SULLA SOMMABILITÀ DELLE SERIE, CON PARTICOLARE RIGUARDO ALLE SERIE DI DIRICHLET.

Nota di **Pia Nalli** (Palermo).

Adunanza del 23 luglio 1916.

È noto che, sotto certe condizioni, la somma di una serie divergente viene definita come il limite al quale tende una media delle somme parziali della serie, dipendente da un parametro continuo o discontinuo, quando questo parametro tende ad un limite finito od infinito.

Data la serie

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

e, posto

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

una forma generale di media tra i numeri $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, è la seguente

$$(2) \quad \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n s_n}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n},$$

dove le p_n sono numeri reali non negativi tali che le due serie che si presentano nella (2) siano convergenti ¹⁾.

Tra le medie della forma (2) sono notevoli le *medie tipiche di RIESZ* ²⁾.

Data una successione di numeri non negativi, crescente ed illimitata:

$$(3) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots,$$

ed un numero positivo α , si chiama media tipica di ordine α , relativa alla successione (3), per la serie (1), l'espressione

$$\sigma(y) = \frac{u_1(y - \lambda_1)^\alpha + u_2(y - \lambda_2)^\alpha + \dots + u_i(y - \lambda_i)^\alpha}{y^\alpha},$$

¹⁾ Cfr. p. es: E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1901), pp. 87-96.

²⁾ M. RIESZ, *Sur la sommation des séries de DIRICHLET* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CXLIX (II^e semestre 1909), pp. 18-21].

dove i_y è un intero positivo tale che si ha

$$\lambda_{i_y} \leq y < \lambda_{i_y+1}$$

Questa media dipende dal parametro continuo y e si può mettere sotto un'altra forma la quale mostra come essa rientri nella forma (2).

Posto

$$U(y) = \sum_{\lambda_n \leq y} u_n,$$

si à

$$\sigma(y) = \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha-1} dx.$$

Si dice che la (1) è sommabile di ordine α se esiste il limite di $\sigma(y)$ per $y = \infty$.

Il RIESZ ha utilizzato le sue medie per lo studio delle serie di DIRICHLET della forma

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

In particolare, se è $\lambda_n = n$, il metodo sommatorio di RIESZ diventa equivalente al metodo delle medie aritmetiche di CESÀRO ³⁾.

In un recente lavoro ⁴⁾ ho accennato ad un metodo sommatorio che si può considerare come una generalizzazione di quello di RIESZ.

Data una funzione $g(y)$ positiva, definita per $y \geq 0$, e tale che la funzione

$$g(1, y) = \int_0^y g(x) dx$$

sia illimitata, per $\alpha > 0$ si ponga

$$g(\alpha, y) = \int_0^y g(x)(y-x)^{\alpha-1} dx.$$

Si dirà che la (1) è sommabile di ordine α , rispetto alla funzione $g(y)$, se esiste il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(5) \quad \frac{1}{g(\alpha, y)} \int_0^y U(x)g(x)(y-x)^{\alpha-1} dx.$$

Nella presente Nota mi occupo dello studio di questo metodo sommatorio per la funzione $g(x) = e^{cx}$, supponendo, con maggiore generalità, che c sia reale o complesso ed abbia parte reale positiva: la (5) è allora una media che rientra nella forma (2), supponendo che in questa le p_n possano anche essere dei numeri complessi.

³⁾ M. RIESZ, *Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CLII (1^{er} semestre 1911), pp. 1651-1654].

⁴⁾ P. NALLI, *Sulle serie di DIRICHLET* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XL (2^o semestre 1915), pp. 44-70], pp. 57-58.

Ponendo nella (5) $g(x) = e^x$, condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione di y che si ottiene tenda ad un limite per $y = \infty$ è che esista il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(6) \quad N(c, \alpha, y) = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha-1} e^{-c(y-x)} dx.$$

Nella presente Nota dimostro che, fissato c , se esiste il limite per $y = \infty$ di $N(c, \alpha', y)$ per un particolare valore $\alpha' > 0$, esiste il limite di $N(c, \alpha, y)$ per qualunque valore $\alpha > \alpha'$; e, fissato α , se esiste il limite di $N(c', \alpha, y)$ per un particolare valore c' avente parte reale positiva, esiste il limite di $N(c, \alpha, y)$ per qualunque valore di c avente parte reale positiva.

Dimostro ancora che il limite di $N(c, \alpha, y)$ non dipende nè da α nè da c .

Ho delle ragioni per ritenere, quantunque non sia ancora riuscita a superare le difficoltà puramente materiali della dimostrazione, che perchè esista il limite di $N(c, \alpha, y)$ è necessario e sufficiente che la (1) sia sommabile per mezzo della media tipica di RIESZ di ordine α e relativa alla successione

$$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}, \dots$$

Ritengo però che il definire la somma della (1) come il limite di $N(c, \alpha, y)$ per $y = \infty$, possa presentare dei vantaggi, rispetto al metodo sommatorio di RIESZ, per lo studio delle serie di DIRICHLET della forma (4). Così, al n° 3, dimostro che, posto nella (6) $u_n = a_n e^{-\lambda_n}$, si ha, per $\alpha \geq 1$,

$$(7) \quad N(s - s_0, \alpha, y) = \frac{(s - s_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y A(\alpha - 1, u; s_0) u^{\alpha-1} e^{-(s-s_0)u} du,$$

essendo s ed s_0 due numeri complessi qualunque diversi, ed

$$A(\alpha - 1, u; s_0) = \frac{\alpha - 1}{u^{\alpha-1}} \int_0^u \left(\sum_{\lambda_n \leq x} a_n e^{-\lambda_n s_0} \right) (u-x)^{\alpha-2} dx,$$

[cioè $A(\alpha - 1, u; s_0)$ è la media tipica di RIESZ di ordine $\alpha - 1$ relativa alla successione (3) e corrispondente alla serie che ha per termine generale $a_n e^{-\lambda_n s_0}$].

La (7) permette di dedurre immediatamente dai due già enunciati, altri due teoremi relativi alle serie di DIRICHLET.

Nei n° 5, 6 e 7 della presente Nota mostro che un metodo sommatorio da me definito nella Memoria già citata si può fare rientrare nella forma generale di media data dalla (2), ed arrivo ad un metodo sommatorio che può applicarsi alla serie (1) quando per essa esiste il limite di $N(c, \alpha, y)$ per $y = \infty$, per un particolare valore di α , qualunque questo sia.

1. Data la serie (1), la successione (3) ed un numero c avente parte reale positiva, si definisca $N(c, \alpha, y)$ per mezzo della (6).

Si può facilmente dimostrare che se la (1) è convergente, cioè se esiste il limite di $U(y)$ per $y = \infty$, a questo limite tende $N(c, \alpha, y)$ quando y tende ad ∞ .

Sia β un numero positivo; dimostreremo la seguente relazione:

$$(8) \quad N(c, \alpha + \beta, y) = \frac{c^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^y N(c, \alpha, x) (y-x)^{\beta-1} e^{-c(y-x)} dx.$$

Supponiamo dapprima che α non sia un numero intero e denotiamo con r la parte intera di $\alpha - 1$ ($r \geq -1$). Poniamo

$$(9) \quad h = 2 + r - \alpha;$$

sarà h un numero positivo minore di 1.

Dalla (6), con successive derivazioni a destra, si avrà

$$\frac{d^{r+1}[N(c, \alpha, y)e^{cy}]}{dy^{r+1}} = \frac{c^\alpha}{\Gamma(1-h)} \int_0^y \frac{U(x)e^{cx}}{(y-x)^h} dx.$$

Da questa, per una nota formola d'inversione di ABEL, si trae

$$(10) \quad U(y)e^{cy} = \frac{\Gamma(1-h)}{c^\alpha} \cdot \frac{\sin \pi h}{\pi} \int_0^y \frac{d^{r+2}[N(c, \alpha, x)e^{cx}]}{dx^{r+2}} (y-x)^{h-1} dx,$$

e perciò, ricordando l'identità

$$\Gamma(h)\Gamma(1-h) = \frac{\pi}{\sin \pi h},$$

avremo

$$c^\alpha U(y)e^{cy} = \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^y \frac{d^{r+2}[N(c, \alpha, x)e^{cx}]}{dx^{r+2}} (y-x)^{h-1} dx.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} N(c, \alpha + \beta, y) &= \frac{c^\beta}{\Gamma(h)\Gamma(\alpha + \beta)} e^{-cy} \int_0^y (y-x)^{\alpha+\beta-1} dx \times \\ &\times \int_0^x \frac{d^{r+2}[N(c, \alpha, t)e^{ct}]}{dt^{r+2}} (x-t)^{h-1} dt, \end{aligned}$$

ed applicando al secondo membro la formola d'inversione di DIRICHLET, si ottiene

$$\begin{aligned} N(c, \alpha + \beta, y) &= \frac{c^\beta}{\Gamma(h)\Gamma(\alpha + \beta)} e^{-cy} \int_0^y \frac{d^{r+2}[N(c, \alpha, t)e^{ct}]}{dt^{r+2}} dt \times \\ &\times \int_0^y (y-x)^{\alpha+\beta-1} (x-t)^{h-1} dx. \end{aligned}$$

Si ha intanto

$$\int_0^y (y-x)^{\alpha+\beta-1} (x-t)^{h-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(h)}{\Gamma(\alpha + \beta + h)} (y-t)^{\alpha+\beta+h-1},$$

quindi, tenendo conto della (9), possiamo scrivere

$$N(c, \alpha + \beta, y) = \frac{c^\beta}{\Gamma(r + \beta + 2)} e^{-cy} \int_0^y \frac{d^{r+2}[N(c, \alpha, t)e^{ct}]}{dt^{r+2}} (y-t)^{r+\beta+1} dt.$$

Da questa, con $r+2$ successive integrazioni per parti, si ottiene la (8).

Se α è un numero intero la (8) si dimostra più facilmente. Posto in tale caso $r = \alpha - 1$, invece della (10) si avrà

$$U(y)e^{cy} = \frac{1}{c^\alpha} \cdot \frac{d^{r+1}[N(c, \alpha, y)e^{cy}]}{dy^{r+1}}.$$

Il secondo membro della (8) ha la stessa forma del secondo membro della (6), quindi se $N(c, \alpha, y)$ tende ad un limite per $y = \infty$, allo stesso limite tende $N(c, \alpha + \beta, y)$ per qualunque $\beta > 0$.

2. Dimostriamo ora che, fissato α , se esiste il limite di $N(c_1, \alpha, y)$ per un particolare c_1 avente parte reale positiva, esisterà il limite di $N(c, \alpha, y)$ per qualunque valore di c avente parte reale positiva. Inoltre, tale limite sarà indipendente da c .

Cominciamo col dimostrare il teorema per i valori di c soddisfacenti alla condizione

$$(11) \quad |c - c_1| < g_1,$$

dove g_1 denota la parte reale di c_1 .

Si ha allora

$$\begin{aligned} N(c, \alpha, y) &= \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha-1} e^{-c_1(y-x)} e^{(c_1-c)(y-x)} dx = \\ &= \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c_1 - c)^n}{\Gamma(n+1)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha+n-1} e^{-c_1(y-x)} dx, \end{aligned}$$

che si può scrivere

$$(12) \quad N(c, \alpha, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{c}{c_1}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{c}{c_1}\right)^n N(c_1, \alpha+n, y).$$

È facile vedere che la serie che compare nel secondo membro di questa eguaglianza converge uniformemente rispetto ad y , variabile nell'intervallo $(0, \infty)$.

Infatti, se con L denotiamo una costante tale da avere

$$|N(c_1, \alpha, y)| < L$$

per qualunque y , deduciamo dalla (8)

$$\begin{aligned} |N(c_1, \alpha+n, y)| &< L |c_1|^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^y (y-x)^{n-1} e^{-g_1(y-x)} dx < \\ &< L |c_1|^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-g_1 u} du = L \frac{|c_1|^n}{g_1^n}, \end{aligned}$$

quindi, per qualunque valore di y , il termine generale della serie che consideriamo non supera

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{|c_1 - c|^n}{g_1^n}$$

che, per la (11), è il termine generale di una serie convergente.

Essendo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N(c_1, \alpha+n, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} N(c_1, \alpha, y),$$

per l'uniforme convergenza del secondo membro della (12), avremo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N(c, \alpha, y) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{c}{c_1} \right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{c}{c_1} \right)^n \right] \lim_{y \rightarrow \infty} N(c_1, \alpha, y)$$

Ma si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{c}{c_1} \right)^n = \left[1 - \left(1 - \frac{c}{c_1} \right) \right]^{-\alpha} = \left(\frac{c}{c_1} \right)^{-\alpha},$$

si conclude dunque finalmente

$$(13) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} N(c, \alpha, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} N(c_1, \alpha, y).$$

Il teorema resta così dimostrato quando c soddisfa alla (11).

Se poi c non soddisfa alla (11), possiamo inserire tra c_1 e c altre costanti in numero finito: $c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$, aventi parti reali positive e tali che per due consecutive, c_i, c_{i+1} , si abbia

$$|c_{i+1} - c_i| < g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) (c_n = c),$$

dove g_i denota la parte reale di c_i . Si può dunque asserire che se $N(c_i, \alpha, y)$ tende ad un limite per $y \rightarrow \infty$, allo stesso limite tenderà $N(c_{i+1}, \alpha, y)$, e perciò, se esiste il limite di $N(c_1, \alpha, y)$ è soddisfatta la (13). Il teorema resta così dimostrato in ogni caso.

3. Ai teoremi dimostrati si può dare altra forma: si hanno allora due teoremi relativi alle serie di DIRICHLET.

Sia la serie di DIRICHLET

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

dove la successione delle λ_n è la (3), s è una variabile complessa della quale denotiamo con σ la parte reale e con t il coefficiente dell'unità immaginaria.

Sia $s_0 = \sigma_0 + it_0$ un particolare valore della variabile complessa s . Si ponga per $y \geq 0$

$$(15) \quad S(y; s_0) = \sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n s_0},$$

e, supposto α reale e positivo,

$$(16) \quad A(\alpha, y; s_0) = \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y S(u; s_0) (y-u)^{\alpha-1} du$$

per $y > 0$, ed $A(\alpha, 0; s_0) = S(0; s_0)$.

Posto

$$(17) \quad T(y) = \sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n s},$$

dimosteremo la seguente relazione

$$(18) \quad \int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \int_0^y T(x) (y-x)^\alpha e^{-(s-s_0)(y-x)} dx.$$

Si ha, per la (16),

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha \int_0^y e^{-(s-s_0)u} du \int_0^u S(v; s_0) (u-v)^{\alpha-1} dv,$$

ed applicando la formola d'inversione di DIRICHLET

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha \int_0^y S(v; s_0) dv \int_v^y e^{-(s-s_0)u} (u-v)^{\alpha-1} du.$$

Cambiando la variabile u in una variabile x per mezzo della trasformazione $u-v=x$, si avrà

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha \int_0^y S(v; s_0) e^{-(s-s_0)v} dv \int_0^{y-v} e^{-(s-s_0)x} x^{\alpha-1} dx.$$

Integrando per parti rispetto a v si ottiene

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha \int_0^y e^{-(s-s_0)(y-v)} (y-v)^{\alpha-1} dv \int_0^v S(u; s_0) e^{-(s-s_0)u} du.$$

Intanto, tenendo conto della (17), si ha

$$S(u) = -(s-s_0) \int_0^u T(x) e^{(s-s_0)x} dx + T(u) e^{(s-s_0)u},$$

e perciò

$$\int_0^v S(u) e^{-(s-s_0)u} du = -(s-s_0) \int_0^v du \int_0^u T(x) e^{-(s-s_0)(u-x)} dx + \int_0^v T(u) du.$$

Applicando al primo termine del secondo membro la formola d'inversione di DIRICHLET si trova facilmente.

$$\int_0^v S(u) e^{-(s-s_0)u} du = e^{-(s-s_0)v} \int_0^v T(x) e^{(s-s_0)x} dx,$$

e perciò

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha e^{-(s-s_0)y} \int_0^y (y-v)^{\alpha-1} dv \int_0^v T(x) e^{(s-s_0)x} dx.$$

Applicando ancora una volta la formola d'inversione si ottiene la (18). Da essa può ricavarsi la (7).

Possiamo dunque dire che *condizione necessaria e sufficiente affinchè esista il limite, per $y = \infty$, del secondo membro della (18), è che esista l'integrale*

$$\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du.$$

Al teorema dimostrato al n° 2 si può dunque dare la seguente forma:

Se per due punti $s = \sigma + it$ ed $s_0 = \sigma_0 + it_0$, con $\sigma_0 < \sigma$, esiste l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du$, esisterà l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha, u; s_1) u^\alpha e^{-(s-s_1)u} du$ per qua-

lunque punto $s_1 = \sigma_1 + it_1$ soddisfacente alla condizione $\sigma_1 < \sigma$, e sussisterà l'uguaglianza

$$(s - s_0)^{\alpha+1} \int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = (s - s_1)^{\alpha+1} \int_0^\infty A(\alpha, u; s_1) u^\alpha e^{-(s-s_1)u} du.$$

4. Si dimostra ⁵⁾ che se esiste l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha - 1, u; s_0) u^{\alpha-1} e^{-(s-s_0)u} du$ ed inoltre è $\sigma > \sigma_0$, esiste anche il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(19) \quad \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y T(u) (y - u)^{\alpha-1} du,$$

e cioè, riprendendo le notazioni dell'introduzione, se esiste il limite di $N(c, \alpha, y)$ per $y = \infty$ [e per ciò è necessario e sufficiente che esista il limite di $N(1, \alpha, y)$] esisterà, e sarà ad esso eguale, il limite, per $y = \infty$, dell'espressione

$$\frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y U(x) (y - x)^{\alpha-1} dx,$$

cioè la (1) sarà sommabile di ordine α secondo RIESZ.

Ciò potrebbe anche dimostrarsi direttamente.

Nella Memoria citata ho dimostrato ancora che se esiste l'integrale

$$\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du$$

ed è $\sigma > \sigma_0$, esiste anche l'integrale

$$\int_0^\infty A(\alpha', u; s_0) u^{\alpha'} e^{-(s-s_0)u} du$$

per qualunque $\alpha' > \alpha$, e si ha

$$\frac{(s - s_0)^{\alpha'+1}}{\Gamma(\alpha' + 1)} \int_0^\infty A(\alpha', u; s_0) u^{\alpha'} e^{-(s-s_0)u} du = \frac{(s - s_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du.$$

Questo teorema è equivalente a quello enunciato alla fine del n° 1.

Si osservi ancora che nella Memoria già citata ho dimostrato che se in ogni punto s del semipiano $\sigma > \beta$ la (19) tende ad un limite per $y = \infty$, se s_0 è un punto per il quale si ha $\sigma_0 \leq \beta$, si avrà nel semipiano $\sigma > \beta$

$$\lim_{y=\infty} \frac{\alpha + 1}{y^{\alpha+1}} \int_0^y T(u) (y - u)^\alpha du = \frac{(s - s_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty A(\alpha, v; s_0) v^\alpha e^{-(s-s_0)v} dv,$$

e perciò

$$\lim_{y=\infty} \frac{\alpha + 1}{y^{\alpha+1}} \int_0^y T(u) (y - u)^\alpha du = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \lim_{y=\infty} \int_0^y T(u) (y - u)^\alpha e^{-(y-u)} du.$$

Ne viene che il teorema enunciato alla fine del n° 3 era già implicitamente dimo-

⁵⁾ l. c. ⁴⁾, pp. 49-52.

strato quando il punto s è interno al semipiano nel quale la (14) è sommabile dell'ordine $\alpha + 1$, secondo RIESZ: nella presente Nota esso viene dimostrato anche nel caso in cui l'ascissa del punto s coincide con l'ascissa di sommabilità di ordine $\alpha + 1$ della (14).

5. Nella Memoria citata ho dato un procedimento di calcolo che permette di sommare la (14) in ogni punto s di un semipiano $\sigma > \sigma_1$ quando, fissato comunque $\eta > 0$, nel semipiano $\sigma > \sigma_1 + \eta$ esiste l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du$ per un conveniente valore di α e per un punto s_0 del semipiano $\sigma \leq \sigma_1$.

La somma della (14) viene definita nel modo seguente.

Sia $\varphi(y)$ una funzione di y nell'intervallo $(0, +\infty)$, positiva, crescente ed illimitata, soddisfacente alla condizione

$$(20) \quad \varphi(y) = o\left(\frac{y}{\log y}\right).$$

Se s è un punto del semipiano $\sigma > \sigma_1$ ed esiste il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(21) \quad \frac{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y) + 1)} \int_0^y A(\varphi(y), u; s_0) u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du,$$

tale limite si chiamerà la somma della (14) nel punto s .

È facile vedere che questo procedimento sommatorio può ricondursi al tipo di una media.

Operando come al n° 3 si dimostra la relazione

$$(22) \quad \int_0^y A(\varphi(y), u; s_0) u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du = \int_0^y T(x)(y-x)^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)(y-x)} dx.$$

Ora si à

$$(23) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\varphi(y) + 1)}{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}} \frac{1}{\int_0^y (y-x)^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)(y-x)} dx} = 1.$$

Infatti, essendo

$$\frac{\Gamma(\varphi(y) + 1)}{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}} = \int_0^\infty u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du,$$

la (23) resterà dimostrata se si dimostra che è

$$(24) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_y^\infty u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du = 0.$$

Ponendo $\sigma - \sigma_0 = \alpha_1 + \alpha_2$, con α_1 ed α_2 positivi, avremo

$$\left| \int_y^\infty u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du \right| \leq \int_y^\infty u^{\varphi(y)} e^{-\alpha_1 u} e^{-\alpha_2 u} du.$$

La funzione di u , $u^{\varphi(y)} e^{-\alpha_1 u}$, quando y è sufficientemente grande, è decrescente nell'intervallo $(y, +\infty)$, quindi sarà

$$\int_y^\infty u^{\varphi(y)} e^{-\alpha_1 u} e^{-\alpha_2 u} du < y^{\varphi(y)} e^{-\alpha_1 y} \int_y^\infty e^{-\alpha_2 u} du = \frac{1}{\alpha_2} e^{\left[\frac{\varphi(y) \log y}{y} - (1-\alpha_2) \right]}.$$

Per la (20) resta dunque dimostrata la (24).

Si può dunque dire che il limite per $y = \infty$ della (21) esiste quando e soltanto quando esiste il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$\frac{\int_0^y T(x) (y-x)^{\varphi(y)} e^{(s-s_0)x} dx}{\int_0^y (y-x)^{\varphi(y)} e^{(s-s_0)x} dx},$$

che, relativamente alla (14), ha la forma di una media dipendente dal parametro y .

6. Si arriva così ad un procedimento che può servire a definire la somma di una serie. Data la serie (1) ed un numero c avente parte reale positiva, si chiamerà somma della (1) il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(25) \quad \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y U(x) (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx,$$

quando questo limite esiste.

Perchè questa definizione sia accettabile, si dovrebbe dimostrare che se la (1) converge, la (25) ha per limite la somma della serie. Si può dimostrare che ciò è vero quando c è reale.

Infatti, chiamando U la somma della (1), supposta convergente, fissato $\varepsilon > 0$ si determini h in modo che per $x \geq h$ sia $|U(x) - U| < \varepsilon$. Si avrà allora, se per qualunque x è

$$|U(x)| \leq \frac{M}{2},$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y (U(x) - U) (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx \right| \leq \\ & \leq M \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^h (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx + \\ & + \varepsilon \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_h^y (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx. \end{aligned} \right.$$

Il secondo termine del secondo membro di questa disuguaglianza non supera ε ; il primo termine non supera

$$M h \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} y^{\varphi(y)} e^{-cy} e^{ch} = M h e^{ch} \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} e^{\left[\frac{\varphi(y) \log y}{y} - c \right]},$$

e perciò, fissato h , tende a zero quando y tende ad ∞ . Il primo membro della (26)

tende dunque a zero quando y tende ad ∞ , ed essendo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx = 1,$$

si avrà

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx = U.$$

7. Si può dimostrare che se esiste il limite di $N(c, \alpha + 1, y)$ per $y = \infty$ e c è reale, esiste anche il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$\frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx$$

ed i due limiti sono eguali.

Ciò equivale a dimostrare che se esiste l'integrale $\int_0^\infty A(x, u; s_0) e^{-(s-s_0)u} du$, ed $s - s_0$ è una quantità reale e positiva, esiste il limite per $y = \infty$ della (21) e questo limite è

$$\frac{(s - s_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty A(x, u; s_0) e^{-(s-s_0)u} du.$$

Infatti, essendo

$$A(\varphi(y), u; s_0) u^{\varphi(y)} = \frac{\Gamma(\varphi(y)+1)}{\Gamma(\varphi(y)-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \times \\ \times \int_0^u A(\alpha, x; s_0)(u-x)^{\varphi(y)-\alpha-1} x^\alpha dx \quad ^6),$$

si avrà

$$(27) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y A(\varphi(y), u; s_0) u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du \\ & = \frac{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^y e^{-(s-s_0)u} du \int_0^u A(\alpha, x; s_0)(u-x)^{\varphi(y)-\alpha-1} x^\alpha dx. \end{aligned} \right.$$

Applicando al secondo membro la formola d'inversione di DIRICHLET e cambiando poi la variabile u nella variabile $v = u - x$, si trova che il secondo membro della (27) è uguale ad

$$(28) \frac{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^y A(\alpha, x; s_0) x^\alpha e^{-(s-s_0)x} dx \int_0^{y-x} v^{\varphi(y)-\alpha-1} e^{-(s-s_0)v} dv.$$

Per semplicità poniamo

$$\int_0^y A(\alpha, x; s_0) x^\alpha e^{-(s-s_0)x} dx = f(y)$$

⁶⁾ l. c. ⁴⁾, p. 49.

e

$$\varphi(y) - \alpha - 1 = \psi(y);$$

la (28), integrando per parti rispetto ad x , si può scrivere

$$\frac{(s - s_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{(s - s_0)^{\psi(y)+1}}{\Gamma(\psi(y)+1)} \int_0^y f(x)(y-x)^{\psi(y)} e^{-(s-s_0)(y-x)} dx,$$

Ma per quando si è detto al n° precedente si ha

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(s - s_0)^{\psi(y)+1}}{\Gamma(\psi(y)+1)} \int_0^y f(x)(y-x)^{\psi(y)} e^{-(s-s_0)(y-x)} dx \\ = \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \int_0^\infty A(\alpha, x; s_0) x^\alpha e^{-(s-s_0)x} dx; \end{aligned}$$

il teorema resta così dimostrato

Palermo, marzo 1916.

PIA NALLI.