma^2} W(h\gamma^2) + \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{3} C_1 \gamma^4 e^{\gamma^2 h} \Theta(-\gamma\sqrt{h}). \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. z. B. E. Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung* p. 569. Leipzig 1903.

2) Vgl. z. B. W. Láska, *Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik* p. 292. Braunschweig 1888 bis 1894.

3. Der Halleffekt und die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Stärke des Magnetfeldes.

Es ist

$$e C_1 = 2 h A l \frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_x = \frac{3 h^2}{2 \pi} \sigma_0 \mathfrak{E}_x,$$

$$e C_2 = \frac{3 h^2}{2 \pi} \sigma_0 \mathfrak{E}_y,$$

wo σ_0 die Leitfähigkeit außerhalb des Magnetfeldes bedeutet.

Um Bezeichnungen einzuführen, die mit denen der anderen Theorien besser übereinstimmen, definieren wir die mittlere Beweglichkeit oder spezifische Geschwindigkeit der Elektronen, d. h. die Geschwindigkeit des Elektrons, wenn die Kraft 1 wirkt. Nennen wir die Beweglichkeit v , so ist die mittlere Geschwindigkeit $v e \mathfrak{E}$, also die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit strömende Elektrizitätsmenge $N e^2 v \mathfrak{E} = \sigma_0 \mathfrak{E}$.

Nun ist aber¹⁾

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3 \pi}} \frac{l u}{\alpha T} N e^2,$$

also

$$(29) \quad v = \sqrt{\frac{2}{3 \pi}} \frac{l u}{\alpha T}.$$

Hier bedeutet nach Lorentz

$$u^2 = \frac{3}{2 h}.$$

Dann folgt, daß, da

$$\gamma = \kappa l = \frac{e \mathfrak{H}}{m} l$$

ist (vgl. (22) und (25) unter Benutzung von (12)),

$$(30) \quad \gamma \sqrt{h} = e \mathfrak{H} v \frac{3}{4} \sqrt{\pi} = w.$$

Somit haben wir

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} e v_x = j_x = \sigma \mathfrak{E}_x = \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_x (1 - w^2) + \frac{w \sqrt{\pi}}{2} \mathfrak{E}_y (1 - 2 w^2) \right\} \\ + \sigma_0 e^{w^2} w^4 \left\{ \mathfrak{E}_x W(w^2) + 2 \sqrt{\pi} \mathfrak{E}_y \Theta(w) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Sind die Ränder der Platte, welche diesem Strom parallel liegen, isoliert, so muß

$$(32) \quad v_y = 0$$

sein.

1) H. A. Lorentz, i. c. p. 503.

Aus (32) wird aber, unter Berücksichtigung von (28)

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_y [1 - w^2 + e^{w^2} w^4 W(w^2)] \\ = \left[\frac{w \sqrt{\pi}}{2} (1 - 2w^2) - 2 \sqrt{\pi} e^{w^2} w^4 \Theta(-w) \right] \frac{j_x}{\sigma}, \end{aligned} \right.$$

d. h. der Halleffekt ist

$$(34) \quad \mathfrak{E}_y = \frac{w \sqrt{\pi}}{2} \frac{1 - 2w^2 - 4e^{w^2} w^3 \Theta(-w)}{1 - w^2 + e^{w^2} w^4 W(w^2)} \frac{j_x}{\sigma},$$

während

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma_0} &= 1 - w^2 + e^{w^2} w^4 W(w^2) \\ + \frac{w^3 \pi}{4} [1 - 2w^2 + 4e^{w^2} w^3 \Theta(w)] &\frac{1 - 2w^2 - 4e^{w^2} w^3 \Theta(-w)}{1 - w^2 + e^{w^2} w^4 W(w^2)}. \end{aligned} \right.$$

Nennen wir die „Hallkonstante“ R , bei unendlich kleinen Magnetfeldern aber R_0 , so ist

$$(35') \quad R = R_0 \frac{1 - 2w^2 - 4e^{w^2} w^3 \Theta(-w)}{1 - w^2 + e^{w^2} w^4 W(w^2)} \frac{\sigma_0}{\sigma},$$

wo

$$(36) \quad w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_0 R_0 \mathfrak{H}$$

ist.

In der folgenden Tabelle sind für einige Werte von w , welches wegen (36) ebenso wie R_0 negativ ist, σ/σ_0 und R/R_0 angegeben.

$-w$	w^2	$W(w^2)$	e^{w^2}	$\Theta(-w)$	$\Theta(w)$	$\frac{1 - 2w^2 - 4e^{w^2} w^3 \Theta(-w)}{1 - w^2 + e^{w^2} w^4 W(w^2)}$	σ/σ_0	R/R_0
0,0	0,00	∞	1,000			1	1	1,0000
0,1	0,01	4,038	1,010	0,7865	0,9859	0,9927	0,9980	0,9947
0,2	0,04	2,681	1,041	0,6889	1,084	0,9775	0,9917	0,9857
0,3	0,09	1,919	1,094	0,5950	1,177	0,9604	0,9732	0,9869
0,4	0,16	1,409	1,174	0,5066	1,266	0,9433	0,9178	1,028
0,5	0,25	1,044	1,284	0,4249	1,347	0,9269	0,7674	1,208

Wie wir sehen werden, stimmen die Werte für σ/σ_0 und R/R_0 nicht annähernd mit den Beobachtungen überein. Es scheint also, als müsse man unbedingt zur Erklärung des Halleffektes und der Leitfähigkeitsveränderung durch ein Magnetfeld die positiven Elektronen oder die neutrale Elektrizität mit heranziehen.

Um nämlich die Größenordnung der w für die hier in Betracht kommenden Felder zu überschlagen, setzen wir die Leitfähigkeit des Bi, bei dem genaue Beobachtungen vorliegen, gleich der des Hg, also gleich 10^{-5} im elektromagnetischen Maßsystem. Ferner ist $R_0 = -10$ annähernd; daraus folgt, daß für $\xi = 1000 - w$ von der Größenordnung 0,1 und für $\xi = 5000 - w = 0,5$ ist.

In diesem Intervall verhält sich aber R/R_0 ganz anders als die Tabelle angibt.

4. Genäherte Theorie für kleine Magnetfelder.

Im folgenden wollen wir uns auf kleine Magnetfelder beschränken, so daß höchstens noch die zweiten Potenzen derselben berücksichtigt werden, nicht weil sonst die Formeln schwer anzuwenden sind, da W und Θ ja tabellarisch bekannt sind, aber die Übersichtlichkeit würde doch leiden. Dafür soll aber jetzt nicht mehr der spezielle Fall angenommen werden, daß T im ganzen Metall konstant ist. Dann ergibt sich aus (2) bis (5) unter Benutzung von (21):

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} v_x &= \frac{2\pi l A}{3 h^2} \left[2 h X_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial x} + 2 \frac{\partial \lg h}{\partial x} \right] \\ &\quad - \kappa^2 l^2 h \frac{2\pi l A}{3 h^2} \left[2 h X_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial x} + \frac{\partial \lg h}{\partial x} \right] \\ &\quad + \sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}} \frac{\kappa l^2}{3} A \left[2 h Y_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial y} + \frac{3}{2} \frac{\partial \lg h}{\partial y} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(37') \quad \left\{ \begin{aligned} v_y &= \frac{2\pi l A}{3 h^2} \left[2 h Y_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial y} + 2 \frac{\partial \lg h}{\partial y} \right] \\ &\quad - \kappa^2 l^2 h \frac{2\pi l A}{3 h^2} \left[2 h Y_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial y} + \frac{\partial \lg h}{\partial y} \right] \\ &\quad - \sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}} \frac{\kappa l^2}{3} A \left[2 h X_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{\partial \lg h}{\partial x} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} W_x &= \frac{2\pi m l A}{3 h^3} \left[2 h X_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial x} + 3 \frac{\partial \lg h}{\partial x} \right] \\ &\quad - \kappa^2 l^2 h \frac{m \pi l A}{3 h^3} \left[2 h X_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial x} + 2 \frac{\partial \lg h}{\partial x} \right] \\ &\quad + \frac{m \kappa l^2}{4} A \sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}} \left[2 h Y_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial y} + \frac{5}{2} \frac{\partial \lg h}{\partial y} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(38') \quad \left\{ \begin{aligned} W_y &= \frac{2\pi m l A}{3 h^3} \left[2 h Y_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial y} + 3 \frac{\partial \lg h}{\partial y} \right] \\ &- \kappa^2 l^2 h \frac{m \pi l A}{3 h^3} \left[2 h Y_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial y} + 2 \frac{\partial \lg h}{\partial y} \right] \\ &- \frac{m k l^2 A}{4} \sqrt{\frac{\pi^3}{h^5}} \left[2 h X_1 - \frac{\partial \lg A}{\partial x} + \frac{5}{2} \frac{\partial \lg h}{\partial x} \right]. \end{aligned} \right.$$

Aus den Gleichungen (37) bis (38') lassen sich alle thermomagnetischen und galvanomagnetischen Effekte ableiten.

a) Isotherme Vorgänge.

Die Differentialquotienten nach x und y sind Null. Die Gleichungen (31) und (32) ergeben aus (37) und (37') die Veränderung der Leitfähigkeit durch ein Magnetfeld und den Halleffekt.

Aus (32) folgt

$$(39) \quad \mathfrak{E}_y = \frac{1}{2} \sqrt{\pi h} \kappa l \mathfrak{E}_x.$$

Führen wir in (39) die Bezeichnungsweise aus (30) ein, so erhalten wir

$$(39') \quad \mathfrak{E}_y = \frac{3\pi}{8} \frac{ev}{\sigma} \mathfrak{S} j.$$

Diese Formel ergibt sich auch aus (34) für $\lim w = 0$.

Da e negativ ist, kann also nur der Halleffekt in den Metallen erklärt werden, in denen er die Richtung wie beim Wismut hat.

Durch Kombination von (37) und (37') ergibt sich die Änderung der Leitfähigkeit mit dem Magnetfeld. Wir finden

$$(40) \quad \frac{4\pi l A e}{3 h} X_1 \left\{ 1 - \kappa^2 l^2 h \frac{4 - \pi}{4} \right\} = j.$$

Also ist

$$(40') \quad \frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = - \kappa^2 l^2 h \frac{4 - \pi}{4} = - 0,21 w^2$$

oder, indem wir wieder die Beweglichkeit einführen,

$$(41) \quad \frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = - \frac{9\pi}{64} (4 - \pi) e^2 v^2 \mathfrak{S}^2.$$

Auch diese Formel ergibt sich für kleine w in erster Näherung aus (35).

b) Adiabatische Vorgänge.

Ganz anders werden die Werte der in Frage kommenden Konstanten, wenn die Vorgänge adiabatisch vor sich gehen, d. h. wenn die transversale Temperaturdifferenz sich voll ausbilden kann. Wir können dafür sorgen, daß kein longitudinales Temperaturgefälle vorhanden ist.

In die Gleichungen (37) bis (38') führen wir eine Bezeichnungsweise ein, die es ermöglicht, die erhaltenen Ausdrücke mit denen anderer Theorien zu vergleichen; A drücken wir mit Hilfe von (10) durch N , h mit Hilfe von (12) durch T aus; ferner setzen wir zur Abkürzung

$$(42) \quad 2 T \frac{d \lg N}{d T} = b.$$

b muß man sich als gegeben vorstellen, die Größe hängt von der Änderung der Dissoziation mit der Temperatur ab. (42) ist ein Ausdruck, der auch in der Drudeschen Theorie eine wesentliche Rolle spielt.

Es wird

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} j_x &= \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_x - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial x} (b+1) \right\} - w^2 \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_x - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial x} (b-1) \right\} \\ &\quad + \frac{w}{2} \sigma_0 \sqrt{\pi} \left\{ \mathfrak{E}_y - \frac{\alpha}{3e} b \frac{\partial T}{\partial y} \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(43') \quad \left\{ \begin{aligned} j_y &= \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_y - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial y} (b+1) \right\} - w^2 \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_y - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial y} (b-1) \right\} \\ &\quad - \frac{w}{2} \sigma_0 \sqrt{\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x - \frac{\alpha}{3e} b \frac{\partial T}{\partial x} \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} W_x &= \frac{4\alpha T}{3e} \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_x - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial x} (b+3) \right\} \\ &\quad - \frac{w^2}{2} \frac{4\alpha T}{3e} \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_x - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial x} (b+1) \right\} \\ &\quad + \frac{3}{4} \cdot \frac{4\alpha T}{3e} \frac{w \sigma_0}{2} \sqrt{\pi} \left\{ \mathfrak{E}_y - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial y} (b+2) \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(44') \quad \left\{ \begin{aligned} W_y &= \frac{4\alpha T}{3e} \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_y - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial y} (b+3) \right\} \\ &\quad - \frac{w^2}{2} \frac{4\alpha T}{3e} \sigma_0 \left\{ \mathfrak{E}_y - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial y} (b+1) \right\} \\ &\quad - \frac{3}{4} \cdot \frac{4\alpha T}{3e} \frac{w \sigma_0}{2} \sqrt{\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x - \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial x} (b+2) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir, entsprechend der Annahme, daß kein longitudinales Temperaturgefälle vorhanden ist, $\partial/\partial x = 0$, so ergibt sich aus $j_y = 0$ und $W_y = 0$ der adiabatische Halleffekt und das transversale Temperaturgefälle. Es ist

$$(43'') \quad \mathfrak{E}_y - \frac{\alpha}{3e} (b+1) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{w}{2} \sqrt{\pi} \mathfrak{E}_x.$$

$$(44'') \quad \mathfrak{E}_y - \frac{\alpha}{3e} (b+3) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{3}{4} \cdot \frac{w}{2} \sqrt{\pi} \mathfrak{E}_x.$$

Hieraus folgt

$$(45) \quad \frac{2\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{w}{8} \sqrt{\pi} \mathfrak{E}_x$$

oder

$$(45') \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{9\pi}{64\alpha} \frac{e^2 v}{\sigma} \mathfrak{H} j_x.$$

Dieser Effekt stimmt weder mit den Theorien von Drude und Riecke noch mit der Beobachtung im Vorzeichen überein; denn es hat sich gezeigt, daß $\partial T/\partial y$ tatsächlich immer negativ ist.

Ferner folgt

$$(46) \quad \mathfrak{E}_y = \frac{w}{4} \sqrt{\pi} \frac{b+9}{4} \mathfrak{E}_x$$

oder

$$(46') \quad \mathfrak{E}_y = \frac{3\pi}{16} \frac{b+9}{4} \frac{ev}{\sigma} \mathfrak{H} j,$$

d. h. die adiabatische Hallkonstante verhält sich zur isothermen wie $(b+9):8$.

Setzt man (45) und (46) in (43) ein, so ergibt sich die adiabatische Leitfähigkeitsänderung durch ein Magnetfeld. Man findet

$$(47) \quad \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = -w^2 \frac{32-9\pi}{32} = -0,12 w^2,$$

während durch (40') die isotherme Leitfähigkeitsänderung ausgedrückt ist. Hierbei ist in (47) sowohl, wie in (40') vorausgesetzt, daß kein longitudinales Temperaturgefälle vorhanden ist. Es ist bei Messungen darauf zu achten, daß diese Bedingung erfüllt wird, da sonst eine Abweichung von den einfachen Gesetzmäßigkeiten eintreten kann. Aus (40') und (47) folgt, wie sehr man nach dieser Theorie auf die äußeren Bedingungen bei Benutzung der Bi-Spirale zu achten hat.

Wir beschränken uns auf die Ableitung obiger Effekte; man sieht, wie in leichter Weise aus (43) bis (44') alle anderen Effekte, sowohl die transversalen wie die longitudinalen be-

rechnet werden können. Was wir aus dem Vorhergehenden hauptsächlich erkennen, ist jedoch folgendes:

Daß *eine* bewegliche Elektronengattung nicht alle beobachteten Tatsachen beschreiben kann, ist evident. Das beweist schon das verschiedene Vorzeichen des Halleffekts in verschiedenen Metallen. Aus den oben gegebenen Ableitungen folgt aber, daß auch bei den Metallen mit negativem Halleffekt, wie Wismut z. B., nicht annähernd die Beobachtungen durch das Verhalten der negativen Elektronen beschrieben werden.

Zwar haben wir auf Grund der strengen Rechnung gezeigt, daß sowohl der Halleffekt wie die Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Magnetfeld in komplizierter Weise von der magnetischen Feldstärke abhängen, wie die Beobachtungen (s. u.) auch zeigen, jedoch stimmt der Verlauf nur qualitativ. Das transversale Temperaturgefälle hat das falsche Vorzeichen, es kann also auf keinen Fall sich den Beobachtungen anschließen.

Aber ich glaube, daß die obigen Rechnungen eine unbedingt nötige Vorarbeit sind, um eine Theorie zu gewinnen, die alle Erscheinungen darstellt; denn man scheint vor allen Dingen darin dem Beispiele Lorentz' folgen zu müssen, daß man im homogenen Metall das Maxwellsche Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten annimmt. Schon Drude wies darauf hin, daß dies richtiger sein würde, er hat absichtlich — der Einfachheit halber — eine gleichmäßige Geschwindigkeit angenommen. Im allgemeinen zeigt sich ja auch in der kinetischen Gastheorie, daß die Zahlenfaktoren ein wenig verändert werden, sonst aber in allen wesentlichen Punkten die Resultate durch die Annahme des Maxwellschen Verteilungsgesetzes nicht modifiziert werden. Bei den hier untersuchten Fragen liegt die Sache jedoch etwas anders: Nach Drude erhält man die Strömung j , indem man den Kernfluß ν mit der Elektrizitätsmenge e multipliziert, und den Wärmestrom W , indem man den Kernfluß ν mit der auf jedem Elektron befindlichen Wärmemenge αT multipliziert, d. h. j und W sind einander auf jeden Fall proportional und verschwinden gleichzeitig, während (43) und (44) zeigen, daß dies bei der Einführung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes nicht der Fall ist; der Grund des Unterschiedes ergibt sich aus der Betrachtung von (2) und (4).

Noch ein weiterer Unterscheid der Lorentzschen und Drudeschen Auffassung besteht darin, daß Drude N als Funktion von T und damit umgekehrt T als Funktion von N auffaßt, d. h. die Temperatur als durch die inneren Vorgänge gegeben betrachtet, während nach Lorentz die Temperatur äußerer Parameter ist, der auf jeden Fall beliebig gegeben werden kann, wenn nicht an Stelle dieses frei verfügbaren Parameters eine andere äquivalente Bedingung vorgeschrieben ist, wie z. B. daß in transversaler Richtung die Vorgänge adiabatisch sind.

Bei der Behandlung der isothermen Erscheinungen, wie z. B. bei dem oben berechneten isothermen Halleffekt, kommt nur die Beweglichkeit vor, während bei den adiabatischen Vorgängen auch die Größe b eine Rolle spielt, die bei Drude so wesentlich ist. Bei den Versuchen über die elektromagnetisch-thermischen Erscheinungen in Metallen wird man sein Hauptaugenmerk darauf richten müssen, zu sehen, ob die äußeren Bedingungen — isothermer oder adiabatischer Fall — eine wesentliche Rolle spielen. Es ist möglich, daß die Differenzen der verschiedenen Beobachter zum Teil hierauf zurückzuführen sind.

5. Der Halleffekt galvanometrisch und elektrometrisch gemessen.

Formel (34) bez. (39') geben die elektrische Feldstärke $\mathcal{E}_y$ an, die im Metall vorhanden sein muß, damit kein Strom in der y -Richtung fließt. Diese Feldstärke stellt sich von selbst her, wenn die Ränder der Platte isoliert sind; verbindet man dagegen die beiden Ränder der Platte durch einen Leitungsdraht, so muß man in diesen eine elektromotorische Kraft einschalten, um keinen Strom zu bekommen, der $\mathcal{E}_y$ entspricht. Nach dieser Theorie wird also kein Unterschied vorhanden sein, ob der Halleffekt galvanometrisch oder elektrometrisch gemessen wird. Es kommt aber sehr wohl darauf an, ob die Messung isotherm oder adiabatisch verläuft.

Nach der Drudeschen Theorie werden die in der x -Richtung sich bewegenden Elektronen infolge des Magnetfeldes seitlich abgedrängt, denn es wirkt auf sie eine Kraft $e[\mathfrak{H} v_x]$, wo v_x die Geschwindigkeitskomponente in der x -Richtung bedeutet. Diese Kraft wird kompensiert, erstens durch die in-

folge der Abdrängung entstehende transversale elektrische Kraft und zweitens durch die Diffusionskraft oder osmotische Kraft, die infolge des Konzentrationsgefälles $\partial N/\partial y$ auftritt. Es wäre also hier sehr wohl ein Unterschied zwischen der galvanometrisch und der elektrometrisch gemessenen Hallkonstante möglich. Bei der elektrometrisch gemessenen Hallkonstante muß nach Drude nämlich auf jeden Fall von einem zum anderen Rande ein Konzentrationsgefälle auftreten; mißt man dagegen galvanometrisch, so ist gar kein Rand im eigentlichen Sinne vorhanden, die Elektronen können in geschlossenen Bahnen im Transversalkreis wandern, die osmotische Kraft fällt fort, und zwar gleichgültig, ob im Transversalkreis die Hallkraft kompensiert wird oder nicht, denn nirgends wird ein $\partial N/\partial y$ entstehen. Anders ausgedrückt: Elektrometrisch gemessen ist die Hallkraft anders, da noch eine kompensierende Kraft proportional $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{dN}{dT} \frac{\partial T}{\partial y}$ auftritt; es wird sich nach der Drudeschen Auffassung notwendig das transversale Temperaturgefälle bilden müssen; dagegen liegt bei der galvanometrisch gemessenen Hallkraft gar kein Grund zur Stauung der Elektronen vor, da überhaupt keine seitliche Bewegung bei Kompensation auftritt, und ohne Kompensation ein Abfließen in geschlossenen Bahnen möglich ist; hier wird der Vorgang also isotherm vor sich gehen. Nach Lorentz dagegen ist das äußere Temperaturgefälle in transversaler Richtung *äußerer* Parameter, über den willkürlich durch die äußeren Bedingungen zu verfügen ist, gleichgültig, welches Meßverfahren vorliegt.

Um mir nun einen Überblick darüber zu verschaffen, wie groß die Diffusionskraft gegenüber den anderen in Betracht kommenden Kräften ist, habe ich bereits vor zwei Jahren, als die Lorentzsche Theorie noch gar nicht vorlag, sondern nur die Drudesche und die Rieckesche Theorie existierte, Messungen darüber gemacht, ob ein Unterschied der Hallkraft zu konstatieren wäre, je nachdem man galvanometrisch oder elektrometrisch mißt. Diese Messungen sollten mir damals zur Grundlage einer Verbesserung der Theorie dienen, da ja offenbar verschiedene Schwierigkeiten, besonders im Verhalten der neutralen Elektrizität vorhanden waren, und da nach

Riecke und Drude die Bedeutung der auftretenden Konstanten ganz verschieden war.

Auf Grund obiger Theorie werden die Messungen über die Größenordnung von $b = 2T(d \lg N/dT)$ entscheiden können. Deshalb, und weil die Frage vielleicht bei weiterer Ausarbeitung der Theorie von Bedeutung sein kann, möchte ich die Messungsergebnisse jetzt der Öffentlichkeit übergeben. Bei Wiederholung der Messungen müßte mehr darauf geachtet werden, daß die nach Lorentz in Betracht kommenden äußeren Bedingungen (isothermer oder adiabatischer Fall) genau erfüllt sind.

Wir fanden

$$(39) \quad \mathfrak{E}_y = R j \mathfrak{S}.$$

Führen wir die Potentialdifferenz Φ der beiden seitlichen Ränder, die den Abstand b voneinander haben, ein, so ist $\Phi = \mathfrak{E}_y b$. Ferner ersetzen wir die Stromdichte j durch die Stromstärke i ; es ist $j = i/q$, wo $q = b\delta$ und δ die Dicke der Platte, also haben wir

$$(48) \quad \Phi = \frac{R}{\delta} i \mathfrak{S}.$$

Ich benutzte einen Elektromagneten mit Polschuhen aus weichem Eisen mit kreisförmiger Stirnfläche, deren Durchmesser 3 cm betrug. Der Schlitz zwischen den beiden Stirnflächen betrug nur 2 mm, so daß das Feld in den mittleren Teilen vollkommen gleichförmig war. Gemessen wurde das Magnetfeld mit einer Wismutspirale, die von Hartmann & Braun geeicht war.

Das Wismut, welches von Merck in Darmstadt bezogen war, wurde flüssig auf eine Glasplatte gegossen, deren Dicke 1,288 mm war; die Glasplatte war vorher erwärmt, und das Wismut legte sich sehr gut an das Glas an, so daß die untere Fläche des Wismuts vollkommen spiegelnd war. Die obere Fläche wurde zunächst gefeilt und dann mit immer feinerem Schmirgelleinen abgeschliffen. Die letzten Unebenheiten wurden durch Messung mit einem Sphärometer konstatiert und durch Schleifen beseitigt. Die Dicke der Platte betrug schließlich in den mittleren Partien, die bei der Messung des Halleffektes in Betracht kamen, 0,376 mm. Sodann erhielt die Platte die Gestalt eines Kreuzes, indem ich mit einem Messer entsprechend

Fig. 1 das Wismut wegkratzte. Die Mitte der Platte war also ein Rechteck, dessen Dimensionen 5×11 mm betrug. Das Verhältnis von Länge und Breite war so groß gewählt, damit der Hallstrom sich nicht zum Teil durch die Primär-

Fig. 1.

elektroden ausgleichen konnte.¹⁾ Mit einem sehr leicht flüssigen Lot wurden die Zuleitungsdrähte für den Primärstrom wie für den Sekundärstrom angelötet, und zwar wurden die Drähte zunächst an rechteckige Kupferplättchen gelötet (in der Figur schraffiert gezeichnet), und diese erst auf das Wismut gelötet. So wurde wegen der großen Leitfähigkeit des Kupfers gegenüber dem Wismut fast senk-

rechter Austritt der Stromlinien garantiert, die dann in dem mittleren Teil der Platte einander parallel verlaufen mußten. Die Hallelektromotorische Kraft im Sekundärkreis wurde nach dem du Bois-Reymond'schen Kompensationsverfahren gemessen mit Hilfe eines Stöpselrheostaten und eines Akkumulators, dessen Spannung genau bestimmt war. Als Nullinstrument diente ein von Hrn. Prof. Paschen konstruiertes Spiegelgalvanometer, welches durch den Magneten durchaus nicht gestört war, da es sich in einem Kasten aus weichem Eisen befand, und der ziemlich weit entfernte Elektromagnet so aufgestellt war, daß seine Kraftlinien in Vertikalebene verliefen. Die Messungsergebnisse sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Dicke der Platte $\delta = 0,376$ mm.

i	Φ	Φ	$-R$	i	Φ	Φ	$-R$
Amp.	C.G.S.	Millivolt	C.G.S.	Amp.	C.G.S.	Millivolt	C.G.S.
0,796	5250	1,215	10,93	0,716	6350	1,27	10,50
0,787	6610	1,452	10,49	0,716	7420	1,45	10,26
0,782	7730	1,657	10,31	0,715	8100	1,55	10,06
0,781	8520	1,774	10,08	0,715	10490	1,91	9,57
0,781	11030	2,161	9,43	0,715	12700	2,21	9,15

1) A. v. Ettinghausen u. W. Nernst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 94 II. p. 764. 1887.

i Amp.	Φ C.G.S.	Φ Millivolt	$-R$ C.G.S.	i Amp.	Φ C.G.S.	Φ Millivolt	$-R$ C.G.S.
0,715	6280	1,27	10,63	0,877	6310	1,56	10,60
0,715	7390	1,45	10,32	0,875	7450	1,79	10,33
0,715	8150	1,56	10,06	0,880	8260	1,94	10,03
0,715	10490	1,89	9,48	0,877	6390	1,57	10,53
0,715	12660	2,19	9,10	0,875	7530	1,80	10,27
				0,874	8260	1,94	10,10

Fig. 2.

In dem Diagramm ist $-R$ in absolutem elektromagnetischen Maß als Funktion von Φ aufgetragen und durch die beobachteten Punkte eine Kurve gezeichnet.

Durch besondere Messungen überzeugte ich mich von der Proportionalität von Φ mit der Primärstromstärke, da bei den weiter unten beschriebenen elektrometrischen Messungen größere Stromstärken nötig waren. Es zeigte sich, daß bei Messungen mit 3—4 Amp. die Hallkonstante ihrem absoluten Wert nach ungefähr 1 Proz. kleiner ausfiel, wahrscheinlich infolge der durch die Joulesche Wärme hervorgerufenen

höheren Temperatur. Nach Zahn ist der Temperaturkoeffizient tatsächlich negativ.¹⁾

Daß der Hallstrom, wenn er nicht kompensiert war, genau dem Werte der elektromotorischen Kraft bei Kompensation entsprach, war zu erwarten; Messungen bestätigten diese Erwartung.

Um sicher zu sein, daß an keiner Stelle des Plattenrandes eine Stauung von Elektronen auftreten könne, durch welche ein Resultat erzielt wurde, welches sich mehr dem elektrometrischen Halleffekt näherte, wurde folgender Versuch gemacht.

Durch die Zuleitung I (vgl. Fig. 3) einer rechteckigen Platte tritt der Primärstrom ein, bei Erregung des Magnetfeldes wird im Sekundärkreis II der Hallstrom mittels eines Galvanometers von $70\ \Omega$ Widerstand wahrgenommen. Es waren an den Rändern noch weitere Elektroden A, A' und B, B' angelötet. Wurden diese Elektroden durch die Stromkreise III bez. IV, in denen auch je $70\ \Omega$ Widerstand lag, miteinander verbunden, so trat keine Änderung der Stromstärke in II ein. Hieraus kann man schließen, daß sich in A, A', B, B' am Rande keine Elektronen gestaut haben können, die das Resultat modifizierten,

Fig. 3.

da durch das Schließen von III und IV die Stauung hätte verhindert werden müssen.

Zur elektrometrischen Messung des Halleffektes diente ein nach den Angaben von Hrn. Prof. Paschen in der Werkstätte des Tübinger physikalischen Institutes konstruiertes Quadrantenelektrometer (noch nicht beschrieben) von sehr großer Empfindlichkeit. Je sorgfältiger die Justierung vorgenommen wurde, die ich nach dem Schema von Hallwachs²⁾ ausführte, zu um so höheren Potentialen konnte man die Nadel laden, ohne daß das Elektrometer aufhörte exakt zu arbeiten, d. h. gleiche Ausschläge nach rechts und links zu zeigen und zwar Ausschläge, die den an die Quadranten gelegten Potentialdifferenzen proportional waren. Um nicht während der längeren Zeit, in

1) Vgl. H. Zahn, Ann. d. Phys. 14. p. 886. 1904.

2) W. Hallwachs, Wied. Ann. 29. p. 1. 1886.

der ich das Instrument benutzte, häufiger wieder Justierungen vornehmen zu müssen, da kleine Änderungen in der Gleichgewichtslage der Nadel natürlich nicht ganz unvermeidlich sind, beschränkte ich mich auf 20 Volt Nadelladung, während 40 Volt Nadelladung noch leicht hätten angewandt werden können. Es kam nur die sogenannte Quadrantschaltung in Betracht.

Das Elektrometer wurde vor und nach jeder Messungsreihe geeicht, indem von der Gesamtspannung eines Akkumulators von genau gemessener elektromotorischer Kraft ein Bruchteil abgezweigt und an die Quadranten angelegt wurde. Gemessen wurde mit Fernrohr und Skala die Änderung des Ausschlages, wenn die an den Quadranten liegende Spannung kommutiert wurde. Folgende beiden Tabellen geben für zwei zu verschiedenen Zeiten angestellte Messungsreihen die an den Quadranten liegenden Spannungen in Volt (erste Kolumne) und die beim Kommutieren derselben erfolgten Ausschläge (zweite Kolumne). Aus ihnen ergibt sich die große Empfindlichkeit des Instrumentes und die Proportionalität seiner Angaben.

Volt	ST	Volt	ST
$8,05 \cdot 10^{-3}$	65,4	$8,05 \cdot 10^{-3}$	66,4
$12,05 \cdot 10^{-3}$	99,0	$12,05 \cdot 10^{-3}$	97,5
$16,03 \cdot 10^{-3}$	131,0	$16,03 \cdot 10^{-3}$	130,1
$1^{ST} = 1,224 \cdot 10^{-4}$ Volt.		$1^{ST} = 1,227$ Volt.	

In folgenden beiden Meßreihen bedeuten die Zahlen in der ST überschriebenen Kolumne die Ausschläge beim Kummütieren der Hallkraft. Mit Hilfe der soeben angegebenen Empfindlichkeit berechnet sich daraus die Hallkraft Φ in Millivolt.

i Amp.	$\S$ C.G.S.	ST	Φ in Millivolt	$-R$ C.G.S.
5,04	6350	71,4	8,74	10,27
5,01	7440	82,7	10,1	10,21
4,99	8220	87,2	10,7	9,81
5,00	10590	107,5	13,2	9,34
5,00	12730	121,5	14,9	8,80

i Amp.	Φ C.G.S.	ST	Φ in Millivolt	$-R$ C.G.S.
5,01	6360	71,7	8,80	10,38
4,98	7430	81,5	10,0	10,16
4,97	8165	86,4	10,6	9,82
4,96	10600	106,4	13,1	9,34
4,97	12740	119,7	14,7	8,74

Die Messungsergebnisse sind auch graphisch in dem Diagramm Fig. 2 dargestellt.

Wie wir aus diesem Diagramm sehen, ist die elektrometrisch gemessene Hallkonstante immer etwas kleiner als die galvanometrisch gemessene. Jedoch möchte ich auf diese Differenz nicht allzu großen Wert legen, dem wegen des für eine Elektrometermessung sehr kleinen Effektes sind die elektrometrischen Resultate etwas unsicherer als die galvanometrisch gemessenen. Ferner mußte man zu den elektrometrischen Messungen einen Primärstrom von ca. 5 Amp. anwenden, während bei den galvanometrischen Messungen 0,7—0,9 Amp. genühten. Durch die stärkeren Ströme entstand nun infolge der Jouleschen Wärme eine Temperaturerhöhung, die eventuell zu der Differenz beigetragen haben kann. Diese Vermutung ist um so wahrscheinlicher, als auch beim galvanometrischen Halleffekt bei 3—4 Amp. Stromstärke eine um ca. 1 Proz. kleinere Hallkonstante sich ergab.

Jedenfalls sieht man, daß der Unterschied, wenn überhaupt vorhanden, nur sehr gering ist, daß also im Sinne der Drudeschen Theorie $d \lg N / d T$ oder der Temperaturkoeffizient der Dissoziation beim Wismut nur sehr klein sein kann.

6. Die Leitfähigkeit des Wismuts bei Gleich- und Wechselstrom.

Um weitere Aufklärung über den Vorgang der elektrischen Leitung in Metallen zu bekommen, untersuchte ich die Leitfähigkeit des Wismuts bei Gleich- und Wechselstrom. Hier sind verschiedene Anomalien bekannt. Lenard¹⁾ fand, daß Wismut schon bei sehr langsamen Schwingungen (ca. 10 000 Schwingungen pro Sekunde) eine Leitfähigkeit hat, die größer ist,

1) P. Lenard, Wied. Ann. 39. p. 619. 1890.

als für Gleichstrom, und daß diese Tatsache auf keine bekannten Erscheinungen zurückgeführt werden kann. Ferner ergab sich bei den Messungen von Hagen und Rubens¹⁾ über das Reflexionsvermögen der Metalle für ultrarote Strahlen, daß Wismut sich anders verhält als alle anderen Metalle, indem es nicht der Maxwellschen Theorie gehorcht, die das Reflexionsvermögen aus der Leitfähigkeit berechnen läßt, sondern es würde sich aus dem Reflexionsvermögen des Wismuts eine viel höhere Leitfähigkeit schließen lassen.

Es handelte sich nun darum, die Lenardschen Versuche zu wiederholen und zu versuchen, ob diese Differenz für schnellere Schwingungen nicht eventuell größere Werte annimmt.

Zunächst wiederholte ich die Lenardschen Versuche. Ich spannte die Drähte, die ich untersuchte, geradlinig aus; sie gingen frei durch die Luft und waren an den Enden an Kupferbleche angelötet. Dann setzte ich das Ganze in einen Trog, der mit Petroleum gefüllt war, damit die Temperatur der untersuchten Drähte genau gleich war. Wismut, Platin und Kupfer wurden miteinander verglichen, die Drähte waren von Hartmann & Braun bezogen. Es war Wismutdraht von 0,17 mm Durchmesser und ferner Haardrähte aus Platin von 0,0513 mm und aus Kupfer von 0,0208 mm Durchmesser. Die Längen waren ca. 24 cm bez. 23 cm bez. 28 cm und wurden so abgeglichen, daß die Widerstände fast völlig gleich waren und zwar ca. 13 Ω . Die Drahtdicken waren absichtlich so gewählt, daß wenigstens annähernd gleiche Längen der verschiedenen Drähte gleichen Widerstand hatten; denn wenn auch die Schwingungen, mit denen gemessen wurde, so langsam waren, daß bei so dünnen Drähten die Stromverteilung sicher noch gleichmäßig über den Querschnitt war, so hat diese Wahl doch den Vorzug, daß die an den Widerständen bei schnelleren Schwingungen anzubringenden Korrekturen gleich groß waren, denn sie hängen außer von der Wechselzahl ν (doppelte Schwingungszahl) nur von dem Widerstand pro Längeneinheit γ ab. Nach Lord Rayleigh²⁾ ist nämlich

$$w = w_0 \left(1 + \frac{\pi^2 \nu^2}{12 \gamma^2} - \frac{\pi^4 \nu^4}{180 \gamma^4} + \dots \right).$$

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 11. p. 873. 1903.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. p. 387. 1886.

Die Messungen wurden mit Hilfe der Wheatstoneschen Brücke ausgeführt. Es war dafür Sorge getragen, daß durch das einfache Umlegen zweier Wippen die Gleichstromquelle (Akkumulator) mit der Wechselstromquelle (Induktorium mit Mückenton) und ebenso das Galvanometer mit dem Telephon vertauscht werden konnten.

Es ergab sich bei der Einstellung

$$\text{mit Gleichstrom } w_{\text{Bi}}:w_{\text{Pt}} = \frac{0,4994}{0,5006}; \text{ mit Wechselstrom } = \frac{0,4989}{0,5011}.$$

Bei einer zweiten Messung an einem anderen Tage

$$\text{mit Gleichstrom } w_{\text{Bi}}:w_{\text{Pt}} = \frac{0,4992}{0,5008}; \text{ mit Wechselstrom } = \frac{0,4986}{0,5014}.$$

Dagegen wurde kein Unterschied beim Vergleich von Platin mit Platin, von Platin mit Kupfer, von Kupfer mit Kupfer gefunden, wenn man mit Gleich- bez. Wechselstrom maß.

Genau wie Lenard fand ich also bei Wismut kleineren Widerstand für Schwingungen, und zwar für sehr langsame Schwingungen. Wir können auf Grund der Messungen mit den anderen Metallen annehmen, daß nur Wismut, nicht aber Pt und Cu einen anderen Widerstand bei Wechsel- als bei Gleichstrom haben. Setzen wir den Gleichstromwiderstand des Bi = 1, so ist nach den obigen Messungen der Wechselstromwiderstand 0,9980 bez. 0,9976, d. h. im Mittel 0,9978, während Lenard fast die gleiche Zahl 0,9977 gefunden hat. Diese Differenz zeigt sich von der Stromstärke unabhängig; sie scheint auch in weiteren Grenzen von der Wechselzahl unabhängig zu sein, und zwar besteht die Differenz — im Gegensatz zu Lenard — auch noch für die Schwingungszahlen, die dem eigentlichen im Telephon hörbaren *Tone* entsprechen, während Lenard meint, daß nur bei den *Geräuschen* von ca. 10000 Schwingungen/Sek. ein Unterschied beobachtbar sei.

Sollte der Effekt doch von der Schwingungszahl abhängig sein, so stand zu erwarten, daß er bei schnellen Schwingungen sehr viel größer sein würde. Um dies zu entscheiden, wählte ich folgende Versuchsanordnung:¹⁾

1) Vgl. die Versuchsanordnung von G. Rempp, Ann. d. Phys. 17. p. 627. 1905.

Die Funkenstrecke F wird von einem Induktorium J gespeist (Fig. 4); sie befindet sich in einem Schwingungskreise I mit zwei Leidener Flaschen C_1 und C_2 von 960 bez. 890 cm Kapazität. Der Kreis selbst war ein Rechteck von 36×40 cm Seitenlänge aus 4 mm dickem Kupferdraht.

Fig. 4.

Dieser Primärkreis I induziert auf einen Sekundärkreis II, der mit I sehr lose magnetisch gekoppelt ist. II ist ein Rechteck von 99,7 cm Länge und 39,5 cm Breite, es besteht aus Kupferdraht von 3,97 mm Durchmesser. In der Mitte der einen Längsseite ist ein variabler Kondensator K eingefügt, der nach meinen Angaben in der Werkstätte des physikalischen Institutes zu Tübingen angefertigt ist. Derselbe besteht aus vier feststehenden, einander parallelen Zinkplatten, die oben und unten durch Hartgummiplatten hinten durch eine mit den ersteren verlötete Zinkplatte zusammengehalten werden. Zwischen den vier feststehenden Platten befinden sich drei metallisch miteinander verbundene Platten, die in Nuten im Hartgummi verschiebbar sind, so daß je nach ihrer Stellung größere oder kleinere Flächen den festen Platten gegenüberstehen. Die Stellung läßt sich an einer Skala ablesen, die Eichung zeigt, daß zwischen gewissen Grenzen die Kapazität linear mit der Verschiebung sich verändert. Fig. 5 stellt einen Vertikalschnitt durch die Hartgummiplatten mit den vier feststehenden Zinkplatten, die metallisch miteinander verbunden waren, dar, während die beweglichen Platten nicht mit eingezeichnet sind. Fig. 5 a ist

Fig. 5.

Fig. 5 a.

ein Horizontalschnitt durch den Kondensator. Außer dem System aus drei beweglichen Platten konnte man auch eine einzige bewegliche Platte in eine der Nuten schieben. Da-

durch war es ermöglicht, auch kleinere Kapazitäten herzustellen.

In der Mitte der anderen Längsseite des Sekundärkreises, dem Kondensator K gegenüber, war der Kreis unterbrochen und zwei Quecksilbernäpfchen angebracht. Diese konnten entweder durch einen dicken Kupferdraht oder durch geradlinig gespannte dünne Drähte W miteinander verbunden werden.

War der Sekundärkreis auf den Primärkreis abgestimmt, so fiel die Stromstärke im Sekundärkreis beträchtlich, wenn anstatt des dicken Kupferdrahtes ein Bi-Draht oder ein Haardraht aus Cu bez. Pt bei W eingeschaltet wurde; die Energie wurde in Joulesche Wärme in den Drähten umgesetzt, und hierbei kommt gerade der effektive Widerstand der Drähte in Betracht.

War dafür gesorgt, daß die Drähte aus Bi, Cu, Pt gleichen Gleichstromwiderstand hatten, so konnte man leicht Veränderungen in ihrem gegenseitigen Verhältnis wahrnehmen.

Die Stromstärke im Sekundärkreis wurde gemessen, indem dieser auf einen Tertiärkreis III aus drei Windungen in loser Koppelung induzierte. In demselben befand sich ein Brandesches Vakuumthermoelement¹⁾ aus Konstantan und Eisen, welches ich der Liebenswürdigkeit des Hrn. Brandes verdanke. Dies war mit einem Paschenschen Galvanometer G verbunden, welches sich wegen seiner Empfindlichkeit bei kleiner Schwingungsdauer und besonders wegen seiner starken Dämpfung hervorragend gut zum Aufnehmen von Resonanzkurven eignet.

Die Messung der Kapazitäten der Leidener Flaschen und die Eichung des Meßkondensators K wurde so vorgenommen, daß die Kapazität n mal in der Sekunde zu einem gegebenen Potential geladen und ebenso oft durch ein Galvanometer entladen wurde.²⁾ Die hierzu nötige Wippe wurde durch einen Torsionsunterbrecher betrieben, der nach den Angaben von Hrn. Prof. Paschen konstruiert worden ist.

Auf einem Brett sind zwei Messingfeiler P_1 und P_2 (vgl. Fig. 6) befestigt, die einen leicht gespannten Messingdraht D tragen. An diesem ist die Wippe W befestigt, deren mittlerer

1) H. Brandes, Physik. Zeitschr. 6. p. 503. 1905.

2) Vgl. F. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Physik 10. Aufl. Nr. 132, 7. 1905.

Arm immer in den Quecksilbernaf N_2 taucht, während, wenn der Draht Torsionsschwingungen macht, bald der eine äußere Arm in N_1 , bald der andere in N_3 eintaucht. Ferner ist an dem Draht D ein Hammer H aus weichem Eisen befestigt und ein Kontaktdraht C , der bei Torsionsschwingungen des Drahtes D abwechselnd in den Quecksilbernaf Q , der in seiner Höhe regulierbar ist, eintaucht und wieder herausschneidet. Man leitet einen Strom durch die Klemme K_1 in den Pfeiler P_2 , er fließt weiter durch den Draht D , den Kontaktdraht C , den Quecksilbernaf Q , durch einen mit diesem verbundenen Draht zur Spule S , die dem Hammer H gegenübersteht, zur Klemme K_2 und zum Element zurück. Durch den Strom wird der Hammer H nach S hin angezogen, dadurch tordiert sich der Draht, der Kontakt zwischen C und Q wird unterbrochen, der Strom hört auf, der Hammer schnell zurück etc. Der Vorzug des Unterbrechers beruht in der großen Regelmäßigkeit seines Ganges und in den großen Amplituden der Wippe, die ein sicheres Unterbrechen des Kontaktes garantieren.

Fig. 6.

Die Regelmäßigkeit erkennt man am besten daran, daß man mit Hilfe des Torsionsunterbrechers eine Kapazität lädt und durch ein Galvanometer entlädt. Der Galvanometerausschlag ist absolut konstant bis auf Bruchteile eines Promille.

Die Unterbrechungszahl bestimmte ich stroboskopisch, indem ich an einen Elektromotor eine durchlöchernte Scheibe setzte. Den Gang des Motors, an dem sich ein Zählwerk befand, wurde sehr fein dadurch reguliert, daß an eine auf seiner Welle befestigte Schwungscheibe ein Haarpinsel mit einer Schraube stärker oder schwächer gedrückt wurde. Während des Ganges des Unterbrechers wurde durch die stroboskopische Scheibe der Hammer beobachtet, und der Gang des Motors so reguliert, daß der Hammer stillzustehen schien. Ich fand 25,88 Unterbrechungen pro Sekunde.

Die Schwingungszahlen der elektrischen Wellen konnten

durch Aufnahme einer Resonanzkurve mit Hilfe des Sekundärkreises bestimmt werden, denn in diesem ließ sich die Selbstinduktion nach der Formel für das Rechteck mit den Seiten a und b aus Draht vom Radius r berechnen. Es ist

$$p = 4 \left[a \ln \frac{2ab}{r(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + b \ln \frac{2ab}{r(b + \sqrt{a^2 + b^2})} + 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b) \right] \cdot 1)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Schwingungen so schnell sind und der Draht so gut leitet und einen so großen Durchmesser hat, daß der Strom merklich nur auf der Oberfläche des Drahtes verläuft, so daß bei der Berechnung der magnetischen Energie das Drahtinnere keinen Beitrag liefert. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wovon man sich nachträglich überzeugen kann, sobald man die Schwingungszahl berechnet hat. Fig. 7 stellt eine Resonanzkurve dar, die aufgenommen wurde,

Fig. 7.

Regelmäßigkeit erzielt.²⁾ Als Abszisse ist die Stellung der beweglichen Kondensatorplatten, als Ordinate der Galvano-

während bei W (Fig. 4) ein dicker Kupferdraht die Verbindung der beiden Näpfchen herstellte. Als Unterbrecher im Primärkreis des Induktoriums diente als bei weitem regelmäßigster ein Quecksilberstrahlunterbrecher der A.E.G. Die Funkenkugeln waren aus Zink, die Stromstärke in der Primärspule des Induktors war so reguliert, daß bei jeder Unterbrechung nur *ein* Funken übersprang. Erst dadurch wurde die für die Messungen notwendige

1) Vgl. M. Wien, Wied. Ann. 53. p. 935. 1894.

2) J. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen p. 609. Stuttgart 1905.

meterausschlag aufgetragen auf Grund folgender Beobachtungstabelle:

Stellung der Kondensatorplatten	Ausschlag	Stellung der Kondensatorplatten	Ausschlag
7,5	13	8,5	109
7,75	16	8,625	108
8,0	30	8,75	90
8,125	44	8,875	67
8,25	64	9,0	43
8,375	88	9,25	17

Das Maximum liegt bei 8,56. Dieser Stellung entspricht nach der Eichungstabelle des Kondensators die Kapazität $C = 245$ cm.

p ergibt sich aus den Dimensionen

$$a = 99,7 \text{ cm}, \quad b = 39,5 \text{ cm}, \quad r = 0,198 \text{ cm} \quad \text{zu} \quad p = 2724 \text{ cm.}$$

Nach der Formel

$$n = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2\pi \sqrt{p c}}$$

ergibt sich die ganze Schwingungszahl zu $5,85 \cdot 10^6$ 1/sec.

Die Drähte, welche bei W in den Sekundärkreis eingeschaltet wurden, waren von derselben Dicke, wie die früher benutzten. Die Widerstandsveränderung berechnet sich nach der Formel

$$w = w_0 \left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{3 \cdot \gamma^2} - \dots \right),$$

wenn n die ganze Schwingungszahl, γ den Widerstand von 1 cm Länge bei Gleichstrom ist. Nun ist aber

$$n = 5,85 \cdot 10^6, \quad \gamma = 0,46 \, \Omega = 0,46 \cdot 10^9 \text{ C.G.S.}$$

Daraus folgt

$$w = w_0 1,0005,$$

d. h. die Änderung ist sehr unbedeutend, und da überdies die Drahtdicken so gewählt waren, daß γ annähernd bei allen gleich war, so ist die kleine Korrektur bei den verschiedenen Drähten einander gleich. Die Drähte waren ca. 3 cm lang, ihr Widerstand war $1,46 \, \Omega$, sie waren sorgfältig im Widerstand bei Gleichstrom abgeglichen. Es ergab sich, daß der Genauigkeit nur eine Grenze gesetzt war durch die Schwan-

kungen infolge des unregelmäßigen Ganges des Unterbrechers. Es können keine größeren Differenzen zwischen den Widerständen bestehen als 0,7 Proz. Das bedeutet aber, daß die am Wismut schon bei Schwingungen der Ordnung 1000/sec beobachtete Widerstandsdifferenz gegenüber dem Gleichstromwiderstand auch bei $6 \cdot 10^6$ Schwingungen/sec keinen größeren Betrag erreicht. Es ist also das Verhalten des Bi gegenüber den ultraroten Strahlen nicht durch diese Versuche aufgeklärt, es müßte denn sein, daß die Änderung erst bei sehr viel schnelleren Schwingungen größer wird.

Will man sich ein Bild von den Vorgängen im Wismut auf der Grundlage der Elektronentheorie machen, so wird man das verschiedene Verhalten gegenüber Gleich- und Wechselstrom zunächst durch das Verhalten der positiven Elektronen erklären wollen. Diese scheint man ja ohnehin auf Grund der obenstehenden theoretischen Überlegungen und der beobachteten Tatsachen mit in den Kreis der Betrachtungen ziehen zu müssen.

An einfache Polarisationselektronen darf man dabei aber nicht denken, d. h. an Elektronen mit einer Gleichgewichtslage, in die die abgelenkten Elektronen zurückgezogen werden; denn ist ein Elektron um die Länge l aus der Gleichgewichtslage abgelenkt, so ist das dazu nötige Feld gegeben durch

$$\alpha e \mathcal{E} = l$$

und also

$$\alpha e \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{dl}{dt}.$$

Die Strömung ist

$$\sum N e \frac{dl}{dt} = \sum N e^2 \alpha \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}.$$

Solche Elektronen würden also eine Dielektrizitätskonstante ϵ im Wismut hervorrufen und im Draht vom Widerstand w und dem Selbstinduktionskoeffizienten p_0 eine Verkleinerung der Selbstinduktion verursachen, so daß

$$p = p_0 - \frac{\epsilon w}{\sigma}$$

würde (σ Leitfähigkeit).

Berücksichtigt man dagegen auch die Dämpfung der Polari-

sationselektronen, so wird die Bewegungsgleichung für ein Elektron¹⁾

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{1}{u} \frac{dl}{dt} + \frac{1}{\alpha} l = e \mathfrak{E} = e \mathfrak{E}_0 \varepsilon^{i\nu t}. \quad 2)$$

Daraus folgt, daß auch

$$l = l_0 \varepsilon^{i\nu t}$$

zu setzen sein wird, woraus sich

$$l = \frac{e \mathfrak{E}}{\frac{1}{\alpha} - m \nu^2 + \frac{i\nu}{u}}$$

ergibt. Nun wollen wir annehmen, daß ν solche Werte hat, daß wir noch weit aus dem Gebiet der Eigenschwingungen $\nu_0 = \sqrt{1/m\alpha}$ entfernt sind, aber die Reibungskonstante $1/u$ sei so groß, ferner die Masse der Elektronen, sowie ihre Direktionskraft $1/\alpha$ seien so klein, daß α und $m\nu^2$ einzeln gegen $i\nu/u$ vernachlässigt werden können. Dann ist

$$i\nu l = \frac{dl}{dt} = u e \mathfrak{E},$$

$$\sum e N \frac{dl}{dt} = \sum N e^2 u \mathfrak{E},$$

d. h. solche Elektronen würden bei Schwingungen wirklich etwas zur Leitfähigkeit beitragen. Bei Gleichstrom dagegen würden sie entsprechend ihrer Direktionskraft zunächst aus der Gleichgewichtslage abgelenkt werden, dann aber nichts mehr zur Leitung der Elektrizität beitragen, die allein durch die Leitungselektronen besorgt würde.

Es wäre wohl nicht undenkbar, daß im Wismut solche sehr stark gedämpfte Polarisationsselektronen sind.

Anhang.

In Formel (26) kommen die beiden bestimmten Integrale

$$K = \int_0^\infty \frac{e^{-h r^2}}{r^2 + \gamma^2} r dr \quad \text{und} \quad J = \int_0^\infty \frac{e^{-h r^2}}{r^2 + \gamma^2} dr$$

1) P. Drude, Lehrbuch d. Optik p. 353. Leipzig 1900.

2) Hier bedeutet ε die Basis des natürlichen Logarithmensystems und nicht wie auf der vorigen Seite die Dielektrizitätskonstante.

vor. Es handelt sich darum, sie auf bekannte Integrale zurückzuführen.

Um K zu transformieren, setze ich

$$h(r^2 + \gamma^2) = t;$$

dann wird

$$K = \frac{e^{h\gamma^2}}{2} \int_{h\gamma^2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Um J zu transformieren, bilden wir

$$\begin{aligned} -\frac{dJ}{dh} &= \int_0^{\infty} \frac{r^2 e^{-h r^2}}{r^2 + \gamma^2} dr = \int_0^{\infty} e^{-h r^2} dr - \gamma^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-h r^2}}{r^2 + \gamma^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h}} - \gamma^2 J, \end{aligned}$$

oder

$$\frac{dJ}{dh} - \gamma^2 J = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h}}.$$

Diese Differentialgleichung läßt sich nach der Lagrange'schen Methode der Variation der Konstanten integrieren und ergibt

$$J = e^{\gamma^2 h} \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \int_{\gamma\sqrt{h}}^c e^{-t^2} dt,$$

wo c willkürliche Integrationskonstante ist. Sie bestimmt sich daraus, daß J für $h = \infty$ Null sein muß, und man erhält

$$J = e^{\gamma^2 h} \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \int_{\gamma\sqrt{h}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Tübingen, Physik. Inst., März 1906.

(Eingegangen 23. März 1906.)