Zur Analysis Situs.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Mit 2 Tafeln

I. Einleitung.

In diesen Annalen, Bd. 58, 59 und 62 hat Herr Schoenflies wichtige Beiträge zur Klärung der Analysis Situs der Ebene geliefert, welche er später im vierten und fünften Kapitel des zweiten Teiles seines mengentheoretischen Berichtes zusammengefaßt hat. Unter seinen Resultaten sind besonders die Präzisierung und Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes als äußerst wertvoll zu bezeichnen. Sie eröffnen die Möglichkeit zu allgemeinerer und strengerer Begründung von verschiedenen Gebieten der Mathematik.

Wenn nun aber die Schoenfliessche Theorie der einfachen geschlossenen Kurven, sowie der von solchen begrenzten Gebiete einwandfrei ist, von seinen Ergebnissen, insoweit sie *geschlossene Kurven und Gebiete allgemeiner Art* betreffen, läßt sich dasselbe nicht behaupten. Hier sind mehrere seiner Resultate falsch, andere zwar richtig, aber ungenügend begründet. Ich glaube dies am deutlichsten zu beleuchten, indem ich zunächst einige Punktmengen konstruiere, welche Eigenschaften besitzen, die nach der Schoenfliesschen Theorie unmöglich sein würden, und nachher diese Theorie systematisch kritisiere; dabei schließe ich mich hauptsächlich dem Berichte an, wo der Stoff natürlicher geordnet und vollständiger dargestellt erscheint, und verweise auf die bezüglichen Stellen der Annalen nur gelegentlich.*)

*) Ich hebe ausdrücklich hervor, daß diese Arbeit den hohen Wert der Schoenfliesschen Untersuchungen keineswegs zu beeinträchtigen sucht. Nur ihre große Tragweite hat mich zu dieser Kritik veranlaßt, welche übrigens den umfangreichsten Teil, nämlich die Theorie der einfachen Kurven, nicht wesentlich trifft.

II. Einfach zusammenhängende Gebiete ohne geschlossene äußere Randkurve.

Ein Beispiel eines solchen Gebietes liefert das Gebiet J in Fig. 1. Es wird erhalten, indem man einen einfachen Kurvenbogen nach beiden Seiten fortsetzt und beide Fortsetzungen, ohne daß sie einander treffen, spiralartig um einen und denselben Kreis herumwindet.

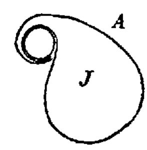

Fig. 1.

III. Geschlossene Kurven, welche sich in zwei uneigentliche Kurvenbogen*) zerlegen lassen.

Für die in Fig. 2 (Tafel I) schematisch gezeichnete geschlossene Kurve wird das äußere Gebiet gebildet von demjenigen Teil der Ebene, welcher außerhalb des Hauptrechteckes liegt, sowie von den schwarz schraffierten Teilgebieten des Hauptrechteckes; das innere Gebiet ist das rot schraffierte Teilgebiet des Hauptrechteckes. Diese schraffierten Gebiete werden in folgender Weise erhalten.

Das erste schwarze Gebiet ist ein in der Mitte der Grundlinie des Hauptrechteckes in der Weise aufgerichtetes Teilrechteck, daß der zweimal umgebogene weiße Streifen, welcher übrig bleibt, in seinen drei Teilen dieselbe Breite besitzt.

Das Verhältnis seiner Grundlinie zu der des Hauptrechteckes sei $\frac{1}{2\alpha+1}$; dann hat der weiße Streifen eine Breite $\frac{\alpha}{2\alpha+1}\,a$, wenn a die Länge der Grundlinie des Hauptrechteckes ist.

Jetzt zeichnen wir den zwischen den Querschnitten $P_1 P_1'$ und $Q_1 Q_1'$ enthaltenen Teil des roten Gebietes. Er besteht aus einem Streifen von der Breite $\frac{1}{2\alpha+1}\cdot\frac{\alpha}{2\alpha+1}\,a$, und seine Grenze verläuft überall im Ab-

*) Für „Kurvenbogen" möchte ich einen weiteren Begriff, als den von Schoenflies im Bericht II S. 128 eingeführten, vorschlagen: ich möchte nämlich einen Kurvenbogen definieren durch zwei *Schnitte* in einem zyklischen, abzählbaren, überall dichten Ordnungstypus von für das innere (bezw. äußere) Gebiet erreichbaren Punkten. Der Schoenfliessche Begriff läßt sodann unter diesen Schnitten nur durch erreichbare Punkte gebildete zu. Eine völlig verschiedene Definition gibt Schoenflies in den Gött. Nachr. 1904 S. 516 und in den Math. Annalen Bd. 59, S. 147. Diese scheint mir aber durchaus zu verwerfen, weil sich nach ihr jede nirgends dichte perfekte zusammenhängende Menge mit einem einzigen Komplementärgebiete als Kurvenbogen auffassen läßt.

Unter einem *uneigentlichen Kurvenbogen* möchte ich einen solchen durch zwei Schnitte definierten Kurvenbogen verstehen, welche die ganze geschlossene Kurve enthält, und im entgegengesetzten Falle sprechen von einem *eigentlichen Kurvenbogen*.

stande $\left(\frac{\alpha}{2\alpha+1}\right)^2 a$ parallel der Grenze des ebengenannten weißen Streifens, in dem er enthalten ist.

Das zweite schwarze Gebiet wird jetzt in der Weise um den bisher gezeichneten Teil des roten Gebietes außen herumgelegt, daß links auf der Grundlinie des Hauptrechteckes angefangen, und rechts auf der Höhe von $Q_1 Q_1'$ aufgehört wird. Dieser Streifen hat wieder eine Breite gleich $\frac{1}{2\alpha+1}$ von der des weißen Streifens, in die Mitte dessen er hineingelegt wird.

Die beiden jetzt existierenden schwarzen Gebiete lassen im Hauptrechteck einen sechs Mal umgebogenen Streifen frei, und das rote Gebiet wird jetzt in der Weise fortgesetzt, daß es auch die bisher von ihm freien Teile durchzieht, und zwar diese in ihrer Mitte und unter Hinwegnahme des $\frac{1}{2\alpha+1}$ten Teiles ihrer Breite. Das rote Gebiet wird also fortgesetzt vom Querschnitt $Q_1 Q_1'$ bis zum Querschnitt $Q_2 Q_2'$, welcher denselben Abstand von der Grundlinie des Hauptrechteckes besitzt, wie die vertikale Grenze in Q_2 vom zweiten gestreift schraffierten Gebiet.

In dieser Weise wird fortgegangen. Abwechselnd wird ein neues schwarzes Gebiet um den schon erhaltenen Teil des roten Gebietes außen herumgelegt, wobei ganz links auf der Grundlinie des Hauptrechteckes angefangen, und auf derselben Höhe mit dem bisher fertigen Teile des roten Gebietes aufgehört wird, und sodann das rote Gebiet in der Weise fortgesetzt, daß es in alle Teilkanäle des von den schwarzen Flächen freigelassenen Streifens eindringt. Diese Verlängerungen des roten Gebietes geschehen abwechselnd auf beiden Seiten: nach einer Fortsetzung von $Q_n Q_n'$ bis $Q_{n+1} Q_{n+1}'$ folgt eine Fortsetzung von $P_n P_n'$ bis $P_{n+1} P_{n+1}'$. Von jedem weißen Streifen, welcher neu durchzogen wird, es sei von „rot" oder von „schwarz", wird der $\frac{1}{2\alpha+1}$te Teil der Breite in Anspruch genommen.

Jedem Punkte der Grenze eines schwarzen Gebietes kommt nach genügender Fortsetzung des Verfahrens das rote Gebiet beliebig nahe, und jedem Punkte der Grenze des roten Gebietes kommen schließlich die schwarzen Gebiete beliebig nahe, während durch die volle Grenze K des roten Gebietes „rot" und „schwarz" völlig voneinander getrennt werden.

Die Komplementärmenge von K enthält nur zwei Gebiete, nämlich das rote, und das aus den schwarzen und dem äußeren Gebiete des Hauptrechteckes zusammengesetzte Gebiet; K ist gemeinsame Grenze dieser beiden Gebiete, also eine geschlossene Kurve.

Wählt man nun aber Q_1 und Q_1' als Schnitte der für das innere Gebiet erreichbaren Punkte, so werden dadurch zwei uneigentliche Kurvenbogen bestimmt.

IV. Eigentliche Kurvenbogen, welche sich in zwei mit dem ganzen identische Kurvenbogen zerlegen lassen.

Das im vorigen Paragraphen geschilderte Verhalten kann auch bei eigentlichen Kurvenbogen auftreten. Um dies zu erläutern, betrachten wir die obere Hälfte von Fig. 3 (Tafel II), deren Erklärung wir, da in mancher Hinsicht volle Analogie mit Fig. 2 vorliegt, kurz fassen können.

Wir gehen wieder aus von einem Hauptrechteck*) und konstruieren ein erstes schwarzes Gebiet, wie in Fig. 2.

Der erste Teil des roten Gebietes unterscheidet sich nun aber von dem der Fig. 2 dadurch, daß er links auf der Grundlinie des Hauptrechteckes *anfängt*; rechts endet er wie in Fig. 2 bei $Q_1\,Q_1'$.

Das zweite schwarze Gebiet ist wie in Fig. 2; ebenso der zweite Teil des roten Gebietes, welcher zwischen $Q_1\,Q_1'$ und $Q_2\,Q_2'$ enthalten ist.

Das dritte schwarze Gebiet wird zwar wieder an dem bisher erhaltenen Teil des roten Gebietes entlang gelegt, aber es fängt jetzt auf der Grundlinie zwischen dem roten Gebiete und dem ersten schwarzen Gebiete an, was ermöglicht, daß nachher die Fortsetzungen des roten Gebietes in einer einzigen Reihe aneinander schließen.

Im allgemeinen wird für das n^{te} schwarze Gebiet auf der Grundlinie zwischen dem roten und dem $(n-2)^{\text{ten}}$ schwarzen Gebiete angefangen, und wird es in derselben Weise wie in Fig. 2 an dem schon fertigen Teile des roten Gebietes entlang gelegt, während das rote Gebiet auch hier stets in der Weise fortgesetzt wird, daß es jedesmal in alle Teilkanäle des vorliegenden von „schwarz" freien Streifens eindringt.

Die von den Grenzen aller roten und schwarzen Gebiete**) nebst ihren Grenzpunkten gebildete Menge K_1 läßt sich durch den Teil der Grundlinie, über dem das rote Gebiet anfängt, zu einer geschlossenen Kurve ergänzen; sie läßt sich also als ein eigentlicher Kurvenbogen jener geschlossenen Kurve betrachten. Als solcher kann sie aber sowohl aus dem inneren wie aus dem äußeren Gebiete in zwei Kurvenbogen zerlegt werden, welche ihr selbst gleich sind.

*) Die Verzerrung des Rechteckes auf der linken Seite ist mit Rücksicht auf die spätere Zusammensetzung mit der unteren Hälfte vorgenommen; sie soll hier außer Acht bleiben.

**) In der Grundlinie begrenzen wir diese Gebiete nicht; dadurch hängen sie mit dem äußeren Gebiete des Hauptrechteckes zusammen.

V. Geschlossene Kurven, welche sich nicht in zwei eigentliche Kurvenbogen zerlegen lassen.*)

Als Beispiel einer solchen kann wieder Fig. 2 dienen. Ich hebe indessen hervor, daß die Eigenschaft dieser Figur, welche in III beleuchtet wurde, nicht notwendig die jetzt in Betracht gezogene nach sich zieht. Es gibt nämlich auch geschlossene Kurven, welche sich *sowohl in zwei eigentliche, wie in zwei uneigentliche Kurvenbogen zerlegen lassen.*

Dies zeigt die volle Fig. 3, welche keiner näheren Erklärung bedarf, da die untere Hälfte die gleiche Struktur hat, wie die obere. Die volle Grenze des roten Gebietes ist eine geschlossene Kurve. Trennen wir die aus „rot" erreichbaren Punkte in diejenigen, welche auf der rechten, und diejenigen, welche auf der linken Grenzlinie des roten Streifens liegen, so zerlegen wir die Kurve in zwei uneigentliche Kurvenbogen. Trennen wir ihre erreichbaren Punkte aber in die in der oberen und die in der unteren Hälfte der Figur enthaltenen, so zerlegen wir sie in zwei eigentliche Kurvenbogen.

Andererseits gibt es auch geschlossene Kurven, welche sich *weder in zwei eigentliche, noch in zwei uneigentliche Kurvenbogen zerlegen lassen.***)

Um eine solche zu konstruieren, reduziert man in der oberen Hälfte der Fig. 3 die Breite des roten Streifens auf Null (so daß beim Aufbaue der Figur nur ein in einem Punkte H der Grundlinie anfangender roter Streckenzug immer wieder verlängert wird), während die schwarzen Gebiete in derselben Weise, wie zuvor, hineingelegt werden. Sodann wird das Rechteck in der Weise gebogen, daß der rechte Endpunkt der Grundlinie mit H zusammenfällt, sonst aber die Figur eineindeutiges stetiges Bild ihrer ursprünglichen Lage bleibt. Dabei kommt eine Teilung der Ebene in zwei Gebiete zustande, welche getrennt werden durch eine geschlossene Kurve, welche die geforderte Eigenschaft besitzt.

---

*) Auch gibt es Kurvenbogen, welche sich nicht in zwei Teilkurvenbogen zerlegen lassen. Dies zeigt wieder die obere Hälfte der Fig. 3. Diese Kurven bezw. Kurvenbogen geben zugleich Beispiele ab von solchen zusammenhängenden Mengen, welche nach Hinwegnahme einer willkürlichen zusammenhängenden Teilmenge stets eine Restmenge übrig lassen, welche dieselbe Ableitung besitzt, wie die ursprüngliche Menge; diese läßt sich also nicht durch eine endliche Zahl von zusammenhängenden perfekten Teilmengen erschöpfen.

**) Eine kurze Überlegung zeigt weiter, daß in dieser Hinsicht gerade fünf Arten von geschlossenen Kurven existieren. Für die erste Art ist von den durch zwei Schnitte bestimmten Kurvenbogen entweder der eine eigentlich und der andere uneigentlich, oder beide eigentlich, oder beide uneigentlich; für die zweite entweder der eine eigentlich und der andere uneigentlich, oder beide uneigentlich; für die dritte stets der eine eigentlich und der andere uneigentlich; für die vierte stets beide

VI. Nirgends dichte zusammenhängende Mengen, welche die Ebene in mehr als zwei Gebiete zerlegen, deren gemeinschaftliche Grenze sie sind.

Seien in der oberen Hälfte von Fig. 3 K und L die Endpunkte der Grundlinie des Hauptrechteckes; F und E die Endpunkte jenes Segmentes der Grundlinie, über dem das rote Gebiet anfängt, so kann man die Figur so biegen, daß F mit K und E mit L zusammenfällt, und daß sie übrigens ein-eindeutiges Bild ihrer ursprünglichen Lage bleibt Die Ebene ist dann in drei Teilgebiete zerlegt, welche ihre Grenze gemeinsam haben.

Durch passende Abänderungen des Verfahrens kann man analoge Zerlegungen in beliebig viele, und sogar in unendlich viele Teilgebiete mit gemeinsamer Grenze herstellen.

VII. Bemerkungen über das vierte Kapitel des Schoenfliesschen Berichtes.

Zu § 11. Im Beweise des Satzes XIII findet sich S. 123 die unrichtige Behauptung, daß $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{H} + \mathfrak{T}_g + \mathfrak{T}_{gh}$ ein zusammenhängendes Gebiet ist. Daß diese Behauptung sich ebensowenig wie der Satz XIII selbst aufrecht erhalten läßt, zeigt die oben in II angeführte Fig. 1. Mit Satz XIII fallen zugleich die Sätze XIV und XV, wie auch die Betrachtungen über Gebietsteilung in Ann. Bd. 59, besonders S. 154, 155 u. 159. Der Beweis des Satzes XIV versagt sogar auch dann noch, wenn die äußere Randkurve existiert. Denn es ist kein Grund, weshalb $\mathfrak{G}$ nicht in dem zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ enthaltenen Ringgebiet liegen könnte. Dies läßt sich z. B. verwirklichen für ein durch den Querschnitt $Q_1 Q_1'$ bestimmtes Teilgebiet des roten Gebietes der Fig. 2. Dieses Gebiet ist denn auch, *obwohl eine äußere Randkurve existiert, durch seine Grenze nicht eindeutig bestimmt.*

Zu § 12. S. 127 wird behauptet, daß man die in den erreichbaren Punkten mündenden Wege immer so wählen kann, daß sie jedes approximierende Polygon nur einmal kreuzen. Der Beweis wählt zunächst einen beliebigen Weg und beabsichtigt, daraus durch sukzessive Abänderungen den geforderten Weg herzustellen. Jede Abänderung für sich ist zwar einwandfrei, aber sowohl hier, wie in Math. Ann. Bd. 62, S. 294 kommt es darauf an, daß die Größe dieser Abänderung für hinreichend großes ν beliebig

---

eigentlich; für die fünfte entweder der eine eigentlich und der andere uneigentlich, oder beide eigentlich. Nach der Schoenfliesschen Theorie würden nur die beiden letzten Arten möglich sein.

klein werde; dies würde jedenfalls erhebliche weitere Ausführungen erfordern, wird aber weder erwähnt, noch bewiesen. Ich erlaube mir nun hier eine Abänderungsmethode anzugeben, welche diese notwendige Eigenschaft besitzt.

Sei l der beliebig gezeichnete aus m zu t führende Weg. Sei $\mathfrak{P}_\nu$ ein approximierendes Polygon, seien ${}_1L_\nu$ und ${}_2L_\nu$ zwei seiner Kreuzungspunkte mit l, $\mathfrak{p}_\nu$ ein zwischen ${}_1L_\nu$ und ${}_2L_\nu$ enthaltener Streckenzug von $\mathfrak{P}_\nu$, und l_ν der zwischen ${}_1L_\nu$ und ${}_2L_\nu$ enthaltene Streckenzug von l. Dann besteht $\mathfrak{p}_\nu$, insoweit er nicht in l_ν fällt, aus zwischen je zwei Punkten A_n und A_{n+1} von l_ν verlaufenden und l_ν sonst nicht treffenden Streckenzügen ${}_n\mathfrak{p}_\nu$. Jeder Streckenzug ${}_n\mathfrak{p}_\nu$ weist sodann dem zwischen A_n und A_{n+1} enthaltenen Teilstreckenzug ${}_nl_\nu$ von l_ν entweder die Innenseite oder die Außenseite von $\mathfrak{P}_\nu$ zu. Im zweiten Falle kann er sich nach § 3 nicht weiter als $\frac{3}{2}\varepsilon_\nu$ von ${}_nl_\nu$ entfernen. Im ersten Falle aber grenzt an seine Innenseite ein von ${}_nl_\nu$ und $\mathfrak{p}_\nu$ bestimmtes Gebiet, dessen Grenze, insoweit sie nicht zu ${}_n\mathfrak{p}_\nu$ gehört, sich nicht weiter als $\frac{3}{2}\varepsilon_\nu$ von ${}_nl_\nu$ entfernen kann. Wir können also zwischen ${}_1L_\nu$ und ${}_2L_\nu$, dem Verlaufe von $\mathfrak{p}_\nu$ folgend, einen Streckenzug λ_ν zeichnen, welcher sich nicht weiter als $2\varepsilon_\nu$ von l_ν entfernt, überall in beliebiger Nähe entweder von l_ν oder von $\mathfrak{p}_\nu$ ist, und ganz innerhalb $\mathfrak{P}_\nu$ verläuft. Wir wählen nun auf l stets für ${}_1L_\nu$ den ersten auf ${}_2L_{\nu-1}$ folgenden Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{P}_\nu$, und für ${}_2L_\nu$ den letzten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{P}_\nu$. Sodann ersetzen wir jedes l_ν durch das bezügliche λ_ν, und erhalten einen wirklichen *Weg*, welcher jedes $\mathfrak{P}_\nu$ nur in dem bezüglichen Punkte ${}_2L_\nu$ kreuzt. Außerdem berührt er $\mathfrak{P}_\nu$ noch in dem Punkte ${}_1L_\nu$, aber mit ν zu Null konvergierende Abänderungen heben auch diese Berührungspunkte auf, womit der geforderte Weg fertig ist.

Durch diese Methode ist im § 13 des Kap. V und im § 3 des Kap. VI (vgl. dazu die §§ 11 u. 13 in Annalen 62) auch sogleich ersichtlich, daß man aus m nach allen Punkten c_i Wege legen kann, welche alle approximierenden Polygone nur einmal, und einander nicht kreuzen, während der nach c_i führende Weg alle Punkte p_i, p_i', p_i'' usw. enthält, und sich zwischen $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{P}_\nu$ nicht weiter als $2\varepsilon_\nu$ von der Strecke $p_i^{(\nu-1)}p_i^{(\nu)}$ zu entfernen braucht.

Seite 128 wird aus dem falschen Satze XIV das unrichtige Resultat erhalten, daß die Kurvenbogen, in welche eine geschlossene Kurve durch zwei erreichbare Punkte zerlegt wird, nicht beide mit der Kurve selbst identisch sein können. Daß dies sehr gut möglich ist, haben wir oben in III gezeigt.

Zu § 13. Der Beweis des Satzes XVII wird wieder auf § 11 gestützt. Seine Unrichtigkeit läßt sich also erwarten, und leuchtet aus fast allen oben in II—VI angeführten Beispielen ein.

Zu § 14. Der Satz, daß das Abspaltungsverfahren nach einer abzählbaren Reihe von Schritten zu Ende führt, ist richtig, der Beweis aber läßt sich nicht aufrecht erhalten. Die S. 134 bewiesene Möglichkeit, nach einer Fundamentalreihe von vorangehenden Bestandteilen S_ν ein S_ω passend zu wählen, läßt sich nämlich schon nicht erweitern zu einer Möglichkeit, nach einem Ordnungstypus ω^2 von vorangehenden Bestandteilen S ein S_{ω^2} passend zu wählen. Es könnte ja hier der Fall auftreten, daß jeder gewählte Teilordnungstypus ω^2 *alle* isolierbaren Bestandteile von $\mathfrak{S}_{\omega^2}$ enthielte. Dann würde mit der wohlgeordneten Menge der S_α keine wohlgeordnete Menge von außerhalb voneinander liegenden Gebieten $\mathfrak{G}_\alpha$ parallel laufen, und der Beweis also versagen.

Ein zwingender Beweis kann wie folgt geführt werden: Die isolierbaren Bestandteile bilden in der Rangordnung, in der sie abgespalten werden, eine wohlgeordnete Menge, und jeder isolierbare Bestandteil S_α, dessen Index α zur ersten oder zweiten Zahlenklasse gehört, hat, wenn er abgespalten wird, einen endlichen Abstand δ_α von der dann noch übrigen Restmenge; er läßt sich also mit einem endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_\alpha$ umgeben, außerhalb dessen die Restmenge liegt, in welches also nur eine abzählbare Menge von Bestandteilen S_α eindringt. Wir fassen nun diejenigen Bestandteile ${}_1S_\alpha$ ins Auge, für welche ${}_1\delta_\alpha > \varepsilon_1$. Es läßt sich sodann unter den Gebieten ${}_1\mathfrak{G}_\alpha$ eine *endliche* Teilmenge derart auswählen, daß jeder ${}_1S_\alpha$ in wenigstens *eines* dieser Gebiete eindringt. Da nun aber in jedes Gebiet dieser endlichen Menge nur eine abzählbare Menge von Bestandteilen ${}_1S_\alpha$ durchdringen kann, so ist die Menge der ${}_1S_\alpha$ abzählbar. Ebenso zeigt man, daß die Menge der ${}_2S_\alpha$, für welche $\varepsilon_1 > {}_2\delta_\alpha > \varepsilon_2$, abzählbar ist. Läßt man nun eine Reihe abnehmender Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ gegen Null konvergieren, so findet sich die Menge der S_α in eine Fundamentalreihe von abzählbaren Mengen zerlegt.*)

Zu § 15. Die hier gegebenen Andeutungen unterliegen natürlich einer analogen Kritik, wie die Paragraphen, deren Ausdehnung auf den Raum sie beabsichtigen.

VIII. Bemerkungen über das fünfte Kapitel des Schoenfliesschen Berichtes.

Zu § 3. Der Gedankengang dieses Paragraphen enthält mehrere Fehlschlüsse; er läßt sich aber durch passende Modifizierung und Ergänzung umformen zu einem Beweise des folgenden Satzes:

---

*) Diese Methode entspricht dem Lindelöfschen Beweisverfahren für das Cantorsche Haupttheorem. Der Beweis kann aber auch so geführt werden, daß er dem Abspaltungsprozesse selber folgt. Darauf gehe ich jedoch an dieser Stelle nicht weiter ein.

„Wenn eine geschlossene Kurve C sich in zwei eigentliche Kurvenbogen C_1 und C_2 zerlegen läßt, welche miteinander zusammenhängen in zwei getrennten Mengen c_1 und c_2 *), so bestimmt ihr eineindeutiges stetiges Bild C' mehr als ein Gebiet."

Approximieren wir nämlich C_1' und C_2' durch äußere Randpolygone ${}_{\varepsilon_1}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2}P_2$. Diese können sich nur in mit den ε gegen Null konvergierender Nähe von c_1' und c_2' durchkreuzen. Wählen wir einen solchen Kreuzungspunkt in der Nähe von c_1' und einen zweiten in der Nähe von c_2', so werden diese beiden Punkte auf ${}_{\varepsilon_1}P_1$ verbunden durch zwei Streckenzüge, auf welchen beiden je ein Punkt gewählt werden kann, welcher außerhalb von ${}_{\varepsilon_2}P_2$ liegt. Im Polygone ${}_{\varepsilon_1}P_1$ sind also *wenigstens zwei* Streckenzüge enthalten, welche auf ${}_{\varepsilon_2}P_2$ in mit den ε gegen Null konvergierender Nähe von c_1' anfangen, ganz außerhalb ${}_{\varepsilon_2}P_2$ verlaufen, und wieder auf ${}_{\varepsilon_2}P_2$ in mit den ε gegen Null konvergierender Nähe von c_2' enden. Unter diesen gibt es wieder *wenigstens zwei*, deren jeder ein für ${}_{\varepsilon_1}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2}P_2$ gemeinsames äußeres Gebiet bestimmt, welches begrenzt wird vom genannten Streckenzuge von ${}_{\varepsilon_1}P_1$, einem Streckenzuge von ${}_{\varepsilon_2}P_2$ mit der reziproken Eigenschaft (diese beiden Streckenzüge nennen wir Hauptstreckenzüge), und weiter nur solchen Streckenzügen, welche ihren Anfangspunkt und Endpunkt beide in der Nähe von c_1' oder beide in der Nähe von c_2' haben. Diese so bestimmten äußeren Gebiete nennen wir die zu ${}_{\varepsilon_1}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2}P_2$ gehörigen *Hauptgebiete*. Lassen wir nun zunächst ${}_{\varepsilon_1}P_1$ ungeändert, ersetzen aber ${}_{\varepsilon_2}P_2$ durch ein nächstfolgendes approximierendes Polygon ${}_{\varepsilon_2'}P_2$, und betrachten ein zu ${}_{\varepsilon_1}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2'}P_2$ gehöriges Hauptgebiet H. Sein Hauptstreckenzug auf ${}_{\varepsilon_1}P_1$ kann nur für gewisse Teile in der Nähe von c_1' und c_2' innerhalb ${}_{\varepsilon_2}P_2$ fallen. Es führt also innerhalb H ein Streckenzug von ${}_{\varepsilon_2}P_2$ aus der Nähe von c_1' in die von c_2'; H enthält also als Teilgebiet ein zu ${}_{\varepsilon_1}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2}P_2$ gehöriges Hauptgebiet. Wir fahren nun fort, indem wir jetzt ${}_{\varepsilon_2'}P_2$ ungeändert lassen, ${}_{\varepsilon_1}P_1$ ersetzen durch ein nächstfolgendes approximierendes Polygon ${}_{\varepsilon_1'}P_1$ und die zu ${}_{\varepsilon_1'}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2'}P_2$ gehörigen Hauptgebiete betrachten. Jedes von ihnen enthält als Teilgebiet ein zu ${}_{\varepsilon_1}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2'}P_2$ gehöriges, also auch ein zu ${}_{\varepsilon_1}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2}P_2$ gehöriges Hauptgebiet. Wenn wir nun weiter immer wieder abwechselnd ${}_{\varepsilon_2^{(\nu)}}P_2$ durch ${}_{\varepsilon_2^{(\nu+1)}}P_2$ und ${}_{\varepsilon_1^{(\nu)}}P_1$ durch ${}_{\varepsilon_1^{(\nu+1)}}P_1$ ersetzen, so müssen immer wieder wenigstens zwei Hauptgebiete existieren. Unter den zu ${}_{\varepsilon_1}P_1$ und ${}_{\varepsilon_2}P_2$ gehörigen Hauptgebieten gibt es also wenigstens zwei, welche im weiteren zwar fortwährend wachsen, aber stets voneinander getrennt bleiben.

---

*) Auf diese Voraussetzungen, von denen man übrigens zeigen kann, daß die zweite eine Folge der ersten ist, stützt sich im Grunde auch Herr Schoenflies, obgleich er nur die Voraussetzung, daß C_1 und C_2 nicht identisch sind, ausdrücklich erwähnt.

Die Grenzgebilde der approximierenden Polygone, welche in C_1' und C_2', also in C' enthalten sind, bestimmen also mindestens zwei getrennte Gebiete, womit der Satz bewiesen ist.

Dieser Satz sagt nur eine Eigenschaft geschlossener Kurven besonderer Art aus; daß seine Voraussetzungen für die allgemeine geschlossene Kurve nicht notwendig erfüllt sind, haben wir in V erkannt. Aber sogar für diese besondere Kurvenart läßt sich aus ihm nicht auf die Invarianz schließen. Der Schluß benutzt nämlich die äußere Randkurve der Bildmenge, welche nach II nicht zu existieren braucht.

Zu § 4. Das Resultat dieses Paragraphen kann der Hauptsache nach an dieser Stelle gefolgert werden, die daselbst gegebene Herleitung ist aber nicht einwandfrei, zunächst weil § 3 benutzt wird, was wir als unerlaubt erkannt haben, und sodann, weil S. 161 oben ohne Grund stillschweigend vorausgesetzt wird, daß, wenn P' sich unbeschränkt der Kurve $\mathfrak{C}'$ nähert, ein willkürlicher innerer Punkt von $\mathfrak{C}'$ schließlich durch P' von $\mathfrak{C}'$ getrennt wird.

Dem ersten Mangel kann abgeholfen werden, indem wir statt geschlossener Kurven Polygone P betrachten, und uns auf den Jordanschen Kurvensatz, welcher unabhängig bewiesen werden kann, stützen.

Der zweite Mangel läßt sich beseitigen, indem wir den Beweis wie folgt führen:

Wir konstruieren ein Polygon Q, welches P in zwei Punkten kreuzt. So werden vier Streckenzüge P_1, P_2, Q_1 und Q_2 bestimmt, und ebenso vier Gebiete G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}. Nehmen wir nun an, daß in dem Bilde Q_1' und Q_2' beide innerhalb P' liegen. $\mathfrak{J}(P')$ wird sodann durch Q_1' in zwei Gebiete zerlegt*); und eines dieser beiden Gebiete wieder durch Q_2'. So werden drei Teilgebiete von $\mathfrak{J}(P')$ bestimmt, deren eines nur Punkte von Q_1' und Q_2' auf seiner Grenze besitzt, also von keinem der Gebiete G das Bild enthalten kann. Von den beiden übrigen Teilgebieten enthält aber jedes in seiner Grenze das Bild der Grenze nur eines der vier Gebiete G_r kann also auch das Bild nur eines der vier Gebiete in sich enthalten. Es blieben also wenigstens zwei der Gebiete G übrig, deren Bilder wir nicht unterzubringen wüßten, und die Annahme hat sich als unmöglich herausgestellt.

Der Satz VI läßt sich also hier beweisen, wenn wir das Wort „Kurven“ durch „Polygone“ ersetzen.

---

*) Nämlich das von P_1' und Q_1' bestimmte Innengebiet, welches für jeden Punkt von P_1' alle in einer gewissen Umgebung dieses Punktes enthaltenen Punkte von $\mathfrak{J}(P')$ enthalten muß, und das von P_2' und Q_1' bestimmte Innengebiet. Ein drittes Teilgebiet würde nämlich auf seiner Grenze nur Punkte von Q_1' besitzen können, und dies ist unmöglich.

Die S. 162 oben genannte Möglichkeit könnte gleich ausgeschlossen werden; wenn sie nämlich für zwei beliebige Polygone eintreten würde, so gäbe es auch ein Paar von Polygonen mit derselben Eigenschaft in beliebiger Nähe voneinander; sodann würden aber von einer der Bildkurven zwei Gebiete bestimmt werden, deren eines sich nur beliebig wenig von ihr entfernen könnte, was unmöglich ist.

Zu § 5. Der Satz, daß eine geschlossene Kurve, welche innerhalb eines Gebietes, das eineindeutig und stetig abgebildet wird, liegt, dabei wieder in eine geschlossene Kurve übergeht, und eventuell ihre Fläche in die der Bildkurve, ist richtig; der Beweis aber bedarf der Ergänzung.

Zunächst sollten die Polygone P_λ (z. B. nach Kap. VI, S. 210) genauer festgelegt werden.

Unrichtig ist dann aber, aus den Relationen (S. 162):

$$\varrho(p_\nu', P_{\nu+1}') < \varepsilon, \qquad \varrho(p_{\nu+1}', P_\nu') < \varepsilon$$

zu folgern, daß die geschlossenen Kurven P_ν' schließlich überall dicht liegen. Als Beispiel des Gegenteiles betrachte man in Fig. 1 in J und in A je ein in hinreichender Nähe approximierendes Polygon. Sie genügen den obenstehenden Relationen; dennoch lassen sie zwischen sich ein endliches Gebiet frei.

In unserem Falle aber kann man bemerken, daß, wenn in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ ein freies Gebiet übrig bliebe, man auf seiner Grenze einen erreichbaren Punkt Q' wählen könnte; sei Q' das Bild von Q, so könnte man um Q einen genügend kleinen Kreis legen derart, daß die ihm entsprechende geschlossene Kurve um Q' teilweise außerhalb von allen Kurven P' verliefe, während alle Punkte des Kreises den Polygonen P angehörten, was unmöglich ist.

Der fehlende Nachweis, daß $\mathfrak{C}'$ wieder eine geschlossene Kurve ist, kann nun in analoger Weise geliefert werden, indem man zeigt, daß zwischen den Bildkurven der Polygone, welche $\mathfrak{C}$ von außen und von innen approximieren, kein freies Gebiet enthalten sein kann, sodaß $\mathfrak{C}'$ gerade zwei Gebiete bestimmt, welche beide alle Punkte von $\mathfrak{C}'$ als Grenzpunkte besitzen.

Satz VIII ist richtig, aber für Satz VII fehlen genügende Gründe. Aus dem Vorhergehenden läßt sich nämlich nur dieses folgern: „Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild einer Kurvenfläche ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit seiner Grenze, und alle Punkte dieser Grenze sind zugleich Grenzpunkte der Restgebiete.“

Zu § 8. Auch hier in dem Beweise des Jordanschen Kurvensatzes wird die geschlossene Kurve gefolgert aus der Eigenschaft, daß jeder Punkt der von außen und von innen approximierenden Polygone schließlich von der Kurve, und jeder Punkt der Kurve schließlich von den beiden Polygonen einen beliebig kleinen Abstand erhält. Es ist wieder eine (übrigens leicht zu gebende) Ergänzung erforderlich, um zu zeigen, daß zwischen den von außen und den von innen approximierenden Polygonen kein endliches Gebiet eingeschlossen bleiben kann.*)

Zu § 15. Die Behauptung, daß die Invarianz der Erreichbarkeit auch in dem Sinne stattfindet, daß sie nicht bloß für stetige Transformationen der ganzen Ebene, sondern auch für stetige Abbildungen von bloßen Kurven oder sonstigen linienhaften Mengen aufeinander statt hat, wird von Herrn Schoenflies, wie der Satz XVII zeigt, in dem Sinne gemeint, daß unter „Erreichbarkeit" die Erreichbarkeit aller Punkte der Kurve zusammen verstanden werden soll. Ich erlaube mir hier die Bemerkung, daß, wenn man die Erreichbarkeit eines einzelnen Punktes ins Auge faßt, die Invarianz nicht bestehen bleibt, wie folgendes Beispiel zeigt:

In Fig. 4a konvergiert eine Näherungskurve nur gegen *eine* Seite eines einfachen Kurvenbogens; in Fig. 4b im eineindeutigen und stetigen

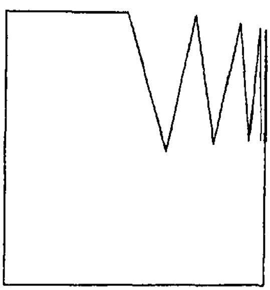

Fig. 4a.

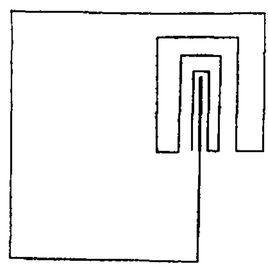

Fig. 4b.

Abbilde gegen *beide* Seiten. In der Weise kommen Punkte heraus, welche *vor* der Abbildung erreichbar, *nachher* unerreichbar sind.

Der Beweis des Satzes XVII bedarf einer wesentlichen Ergänzung**); die Mengen T_ν', deren unbegrenzte Abnahme hier bewiesen wird, sind nämlich nicht die Mengen T_ν, aus deren unbegrenzter Abnahme im § 10 die Erreichbarkeit des Grenzpunktes gefolgert wird. Man stellt die Sache richtig***), indem man bemerkt, daß T_ν zwar außer T_ν' noch mit T_ν' zusammenhängende Bestandteile ${}_\alpha S_\nu$ enthalten kann, daß aber je zwei

*) Herrn Schoenflies' Einwendungen gegen den Jordanschen Beweis scheinen mir unbegründet.

**) Der in Annalen Bd. 62 § 12 enthaltene Beweis des engeren Satzes ist in anderen Punkten unzutreffend.

***) Wie Herr Schoenflies mir brieflich bemerkt, kann die notwendige Ergänzung auch durch die Überlegungen des § 5 von Kap. VI geliefert werden.

solchen Bestandteilen zwei verschiedene Bogenmengen des Kreises entsprechen. Mit den entsprechenden Bogenmengen konvergieren nun auch die zu einem selben ν gehörigen Bestandteile ${}_{\alpha}S_{\nu}$ zu Null, also auch die Mengen T_{ν}.

Zu § 16. Zum Beweise des Satzes XVIII ist zu bemerken, daß zwar von § 3 Gebrauch gemacht wird, jedoch nur von demjenigen Bestandteil seines Resultates, den wir oben als richtig herausgehoben haben.

Wesentlich unerlaubt ist aber wieder die Voraussetzung der Existenz der äußeren Randkurve eines endlichen Gebietes.

Man kann indes den Satz XVIII unmittelbar folgern aus dem unabhängig bewiesenen Jordanschen Satze, in Zusammenhang mit § 12 und § 15.

Zu § 17. Hier wird als ein nach dem Vorhergehenden evidenter Satz ausgesprochen, daß jede perfekte nirgends dichte Menge eineindeutiges stetiges Bild einer aus Strecken aufgebauten Menge ist. Dazu möchte ich bemerken, daß der Satz zwar in einem gewissen Sinne richtig ist, aber eines ausführlichen Beweises bedarf, wie ich an anderer Stelle ausführen werde.

Zusammenfassung. Von den Schoenfliesschen (entweder hergeleiteten oder als selbstverständlich angewendeten) Sätzen sind folgende unrichtig:

daß jede geschlossene Kurve sich in zwei eigentliche Kurvenbogen zerlegen läßt,

daß bei der Zerlegung einer geschlossenen Kurve in zwei Kurvenbogen wenigstens einer von ihnen eigentlich ist,

daß jedes geschränkte, einfach zusammenhängende Gebiet eine geschlossene äußere Randkurve aufweist,

daß jedes geschränkte, einfach zusammenhängende Gebiet durch seine Grenze eindeutig bestimmt ist,

daß jede geschränkte, abgeschlossene Menge, welche gemeinsame Grenze von zwei Gebieten ohne gemeinschaftliche Punkte ist, eine geschlossene Kurve ist;

während folgende zunächst unsicher bleiben:

daß das eineindeutige stetige Bild einer geschlossenen Kurve wieder eine solche ist,

daß das eineindeutige stetige Bild einer Kurvenfläche wieder eine Kurvenfläche ist.

Amsterdam, 14. Mai 1909.