Ueber die Aetherbewegung in Krystallen.

Von CARL NEUMANN in LEIPZIG.

Die vorliegende Untersuchung wird sich beschränken auf die sogenannten zwei und zweigliedrigen Krystalle, d. i. auf Krystalle, welche symmetrisch sind in Bezug auf drei zu einander senkrechte Ebenen. Es mögen zunächst diejenigen Prämissen, von denen die Untersuchung ausgehen wird, kurz angegeben werden.

§. 1.

Die Prämissen der Untersuchung.

I. Hypothese. *Das Aethermedium besteht aus einem System äusserst feiner Theilchen, welche sowohl ihren gegenseitigen Einwirkungen, als auch den Einwirkungen der ponderablen Molecüle unterworfen sind. Diese Einwirkungen finden statt in der Richtung der Entfernung; hängen ferner, was ihre Intensität anbelangt, von der Grösse der Entfernung ab; und werden Null, sobald die Entfernung eine gewisse sehr kleine Länge übersteigt.*

II. Hypothese. *Ausserdem hat der Aether die Eigenschaft, denjenigen Bewegungen, welche mit einer Aenderung seiner Dichtigkeit verknüpft sind, mit unverhältnissmässig viel grösserer Energie zu widerstehen, als andern Bewegungen, bei welchen solches nicht der Fall ist. Die Dichtigkeit des Aethers ist demnach sehr starken Kräften gegenüber allerdings veränderlich, hingegen schwachen Kräften gegenüber so gut wie unveränderlich.*

Die Kräfte, unter welchen bei Entstehung eines Körpers die ponderablen Molecüle des Körpers und die in ihm enthaltenen Aethertheilchen zum Gleichgewicht gelangten, und unter deren spannender Thätigkeit dieses Gleichgewicht fortdauert, betrachte ich als so stark, dass sie den Widerstand, welchen der Aether seiner Compression oder Dilatation entgegensetzt, in grösserem oder geringerem Grade überwunden haben. Demgemäss ist die Dichtigkeit des Aethers einerseits in verschiedenen Körpern eine verschiedene, andererseits auch eine verschiedene an verschiedenen Stellen ein und desselben Körpers. So

werden z. B. die um irgend ein ponderables Molecül herumgelagerten Aetherschichten verschiedene Dichtigkeiten besitzen; es wird nämlich die Dichtigkeit dieser Schichten, wenn man sich dem Molecül nähert, zu- oder abnehmen, je nachdem die Einwirkung des Molecüls auf den Aether eine anziehende oder abstossende ist. Bei einem homogenen Körper wird demnach die Dichtigkeit des in ihm enthaltenen Aethers eine periodische Function des Raumes sein.

Anders verhält es sich mit denjenigen Kräften, welche während einer vorübergehenden oscillatorischen Bewegung des Aethers ins Spiel kommen. Diese Kräfte, welche von den ungemein geringen Ortsveränderungen herrühren, welche die Aethertheilchen bei ihren Oscillationen erleiden, betrachte ich als so schwach, dass ihnen gegenüber der Aether incompressibel ist. Die Dichtigkeit, welche der in dem Körper enthaltene Aether zur Zeit seines Gleichgewichts besass, wird also, sobald solche Oscillationen eintreten, ungeändert dieselbe bleiben. Ist demnach in irgend einem Körper die Dichtigkeit des Aethers zur Zeit seines Gleichgewichts durch irgend eine Function der Coordinaten $q = f(x, y, z)$ dargestellt, so wird sie während eines etwa nachfolgenden oscillatorischen Zustandes ausgedrückt bleiben durch dieselbe Formel $q = f(x, y, z)$.

Die genannten beiden Hypothesen führen nun (unter Anwendung des d'Alembert'schen Princips) für die oscillatorische Bewegung des in irgend einem Körper enthaltenen Aethers zu folgendem Resultat:

Bezeichnet man, was den Zustand der **Ruhe** anbelangt, die Coordinaten irgend eines Aethertheilchens m mit x, y, z , ferner die Dichtigkeit des Aethers mit $q = f(x, y, z)$; und sind andererseits $x + u, y + v, z + w$ die Coordinaten von m für irgend einen Zeitaugenblick t der **Bewegung**, ferner mX, mY, mZ die in diesem Zeitaugenblicke auf m einwirkenden Kräfte; so gelten für u, v, w die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\
 (1^a) \quad m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= mX + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \\
 m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= mY + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \\
 m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= mZ + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

Die in diesen Gleichungen neben u, v, w enthaltene vierte Unbekannte λ repräsentirt einen gewissen Theil des in dem Aethermedium vorhandenen Druckes, nämlich denjenigen Theil desselben, welcher entsteht aus der angenommenen Incompressibilität des Aethers.

Sind X^0, Y^0, Z^0, λ^0 die Werthe von X, Y, Z, λ für den Zustand der Ruhe, so wird zufolge der eben hingestellten Gleichungen:

$$0 = m X^0 + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda^0}{\partial x},$$

$$0 = m Y^0 + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda^0}{\partial y},$$

$$0 = m Z^0 + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda^0}{\partial z}.$$

Demgemäss können jene Gleichungen (1^a) für die Bewegung des Aethers auch so dargestellt werden:

$$(1^b) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= m (X - X^0) + \frac{m}{q} \frac{\partial (\lambda - \lambda^0)}{\partial x}, \\ m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= m (Y - Y^0) + \frac{m}{q} \frac{\partial (\lambda - \lambda^0)}{\partial y}, \\ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= m (Z - Z^0) + \frac{m}{q} \frac{\partial (\lambda - \lambda^0)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Und in dieser Form sind sie für die Anwendung bequemer als in ihrer ursprünglichen Gestalt*).

§. 2.

Integration der Differentialgleichungen.

Die in den Gleichungen (1^b) enthaltenen Differenzen $(X - X^0)$, $(Y - Y^0)$, $(Z - Z^0)$ besitzen sowohl bei den verschiedenen von Cauchy entwickelten Theorien als auch bei denjenigen, welche von meinem Vater aufgestellt wurde, die Werthe:

$$\begin{aligned} (X - X^0) &= (h_{11} + h_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (h_{12} + h_2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (h_{13} + h_3) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ &\quad + 2h_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2h_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathfrak{h}_1 u, \\ (2) \quad (Y - Y^0) &= (h_{21} + h_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (h_{22} + h_2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (h_{23} + h_3) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\ &\quad + 2h_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2h_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \mathfrak{h}_2 v, \\ (Z - Z^0) &= (h_{31} + h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (h_{32} + h_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (h_{33} + h_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \\ &\quad + 2h_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2h_{32} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \mathfrak{h}_3 w, \end{aligned}$$

*) Diese Hypothesen und Formeln sind von mir in Vorschlag gebracht in meiner Dissertation: „Explicare tentatur quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur (Halis Saxonum 1858)“; in mehr

wo die h , $\mathfrak{h}$ Constante sind, nämlich die constanten Mittelwerthe gewisser dem betrachteten Krystall eigenthümlicher periodischer Functionen repräsentiren. Soweit sind jene Theorien in Uebereinstimmung. Divergenz zwischen ihnen tritt aber ein, sobald es sich um die Werthe jener Coefficienten h , $\mathfrak{h}$ oder um die unter denselben anzunehmenden Relationen handelt. Zunächst nun werde ich die aus meinen Prämissen erhaltenen Differentialgleichungen (1^{a, b}) unter Anwendung der Werthe (2) weiter behandeln und integriren, ohne über jene Coefficienten irgend welche Voraussetzungen zu machen; beschränken werde ich mich dabei allerdings auf den Fall, dass die zu untersuchende Aetherbewegung aus parallelen ebenen Wellen besteht.

Ersetzt man in den Gleichungen (1^b) die periodische Function $\frac{1}{q}$ durch ihren constanten Mittelwerth, er mag c heissen, und setzt man gleichzeitig

$$c(\lambda - \lambda^0) = A,$$

so werden jene Gleichungen mit Benutzung der Werthe (2) folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ (3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (h_{11} + \mathfrak{h}_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (h_{12} + h_2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (h_{13} + h_3) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ &\quad + 2h_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2h_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathfrak{h}_1 u + \frac{\partial A}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \text{etc.}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \text{etc.} \end{aligned}$$

Es bestehe nun die zu untersuchende Aetherbewegung aus Wellen, welche parallel sind zu einer durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems gelegten Ebene, deren Normale die Richtungs cosinus α , β , γ besitzt. Die Excursionen u , v , w des am Orte x , y , z befindlichen Aethertheilchens werden alsdann ausser von der Zeit t nur noch von demjenigen Abstände r abhängen, den der Ort x , y , z von jener Ebene hat. Ebenso wird auch der am Orte x , y , z vorhandene Werth von A nur abhängig sein von t und r . Es ist aber:

$$(4) \quad r = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Demnach wird z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \alpha \frac{\partial A}{\partial r}, \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen (3) gehen daher über in:

ausführlicher Weise sind dieselben später von mir entwickelt worden in meiner Schrift: „Die magnetische Drehung der Polarisationssebene. Halle, 1863.“

$$\begin{aligned}
 0 &= \alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta \frac{\partial v}{\partial r} + \gamma \frac{\partial w}{\partial r}, \\
 (5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= i_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2h_{12} \alpha \beta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2h_{13} \alpha \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mathfrak{h}_1 u + \alpha \frac{\partial A}{\partial r}, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= i_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2h_{23} \beta \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2h_{21} \beta \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \mathfrak{h}_2 v + \beta \frac{\partial A}{\partial r}, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= i_3 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2h_{31} \gamma \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2h_{32} \gamma \beta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \mathfrak{h}_3 w + \gamma \frac{\partial A}{\partial r},
 \end{aligned}$$

wo unter i_1, i_2, i_3 die Ausdrücke zu verstehen sind:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= (h_{11} + h_1) \alpha^2 + (h_{12} + h_2) \beta^2 + (h_{13} + h_3) \gamma^2, \\
 (6) \quad i_2 &= (h_{21} + h_1) \alpha^2 + (h_{22} + h_2) \beta^2 + (h_{23} + h_3) \gamma^2, \\
 i_3 &= (h_{31} + h_1) \alpha^2 + (h_{32} + h_2) \beta^2 + (h_{33} + h_3) \gamma^2.
 \end{aligned}$$

Es sei τ die Schwingungsdauer der von uns betrachteten Bewegung, und zur Abkürzung werde die Bezeichnung eingeführt

$$(7) \quad \cos\left(\frac{t}{\tau} 2\pi\right) = \Phi(t),$$

so dass also

$$(8) \quad \Phi''(t) = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \Phi(t).$$

Um die Gleichungen (5) zu integrieren, werde gesetzt:

$$\begin{aligned}
 u &= A \Phi\left(t - \frac{r}{m}\right), \\
 v &= B \Phi\left(t - \frac{r}{m}\right), \\
 (9) \quad w &= C \Phi\left(t - \frac{r}{m}\right), \\
 A &= \frac{D}{m} \Phi'\left(t - \frac{r}{m}\right),
 \end{aligned}$$

wo A, B, C, D, m disponible Constanten sein sollen. Durch Substitution dieser Werthe in (5) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (10) \quad 0 &= \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{m} \Phi', \\
 A \Phi'' &= \frac{i_1 A + 2h_{12} \alpha \beta B + 2h_{13} \alpha \gamma C}{m^2} \Phi'' + \mathfrak{h}_1 A \Phi - \frac{\alpha D}{m^2} \Phi'', \\
 &\quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.},
 \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung Φ, Φ', Φ''

$$\text{für} \quad \Phi\left(t - \frac{r}{m}\right), \quad \Phi'\left(t - \frac{r}{m}\right), \quad \Phi''\left(t - \frac{r}{m}\right)$$

gesetzt sind, und wo also, nach (8), zwischen Φ und Φ'' die Relation stattfindet:

$$\Phi = - \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^2 \Phi''.$$

Somit zeigt sich, dass die zweite der Gleichungen (10) in allen ihren Gliedern mit dem Factor Φ'' behaftet ist, während die erste derselben behaftet ist mit dem Factor Φ' . Unterdrückt man diese Factoren, so ergibt sich:

$$(11) \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ \left[1 + \eta_1 \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^2 \right] A &= \frac{i_1 A + 2h_{12} \alpha \beta B + 2h_{13} \alpha \gamma C}{m^2} - \frac{\alpha D}{m^2}, \\ &\text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Zur weitem Abkürzung mögen nun die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(12) \quad \begin{aligned} 1 + \eta_1 \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^2 &= i_1, & i_1 + 2(h_{23} - h_{21} - h_{31}) \alpha^2 &= j_1, \\ 1 + \eta_2 \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^2 &= i_2, & i_2 + 2(h_{31} - h_{32} - h_{12}) \beta^2 &= j_2, \\ 1 + \eta_3 \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^2 &= i_3, & i_3 + 2(h_{12} - h_{13} - h_{23}) \gamma^2 &= j_3, \end{aligned}$$

die ersteren mit Bezug auf augenblickliches, die letztern mit Rücksicht auf späteres Bedürfniss. Die Gleichungen (11) gehen dann über in:

$$(13) \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ 0 &= (i_1 - i_1 m^2) A + 2h_{12} \alpha \beta B + 2h_{13} \alpha \gamma C - \alpha D, \\ 0 &= 2h_{21} \beta \alpha A + (i_2 - i_2 m^2) B + 2h_{23} \beta \gamma C - \beta D, \\ 0 &= 2h_{31} \gamma \alpha A + 2h_{32} \gamma \beta B + (i_3 - i_3 m^2) C - \gamma D. \end{aligned}$$

Die für u, v, w, A angenommenen Ausdrücke (9) werden also die zu untersuchende Aetherbewegung repräsentiren, sobald die in jenen Ausdrücken enthaltenen Constanten A, B, C, D, m den Gleichungen (13) Genüge leisten. Aus diesen letztern aber ergibt sich für m^2 die quadratische Gleichung

$$(14) \quad 0 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ (i_1 - i_1 m^2) & 2h_{12} \alpha \beta & 2h_{13} \alpha \gamma & \alpha \\ 2h_{21} \beta \alpha & (i_2 - i_2 m^2) & 2h_{23} \beta \gamma & \beta \\ 2h_{31} \gamma \alpha & 2h_{32} \gamma \beta & (i_3 - i_3 m^2) & \gamma \end{vmatrix}.$$

Sind m^2 und m'^2 die beiden Wurzeln dieser Gleichung, und sind ferner A, B, C, D und A', B', C', D' die bei Substitution jener Wurzeln aus den Gleichungen (13) sich ergebenden Werthe von A, B, C, D , so werden also in der gegebenen Richtung α, β, γ zwei Wellen sich fortpflanzen können, und zwar die eine mit der Geschwindigkeit m und der Vibrationsrichtung A, B, C , die andere hin-

gegen^e mit der Geschwindigkeit m' und der Vibrationsrichtung A' , B' , C' .

Aus der ersten der Gleichungen (13) folgt, dass beide Vibrationsrichtungen genau parallel sind mit der Wellenebene. Multiplicirt man ferner die drei übrigen jener Gleichungen mit A' , B' , C' und addirt, so ergibt sich (mit Rücksicht auf jene erste):

$$\begin{aligned} (i_1 AA' + i_2 BB' + i_3 CC') m^2 = & i_1 AA' + i_2 BB' + i_3 CC' \\ & + 2h_{23} \beta \gamma (BC' + B'C) \\ & + 2h_{31} \gamma \alpha (CA' + C'A) \\ & + 2h_{12} \alpha \beta (AB' + A'B). \end{aligned}$$

Eine analoge Gleichung muss gelten für die andere Wurzel m'^2 ; und zwar muss sich diese Gleichung aus der schon hingeschriebenen offenbar dadurch ableiten lassen, dass man m , A , B , C und m' , A' , B' , C' mit einander vertauscht. Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen wird man also erhalten:

$$(i_1 AA' + i_2 BB' + i_3 CC') (m^2 - m'^2) = 0,$$

d. i.

$$(15) \quad i_1 AA' + i_2 BB' + i_3 CC' = 0.$$

Die Vibrationsrichtungen A , B , C und A' , B' , C' werden daher genau aufeinander senkrecht sein, sobald die Grössen i (12) den gemeinschaftlichen Werth 1 haben, d. i. sobald die in den Differentialgleichungen enthaltenen Coefficienten $\S$ gleich Null sind. Also:

In einer gegebenen Richtung können sich immer nur zwei Wellenebenen fortpflanzen. In beiden sind die Vibrationsrichtungen genau transversal, d. i. genau parallel mit den Wellenebenen selber. Ausserdem werden diese Vibrationsrichtungen genau senkrecht auf einander sein, sobald die (von einer directen Einwirkung der ponderablen Molecüle herrührenden) Coefficienten $\S$ gleich Null*) sind.

Die quadratische Gleichung (14) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit lässt sich übrigens in viel einfacherer Form darstellen. Zunächst mag bemerkt werden, dass die zweite der Gleichungen (13) sich so darstellen lässt:

$$D = \left(i_1 - i_1 m^2 \right) \frac{A}{\alpha} + 2h_{12} \beta B + 2h_{13} \gamma C.$$

Addirt man zu dieser Gleichung die identische Gleichung:

$$0 = - 2 (h_{12} + h_{13}) \alpha^2 \frac{A}{\alpha} + 2h_{12} \alpha A + 2h_{13} \alpha A,$$

und addirt man ferner hinzu die aus (13) entspringende Gleichung:

*) Sie werden übrigens auch dann auf einander senkrecht sein, wenn die $\S$ nicht Null, sondern nur einander gleich sind.

$$0 = + 2 h_{23} \alpha^2 \frac{A}{\alpha} + 2 h_{23} \beta B + 2 h_{23} \gamma C,$$

so ergibt sich:

$$D = \left[i_1 + 2 (h_{23} - h_{21} - h_{31}) \alpha^2 - i_1 m^2 \right] \frac{A}{\alpha} \\ + 2 \left[h_{23} (\beta B + \gamma C) + h_{31} (\gamma C + \alpha A) + h_{12} (\alpha A + \beta B) \right],$$

oder wenn man den symmetrischen Ausdruck

$D - 2 [h_{23} (\beta B + \gamma C) + h_{31} (\gamma C + \alpha A) + h_{12} (\alpha A + \beta B)] = S$
setzt, und ausserdem Rücksicht nimmt auf die in (12) eingeführten Bezeichnungen:

$$S = (j_1 - i_1 m^2) \frac{A}{\alpha}.$$

In genau derselben Weise, wie hier die zweite der Gleichungen (13) behandelt ist, lässt sich auch behandeln die dritte und die vierte dieser Gleichungen. Man gelangt so zu folgenden Formeln:

$$(16^a) \quad \begin{aligned} A &= \frac{S\alpha}{j_1 - i_1 m^2}, \\ B &= \frac{S\beta}{j_2 - i_2 m^2}, \\ C &= \frac{S\gamma}{j_3 - i_3 m^2}. \end{aligned}$$

Fügt man hinzu die erste der Gleichungen (13):

$$(16^b) \quad 0 = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

so folgt augenblicklich:

$$(16^c) \quad 0 = \frac{\alpha^2}{j_1 - i_1 m^2} + \frac{\beta^2}{j_2 - i_2 m^2} + \frac{\gamma^2}{j_3 - i_3 m^2}.$$

Dies also ist die quadratische Gleichung, deren Wurzeln die beiden Werthe von m^2 sind. Sind jene beiden Werthe gefunden, so werden sich dann ferner aus (16^a) die zugehörigen Werthe der Verhältnisse $A:B:C$ in einfachster Weise ergeben.

Wir steigen nun hinab zu specielleren Untersuchungen, indem wir der Reihe nach folgende Voraussetzungen eintreten lassen, die später, theilweise wenigstens, ihre Rechtfertigung finden werden.

I. Voraussetzung. *Die ponderablen Molecüle haben auf die Bewegung des Aethers keine directe Einwirkung. Demgemäss sind die Coefficienten*

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0,$$

und also nach (12):

$$i_1 = i_2 = i_3 = 1.$$

II. Voraussetzung. Zwischen den Coefficienten h_{11} , h_{22} , h_{33} , h_{23} , h_{31} , h_{12} , finden die (schon von meinem Vater supponirten) Relationen statt:

$$h_{22} + h_{33} = 6h_{23},$$

$$h_{33} + h_{11} = 6h_{31},$$

$$h_{11} + h_{22} = 6h_{12}.$$

Demgemäss kann gesetzt werden:

$$h_{23} = a, \quad h_{11} = 3(b + c - a),$$

$$h_{31} = b, \quad h_{22} = 3(c + a - b),$$

$$h_{12} = c, \quad h_{33} = 3(a + b - c).$$

Zur Abkürzung mag dabei die Bezeichnung eingeführt werden:

$$(b + c) \alpha^2 + (c + a) \beta^2 + (a + b) \gamma^2 = \\ = (a + b + c) - (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2) = p.$$

III. Voraussetzung. Die Coefficienten h_1 , h_2 , h_3 , welche der besondern Symmetrie willen fortan bezeichnet werden mögen mit

$$h_1 = \bar{a}, \quad h_2 = \bar{b}, \quad h_3 = \bar{c},$$

sind unter einander gleichwerthig. Diese III. Voraussetzung, deren Berechtigung gewöhnlich durch Betrachtungen über den im Aethermedium vorhandenen Druck deducirt wird, erscheint sehr misslich, wie aus dem weiteren Verlauf meiner Untersuchung hervorgehen wird. Ich werde daher diese Voraussetzung erst ganz zuletzt eintreten lassen. Setzt man also

$$h_1\alpha^2 + h_2\beta^2 + h_3\gamma^2 = \bar{a}\alpha^2 + \bar{b}\beta^2 + \bar{c}\gamma^2 = \bar{p},$$

so wird $\bar{p}$ vorläufig als variabel (nämlich als abhängig von den Richtungs cosinus α , β , γ), und erst bei späterer Hinzuziehung der III. Voraussetzung als constant (nämlich als gleichwerthig mit $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$) anzusehen sein.

Nach (6) und (12) ist

$$j_1 = (h_{11} + h_1) \alpha^2 + (h_{12} + h_2) \beta^2 + (h_{13} + h_3) \gamma^2 + 2(h_{23} - h_{21} - h_{31}) \alpha^2.$$

also mit Benutzung der II. Voraussetzung und mit Benutzung der für h_1 , h_2 , h_3 eingeführten neuen Bezeichnungen:

$$j_1 = \bar{p} + 3(b + c - a) \alpha^2 + c\beta^2 + b\gamma^2 + 2(a - b - c) \alpha^2.$$

Hieraus folgt durch Hinzuaddiren der identischen Gleichung

$$0 = -a + a\alpha^2 + a\beta^2 + a\gamma^2$$

augenblicklich:

$$j_1 = \bar{p} - a + (b + c)\alpha^2 + (c + a)\beta^2 + (a + b)\gamma^2,$$

d. i. (vergl. die bei Gelegenheit der II. Voraussetzung eingeführte Bezeichnung):

$$\begin{aligned} j_1 &= p + \bar{p} - a. & \text{Ebenso wird offenbar werden:} \\ (17) \quad j_2 &= p + \bar{p} - b, \\ j_3 &= p + \bar{p} - c. \end{aligned}$$

In Folge der I. und II. Voraussetzung gehen daher die Formeln (16^{a, b, c}) über in:

$$\begin{aligned} A &= \frac{S\alpha}{p + \bar{p} - a - m^2}, \\ (18^a) \quad B &= \frac{S\beta}{p + \bar{p} - b - m^2}, \\ C &= \frac{S\gamma}{p + \bar{p} - c - m^2}, \\ (18^b) \quad 0 &= \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ (18^c) \quad 0 &= \frac{\alpha^2}{p + \bar{p} - a - m^2} + \frac{\beta^2}{p + \bar{p} - b - m^2} + \frac{\gamma^2}{p + \bar{p} - c - m^2}. \end{aligned}$$

Diese Formeln mögen bezogen gedacht werden auf die eine der beiden Wellen, auf die Welle W mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit m . Analoge Formeln können dann hingeschrieben werden für die andere Welle W' mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit m' .

Die Gleichung (18^c) kann, wenn für den Augenblick

$$(19) \quad \begin{aligned} p + \bar{p} - m m &= M, \\ p + \bar{p} - m' m' &= M' \end{aligned}$$

gesetzt wird, so dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\alpha^2}{M-a} + \frac{\beta^2}{M-b} + \frac{\gamma^2}{M-c} \\ \text{d. i.} \quad 0 &= M^2 - M [(b+c) \alpha^2 + (c+a) \beta^2 + (a+b) \gamma^2] + \\ &\quad + [bca^2 + ca\beta^2 + ab\gamma^2]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(20) \quad M + M' = (b+c) \alpha^2 + (c+a) \beta^2 + (a+b) \gamma^2,$$

also zufolge der von uns eingeführten Bezeichnung (vergl. die II. Voraussetzung):

$$(21) \quad \overline{M} + M' = p,$$

oder, wenn man für M, M' deren eigentliche Bedeutungen (19) substituirt:

$$(22) \quad 2p + 2\bar{p} - mm - m'm' = p,$$

d. i.

$$(23) \quad p + 2\bar{p} = mm + m'm'.$$

Hieraus folgt (durch Subtraction von a, b, c):

$$(24) \quad \begin{aligned} p + \bar{p} - a - mm &= m'm' - \bar{p} - a, \\ p + \bar{p} - b - mm &= m'm' - \bar{p} - b, \\ p + \bar{p} - c - mm &= m'm' - \bar{p} - c. \end{aligned}$$

Hierdurch aber gewinnen die Formeln (18^{a, b, c}) folgende Gestalt:

$$(25^a) \quad \begin{aligned} A &= \frac{S\alpha}{m'm' - (\bar{p} + a)}, \\ B &= \frac{S\beta}{m'm' - (\bar{p} + b)}, \\ C &= \frac{S\gamma}{m'm' - (\bar{p} + c)}, \end{aligned}$$

$$(25^b) \quad 0 = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

$$(25^c) \quad 0 = \frac{\alpha^2}{m'm' - (\bar{p} + a)} + \frac{\beta^2}{m'm' - (\bar{p} + b)} + \frac{\gamma^2}{m'm' - (\bar{p} + c)}.$$

Die Formeln (25^a) drücken A, B, C durch m' aus; d. h. sie drücken die Vibrationsrichtung der einen Welle W aus durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der andern Welle W' . — Zu diesen Formeln mag noch hinzugefügt werden diejenige, welche aus (25^b) folgt, wenn man daselbst für α, β, γ die aus (25^a) entspringenden Werthe substituirt; sie lautet:

$$(25^d) \quad -m'm' (A^2 + B^2 + C^2) = (\bar{p} + a) A^2 + (\bar{p} + b) B^2 + (\bar{p} + c) C^2;$$

ihre linke Seite reducirt sich auf $m'm'$, sobald man unter A, B, C geradezu die Cosinus der Vibrationsrichtung versteht. Endlich mag noch hinzugefügt werden die Formel:

$$(25^e) \quad 0 = AA' + BB' + CC',$$

welche sich auf Grund unserer I. Voraussetzung unmittelbar ergibt aus früheren Betrachtungen (pag. 331).

Bis hierher haben wir nur von der I. und II. Voraussetzung Gebrauch gemacht. Ziehen wir nun endlich auch noch die III. Voraussetzung hinzu, so verwandelt sich die Grösse $\bar{p}$ in eine Constante, d. i. in eine dem betrachteten Krystall eigenthümliche Zahl. Die Formeln (25^{a, b, c, d, e}) enthalten alsdann im Ganzen nur noch drei dem Krystall zugehörige Constante, nämlich:

$$\bar{p} + a, \quad \bar{p} + b, \quad \bar{p} + c,$$

und repräsentiren, wie man leicht übersieht, die Fresnel'schen Gesetze mit voller Genauigkeit, nur mit dem einen Unterschiede, dass die Polarisationssebene (in Uebereinstimmung mit der Theorie meines Vaters) identisch ist mit der Vibrationsebene.

§. 3.

Bildung der Differential-Gleichungen.

Das Aethermedium, mit dem wir uns beschäftigen, mag vorläufig enthalten gedacht werden in einem völlig beliebigen Körper, und versetzt sein in irgend eine oscillatorische Bewegung. Wir betrachten neben einander zwei verschiedene Positionen des Mediums, einerseits die dem Gleichgewicht entsprechende Position Π^0 , und andererseits diejenige Position Π , welche vorhanden ist in irgend einem Zeitaugenblick t jener oscillatorischen Bewegung. Besitzt eine von der räumlichen Anordnung des Mediums abhängende Grösse bei der erstern Position den Werth λ , so mag ihr Werth bei der letztern bezeichnet werden mit $\lambda + D\lambda$.

Während der Position Π^0 habe das Aethertheilchen m von einem andern Aethertheilchen m_1 und von irgend einem ponderablen Molecül m die Entfernungen r und r . Die zwischen diesen Massen m , m_1 und m , m vorhandenen Potentiale mögen bezeichnet werden

mit:

und mit:

$$(1) \quad mm_1 f(r^2) = mm_1 f, \quad mm \bar{f}(r^2) = mm \bar{f}.$$

Versteht man also unter a , b , c und α , β , γ die relativen Coordinaten von m_1 und m in Bezug auf m (eine Bezeichnung, der zufolge $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$ und $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2$ ist), so werden $-mm_1 \frac{\partial f}{\partial a}$, $-mm_1 \frac{\partial f}{\partial b}$, $-mm_1 \frac{\partial f}{\partial c}$ die rechtwinkligen Componenten der von m auf m_1 ausgeübten Wirkung, und folglich $+mm_1 \frac{\partial f}{\partial a}$, $+mm_1 \frac{\partial f}{\partial b}$, $+mm_1 \frac{\partial f}{\partial c}$ die Componenten derjenigen Wirkung sein, welche umgekehrt m_1 ausübt auf m . Aehnliches gilt mit Bezug auf das Potential $mm \bar{f}$. Setzt man also:

$$(2) \quad \begin{aligned} mX^0 &= mSm_1 \frac{\partial f}{\partial a} + mSm \frac{\partial \bar{f}}{\partial \alpha}, \\ mY^0 &= mSm_1 \frac{\partial f}{\partial b} + mSm \frac{\partial \bar{f}}{\partial \beta}, \\ mZ^0 &= mSm_1 \frac{\partial f}{\partial c} + mSm \frac{\partial \bar{f}}{\partial \gamma}, \end{aligned}$$

und versteht man dabei unter S eine über alle zur Umgebung von m gehörigen Massen m_1 und m sich ausdehnende Summation, so werden mX^0 , mY^0 , mZ^0 die Componenten sämtlicher Kräfte darstellen, welche auf m einwirken bei der Position Π^0 , d. i. zur Zeit des Gleichgewichtes.

Für die bei der Position Π vorhandenen Componenten mX , mY , mZ gelten offenbar analoge Formeln, welche aus den schon hinge-

stellten Formeln (2) einfach dadurch abgeleitet werden können, dass man die in jenen Formeln enthaltenen relativen Coordinaten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ übergehen lässt in

$$a + Da, b + Db, c + Dc, \alpha + D\alpha, \beta + D\beta, \gamma + D\gamma.$$

Somit wird z. B.

$$mX = mSm_1 \left(\frac{\partial f}{\partial a} + D \frac{\partial f}{\partial a} \right) + mSm \left(\frac{\partial f}{\partial a} + D \frac{\partial f}{\partial a} \right),$$

folglich:

$$\begin{aligned} m(X - X^0) &= mSm_1 D \frac{\partial f}{\partial a} + mSm D \frac{\partial f}{\partial a}, \text{ und ebenso wird:} \\ (3) \quad m(Y - Y^0) &= mSm_1 D \frac{\partial f}{\partial b} + mSm D \frac{\partial f}{\partial b}, \\ m(Z - Z^0) &= mSm_1 D \frac{\partial f}{\partial c} + mSm D \frac{\partial f}{\partial c}. \end{aligned}$$

Nun ist, was die erste dieser Formeln anbelangt:

$$\begin{aligned} (4) \quad D \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} Da + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} Db + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c} Dc, \\ D \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} D\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} D\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} D\gamma. \end{aligned}$$

Da $f = f(r^2)$ als eine Function des Quadrates der Entfernung aufgefasst werden soll, so sind unter $f' = f'(r^2)$, $f'' = f''(r^2)$ die nach diesem Quadrat genommenen Ableitungen zu verstehen. Ebenso verhält es sich bei der Function $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(r^2)$. Somit ergibt sich aus (4):

$$\begin{aligned} (5) \quad D \frac{\partial f}{\partial a} &= (2f' + 4aaf'') Da + 4abf''. Db + 4acf''. Dc, \\ D \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= (2\mathfrak{f}' + 4\alpha\alpha\mathfrak{f}') D\alpha + 4\alpha\beta\mathfrak{f}''. D\beta + 4\alpha\gamma\mathfrak{f}''. D\gamma. \end{aligned}$$

Bei Ausführung der Summationen S sind zu unterscheiden das centrale Theilchen m , und andererseits die benachbarten Aethertheilchen m_1 . Es mögen

x, y, z , und

$$x + u(x, y, z), \quad y + v(x, y, z), \quad z + w(x, y, z)$$

die Coordinaten sein, welche das centrale Theilchen m bei den Positionen Π^0 und Π besitzt. Alsdann werden

$$x + a, \quad y + b, \quad z + c, \quad \text{und}$$

$$x + a + u(x + a, y + b, z + c), \quad y + b + v(x + a, y + b, z + c), \text{ etc.}$$

diejenigen Coordinaten sein, welche das Nachbar-Theilchen m_1 bei der einen und bei der andern Position besitzt; und gleichzeitig werden alsdann

$$x + \alpha, \quad y + \beta, \quad z + \gamma, \quad \text{und}$$

$$x + \alpha, \quad y + \beta, \quad z + \gamma$$

die Coordinaten des ponderablen Molecüles m für jene Positionen sein.

Denn wir nehmen an, dass die ponderablen Molecüle während der oscillatorischen Bewegung des Aethers keinerlei Verrückungen oder Bewegungen erleiden.

Die relativen Coordinaten von m_1 und m in Bezug auf m , welche während der Position II^0 die Werthe hatten

$$\left\{ \begin{array}{l} a, \\ b, \\ c, \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha, \\ \beta, \\ \gamma, \end{array} \right.$$

nehmen daher bei der Position II die Werthe an:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + u(x+a, y+b, z+c) - u(x, y, z), \\ b + v(x+a, y+b, z+c) - v(x, y, z), \\ c + w(x+a, y+b, z+c) - w(x, y, z), \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha - u(x, y, z), \\ \beta - v(x, y, z), \\ \gamma - w(x, y, z). \end{array} \right.$$

Bezeichnet man daher (in voller Uebereinstimmung mit der der Charakteristik D zuertheilten Bedeutung) diese letztern Werthe der relativen Coordinaten mit $a + Da$, $b + Db$, $c + Dc$ und $\alpha + D\alpha$, $\beta + D\beta$, $\gamma + D\gamma$, so wird:

$$\begin{array}{ccccccc} Da = u(x+a, y+b, z+c) - u(x, y, z), & D\alpha = -u(x, y, z), \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \end{array}$$

oder, wenn man nach dem Taylor'schen Satze entwickelt, und gleichzeitig u , v , w für $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ setzt:

$$\begin{array}{ccccccc} Da = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{aa}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots, & D\alpha = -u, \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \end{array}$$

Führt man zur Abkürzung (mit Bezug auf eine beliebige Function ω) die Bezeichnung ein:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \frac{\partial \omega}{\partial x} + b \frac{\partial \omega}{\partial y} + c \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{aa}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{bb}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{cc}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \\ \quad + bc \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} + ca \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial x} + ab \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \sum_p \bar{p} \bar{\omega},$$

wo alsdann unter $\bar{p}$ die neun Grössen:

$$a, b, c, \quad \frac{aa}{2}, \frac{bb}{2}, \frac{cc}{2}, \quad bc, ca, ab,$$

und unter $\bar{\omega}$ die zugehörigen Ableitungen von ω zu verstehen sind, so wird schliesslich:

$$(7) \quad \begin{array}{ll} Da = \sum_p \bar{p} \bar{u}, & D\alpha = -u, \\ Db = \sum_p \bar{p} \bar{v}, & D\beta = -v, \\ Dc = \sum_p \bar{p} \bar{w}, & D\gamma = -w. \end{array}$$

Somit folgt aus (5):

$$(8) \quad \begin{array}{l} D \frac{\partial f}{\partial a} = \sum_p \{ \bar{u} (2 \bar{p} f' + 4 a a \bar{p} f'') + \bar{v} (4 a b \bar{p} f'') + \bar{w} (4 a c \bar{p} f'') \}, \\ D \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -u (2 \bar{f}' + 4 a a \bar{f}'') - v (4 a b \bar{f}'') - w (4 a c \bar{f}''). \end{array}$$

Summirt man diese Ausdrücke über alle zur Umgebung von m gehörigen Massen m_1 und m , und beachtet man, dass (während einer solchen Summation S) die dem centralen Theilchen m zugehörigen Grössen $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ beständig ein und dieselben bleiben, so folgt:

$$(9) \quad S m_1 D \frac{\partial f}{\partial a} = \\ = \sum_p \{ \bar{u} S m_1 (2 \bar{p} f' + 4 a a \bar{p} f'') + \bar{v} S m_1 (4 a b \bar{p} f'') + \bar{w} S m_1 (4 a c \bar{p} f'') \}, \\ S_1 m D \frac{\partial f}{\partial a} = \\ = - u S m (2 f' + 4 a a f'') - v S m (4 a b f'') - w S m (4 a c f'').$$

Die Differentialgleichungen für eine oscillatorische Bewegung sind ihrer allgemeinen Form nach bereits früher (pag. 327) aufgestellt. Substituiren wir dort die für $mX - mX^0$, etc. die gefundenen Werthe (3), so gewinnen jene Gleichungen folgendes Ansehen:

$$(10) \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m S m_1 D \frac{\partial f}{\partial a} + m S m D \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{m}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial x}, \\ \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.}$$

also bei Substitution der Werthe (9):

$$(11) \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_p \{ \bar{u} S m_1 (2 \bar{p} f' + 4 a a \bar{p} f'') + \bar{v} S m_1 (4 a b \bar{p} f'') + \bar{w} S m_1 (4 a c \bar{p} f'') \} \\ - u S m (2 f' + 4 a a f'') - v S m (4 a b f'') - w S m (4 a c f'') \\ + \frac{1}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Führt man in diesen Gleichungen die Summationen $\sum_p$ wirklich aus, indem man für $\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ der Reihe nach die ihnen zukommenden Werthe [vgl. (6), (7)] substituirt, so ergeben sich Formeln von folgender Gestalt:

$$(12) \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = U + U' + \frac{1}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V + V' + \frac{1}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = W + W' + \frac{1}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial z},$$

wo unter U, V, W diejenigen Glieder verstanden werden sollen, welche nur gerade Potenzen von a, b, c, a, b, c enthalten, unter

U' , V' , W' hingegen die nach Absonderung dieser noch übrig bleibenden Glieder. Was die Glieder erster Art anbelangt, so ergibt sich aus den Formeln (11) mit grosser Leichtigkeit z. B. für U folgender Werth:

$$(13) \quad U = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S m_1 (a^2 f' + 2 a^4 f'') + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} S m_1 (4 a^2 b^2 f'') \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} S m_1 (b^2 f' + 2 a^2 b^2 f'') + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} S m_1 (4 a^2 c^2 f'') \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} S m_1 (c^2 f' + 2 a^2 c^2 f'') - u S m (2 f' + 4 a^2 f'') \end{aligned} \right\}.$$

Es mögen die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(14^a) \quad \begin{aligned} m S m_1 a^2 f' &= m H_1, \\ m S m_1 b^2 f' &= m H_2, \\ m S m_1 c^2 f' &= m H_3, \end{aligned}$$

$$(14^b) \quad \begin{aligned} m S m_1 2 a^4 f'' &= m H_{11}, & m S m_1 2 b^2 c^2 f'' &= m H_{23}, \\ m S m_1 2 b^4 f'' &= m H_{22}, & m S m_1 2 c^2 a^2 f'' &= m H_{31}, \\ m S m_1 2 c^4 f'' &= m H_{33}, & m S m_1 2 a^2 b^2 f'' &= m H_{12}, \end{aligned}$$

$$(14^c) \quad \begin{aligned} -m S m (2 f' + 4 a^2 f'') &= m \mathfrak{H}_1, \\ -m S m (2 f' + 4 b^2 f'') &= m \mathfrak{H}_2, \\ -m S m (2 f' + 4 c^2 f'') &= m \mathfrak{H}_3. \end{aligned}$$

Schreiben wir mit Anwendung dieser Bezeichnungen den Werth von U (13) von Neuem hin, und fügen wir gleichzeitig die aus der Symmetrie leicht erkennbaren Werthe von V und W hinzu, so haben wir die Formeln:

$$\begin{aligned} U &= (H_{11} + H_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (H_{12} + H_2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (H_{13} + H_3) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &\quad + 2 H_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 H_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathfrak{H}_1 u, \\ (15) \quad V &= (H_{21} + H_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (H_{22} + H_2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (H_{23} + H_3) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &\quad + 2 H_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2 H_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \mathfrak{H}_2 v, \\ W &= (H_{31} + H_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (H_{32} + H_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (H_{33} + H_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ &\quad + 2 H_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2 H_{32} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \mathfrak{H}_3 w. \end{aligned}$$

Ähnliche Formeln werden aus den Gleichungen (11) deducirt werden können für die Werthe von U' , V' , W' . Während aber die in U , V , W enthaltenen Coefficienten H , $\mathfrak{H}$ durch Summen dargestellt sind, in welchen nur gerade Potenzen von a, b, c, a, b, c vorkommen

[vergl. (14^{a, b, c})], werden die in U' , V' , W' enthaltenen Coefficienten — sie mögen H' , $\mathfrak{H}'$ heissen — die Form besitzen:

$$(16) \quad \begin{aligned} m H' &= m S m_1 a^\alpha b^\beta c^\gamma F(r^2), \\ m \mathfrak{H}' &= m S m a^\alpha \mathfrak{b}^\beta c^\gamma \mathfrak{F}(r^2), \end{aligned}$$

wo unter den drei Exponenten α , β , γ immer mindestens einer ungerade ist.

Sollen die Werthe der Coefficienten H , $\mathfrak{H}$, H' , $\mathfrak{H}'$ wirklich berechnet werden, so wird zurückzugehen sein auf die Position Π^0 . Denn die Grössen r , a , b , c , $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, von denen die Werthe jener Coefficienten abhängen, beziehen sich auf diejenige relative Gruppierung, welche zwischen den Aethertheilchen, sowie zwischen diesen und den ponderablen Moleculen stattfindet zur Zeit des Gleichgewichts; d. i. zur Zeit der Position Π^0 .

§. 4.

Die in den Differentialgleichungen enthaltenen Coefficienten H .

Fortan mag vorausgesetzt werden, dass der Körper, mit dem wir es zu thun haben, ein zweiundzweigliedriger Krystall ist, dessen Achsen parallel sind mit denen des Coordinatensystems.

Die Dichtigkeit q des in dem Krystall enthaltenen Aethers wird jedenfalls anzusehen sein als eine periodische Function der Coordinaten x , y , z ; die drei Indices dieser Function (d. i. die drei Grössen, um deren Multipla man x , y , z anwachsen lassen kann, ohne dass der Werth von q dadurch eine Aenderung erleidet) mögen bezeichnet werden mit ε_1 , ε_2 , ε_3 . Demgemäss wird der Krystall durch drei auf einander senkrechte Systeme von Parallelebenen in einzelne Parallelepipeda von den Dimensionen ε_1 , ε_2 , ε_3 zerlegbar sein, welche während der Ruhelage des Aethers unter einander congruent sind, so dass es z. B. nur einer parallelen Verschiebung eines solchen Parallelepipeds bedürfen würde, um dasselbe hinsichtlich seiner Aether- und ponderablen Massen mit irgend einem andern Parallelepipedium zur Deckung zu bringen. Auch wird, was ein solches Parallelepipedium für sich allein anbelangt, die darin vorhandene Massenvertheilung symmetrisch zu denken sein in Bezug auf die drei Halbirungsebenen, d. i. in Bezug auf drei durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds parallel zu seinen Seitenflächen gelegte Ebenen.

Hieraus folgt, dass die im Vorhergehenden mit H , $\mathfrak{H}$, H' , $\mathfrak{H}'$ bezeichneten Coefficienten (14, 16) ebenfalls periodische Functionen des Raumes sind, dass sie nämlich für homologe Punkte jener Parallelepipeda gleiche Werthe haben, und dass sie ferner auch innerhalb ein und desselben Parallelepipeds gleiche Werthe besitzen müssen in je acht zu den Halbirungsebenen symmetrisch gelegenen Punkten.

An Stelle der periodischen Functionen $H, \mathfrak{H}, H', \mathfrak{H}'$ wird es gestattet sein, ihre constanten Mittelwerthe $h, \mathfrak{h}, h', \mathfrak{h}'$ in unsere Differentialgleichungen zu substituiren, und um so mehr gestattet sein, je mächtiger die Incompressibilität des Aethers ist gegenüber den attractiven oder repulsiven Kräften der ponderablen Molecüle.

Um jene Mittelwerthe zu finden, betrachten wir irgend eines der zuvor genannten Parallelepipeda, und construiren seine den Ebenen yz, zx, xy parallel laufenden Halbirungsebenen A, B, C . Sind m und $\bar{m}$ zwei Aethertheilchen innerhalb des Parallelepipeds und symmetrisch gelegen zur Ebene A , so werden die zur Umgebung von m gehörigen Aether- und ponderablen Massen m_1, m eine Gruppe bilden, welche in Bezug auf die Ebene A das genaue Spiegelbild ist von derjenigen, die gebildet wird von den um $\bar{m}$ herumgelagerten Massen $\bar{m}_1, \bar{m}$. Bildet man daher die Summen

$$m H' = m S m_1 a^\alpha b^\beta c^\gamma F(r^2),$$

$$m \mathfrak{H}' = m S \bar{m} \bar{a}^\alpha \bar{b}^\beta \bar{c}^\gamma \mathfrak{F}(\bar{r}^2)$$

einmal für m , das andere Mal für $\bar{m}$, so werden in beiden Fällen dieselben Werthe von $r, b, c, \bar{r}, \bar{b}, \bar{c}$, aber entgegengesetzte Werthe von $a, \bar{a}$ sich darbieten. Demgemäss werden, falls der Exponent α ungerade ist, die Werthe von $H', \mathfrak{H}'$ für m und $\bar{m}$ entgegengesetzt, die mit Bezug auf das Parallelepipedium gebildeten Mittelwerthe von $H', \mathfrak{H}'$ also Null sein. — In analoger Weise lässt sich mit Benutzung der Halbirungsebenen B, C nachweisen, dass die genannten Mittelwerthe auch dann Null sind, wenn einer der beiden andern Exponenten β, γ ungerade ist.

In denjenigen Summen aber, durch welche $H', \mathfrak{H}'$ definirt sind (16), besitzt unter den Exponenten α, β, γ immer wenigstens einer einen ungeraden Werth. Daraus folgt, dass sämtliche Coefficienten $H', \mathfrak{H}'$ den Mittelwerth Null haben. Demnach wird allgemein:

$$(17) \quad h' = 0, \quad \mathfrak{h}' = 0.$$

Und es werden also in den Differentialgleichungen (12) die Glieder U', V', W' verschwinden, sobald man die periodischen Coefficienten in jenen Gleichungen ersetzt durch ihre constanten Mittelwerthe.

Wir gehen über zur Untersuchung der Coefficienten H (14^{a, b}) und ihrer Mittelwerthe h , indem wir in voller Uebereinstimmung mit unserer Hypothese der Incompressibilität (pag. 323) annehmen, dass die Vertheilung des Aethers im Innern des Krystalles nur wenig verschieden ist von einer absolut gleichförmigen Vertheilung.

Es sei m irgend ein Aethertheilchen innerhalb unseres Krystalles,

und O diejenige um m beschriebene kleine Kugel, welche alle auf m überhaupt noch einwirkenden Aethertheilchen beherbergt. Bei der Werthbestimmung der Coefficienten H , $\S$, H' , $\S'$ kommt, wie schon bemerkt wurde (pag. 341), immer nur der Zustand des Gleichgewichts in Betracht; doch auch in diesem Zustande wird die Kugel O , weil sie einem Krystalle angehört, in ihrem Innern eine Anordnung darbieten, welche an verschiedenen Orten von verschiedener Dichtigkeit und in verschiedenen Richtungen von verschiedenem Intervall ist. Jedenfalls aber werden die innerhalb O befindlichen Aethertheilchen durch geeignete kleine Verschiebungen in Gedanken immer in eine Gruppierung versetzt werden können, bei der jene Unterschiede des Ortes und der Richtung völlig verschwinden; dieser absolut gleichförmige Zustand des Inhaltes von O mag dem wirklichen Zustande gegenüber kurzweg bezeichnet werden als der fingirte Zustand. Daneben werden drei Functionen $\xi(x, y, z)$; $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$ denkbar sein, welche massgebend sind für jene kleinen Verschiebungen, deren es bedarf, um die in O enthaltenen Aethertheilchen aus dem erstern Zustande in den letztern zu versetzen, d. i. drei Functionen von solcher Beschaffenheit, dass ein bei der wirklichen Anordnung mit den Coordinaten x, y, z versehenes Aethertheilchen bei Eintritt jener fingirten Anordnung die Coordinaten $x + \xi(x, y, z)$, $y + \eta(x, y, z)$, $z + \zeta(x, y, z)$ erhält.

Sind also

$$x, y, z \quad \text{und} \\ x + a, \quad y + b, \quad z + c$$

die Coordinaten des centralen Theilchens m und irgend eines andern innerhalb O befindlichen Theilchens m_1 zur Zeit des wirklichen Zustandes, so werden diese Coordinaten bei Eintritt des fingirten Zustandes übergehen in

$$x + \xi(x, y, z), \quad y + \eta(x, y, z), \quad z + \zeta(x, y, z),$$

und in

$$x + a + \xi(x + a, y + b, z + c), \quad \text{etc. etc. etc.}$$

Die relativen Coordinaten von m_1 in Bezug auf m , welche während des ersten Zustandes gleich

$$a, b, c$$

waren, werden also bei Eintritt des zweiten Zustandes die Werthe haben:

$$a + \xi(x + a, y + b, z + c) - \xi(x, y, z), \quad \text{etc. etc. etc.}$$

Bezeichnet man diese letztern Werthe mit α, β, γ , so ergibt sich, wenn man nach Potenzen von a, b, c entwickelt, in erster Annäherung:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= a + \frac{\partial \xi}{\partial x} a + \frac{\partial \xi}{\partial y} b + \frac{\partial \xi}{\partial z} c, \\
 (18) \quad \beta &= b + \frac{\partial \eta}{\partial x} a + \frac{\partial \eta}{\partial y} b + \frac{\partial \eta}{\partial z} c, \\
 \gamma &= c + \frac{\partial \xi}{\partial x} a + \frac{\partial \xi}{\partial y} b + \frac{\partial \xi}{\partial z} c,
 \end{aligned}$$

wo ξ, η, ζ zur Abkürzung stehen für $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$, und wo also ξ, η, ζ , ebenso wie ihre Ableitungen $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, etc. etc., Werthe besitzen, die unabhängig sind von a, b, c , folglich constant sind für sämtliche mit m in Beziehung gebrachte Nachbartheilchen m_1 . Führt man, was diese Constanten anbelangt, die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\mu, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\mu_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\mu_2, \quad \nu_1 + \pi_2 = 2\mu', \\
 \frac{\partial \eta}{\partial y} &= -\nu, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\nu_1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\nu_2, \quad \pi_1 + \mu_2 = 2\nu', \\
 \frac{\partial \xi}{\partial z} &= -\pi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\pi_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\pi_2, \quad \mu_1 + \nu_2 = 2\pi',
 \end{aligned}$$

so gehen die Relationen (18) über in:

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \alpha &= (1-\mu)a - \mu_1 b - \mu_2 c, \\
 \beta &= (1-\nu)b - \nu_1 c - \nu_2 a, \\
 \gamma &= (1-\pi)c - \pi_1 a - \pi_2 b.
 \end{aligned}$$

Nach unserer Vorstellung unterscheidet sich der fingirte absolut gleichförmige Zustand des Inhaltes von O nur wenig von seinem wirklich vorhandenen Zustand. Demnach sind die neun Constanten μ, ν, π kleine Grössen, deren Quadrate und Producte (in erster Annäherung) vernachlässigt werden können. Nun folgt aus (20):

$$\begin{aligned}
 a &= \alpha + \mu a + \mu_1 b + \mu_2 c, \\
 b &= \beta + \nu b + \nu_1 c + \nu_2 a, \\
 c &= \gamma + \pi c + \pi_1 a + \pi_2 b,
 \end{aligned}$$

also, wenn man diese Werthe von a, b, c in denjenigen Ausdruck substituirt, welcher in der ersten dieser Gleichungen auf der rechten Seite sich befindet:

$$\begin{aligned}
 a &= \alpha + \mu(\alpha + \mu a + \mu_1 b + \mu_2 c) \\
 &\quad + \mu_1(\beta + \nu b + \nu_1 c + \nu_2 a) \\
 &\quad + \mu_2(\gamma + \pi c + \pi_1 a + \pi_2 b),
 \end{aligned}$$

also, wenn die Quadrate und Producte der μ, ν, π vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad a &= (1+\mu)\alpha + \mu_1\beta + \mu_2\gamma; \text{ und ebenso wird:} \\
 b &= (1+\nu)\beta + \nu_1\gamma + \nu_2\alpha, \\
 c &= (1+\pi)\gamma + \pi_1\alpha + \pi_2\beta.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter (wiederum mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der μ, ν, π):

$$(22^a) \quad a^2 + b^2 + c^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2) \\ + 2[(\nu_1 + \pi_2)\beta\gamma + (\pi_1 + \mu_2)\gamma\alpha + (\mu_1 + \nu_2)\alpha\beta],$$

also mit Rückblick auf (19):

$$(22^b) \quad r^2 = \varrho^2 + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + 2\mu'\beta\gamma + 2\nu'\gamma\alpha + 2\pi'\alpha\beta),$$

wo r und ϱ den Abstand zwischen m und m_1 bezeichnen zur Zeit des wirklichen und zur Zeit des fingirten Zustandes. Zur Abkürzung mag die vorstehende Formel so geschrieben werden:

$$(22^c) \quad r^2 = \varrho^2 + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon),$$

wo alsdann ε nur ungerade Potenzen von α, β, γ enthält.

Ist $F(r^2)$ eine beliebige Function von r^2 , so ergibt sich aus (22^c), wiederum mit Vernachlässigung der zweiten Dimensionen von $\mu, \nu, \pi, \mu', \nu', \pi'$:

$$(23^a) \quad F(r^2) = F(\varrho^2) + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon) F'(\varrho^2),$$

eine Formel, welche bei Einführung der Bezeichnungen:

$$(23^b) \quad \begin{array}{ll} F(r^2) = F, & F(\varrho^2) = \Phi, \\ F'(r^2) = F', & F'(\varrho^2) = \Phi', \\ F''(r^2) = F'', & F''(\varrho^2) = \Phi'', \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

die Gestalt annimmt:

$$(23^c) \quad F = \Phi + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon)\Phi'.$$

Es handelt sich um die Untersuchung der Coefficienten H (pag. 340), d. i. um die Untersuchung der Summen:

$$(24) \quad \begin{array}{l} m H_1 = m S m_1 a^2 f', \\ m H_{11} = m S m_1 2 a^4 f'', \\ m H_{23} = m S m_1 2 b^2 c^2 f'', \end{array}$$

wo f', f'' stehen für $f'(r^2), f''(r^2)$. Für diese Functionen f', f'' ergeben sich aus (23^{a, b, c}) die Formeln:

$$(25) \quad \begin{array}{l} f' = \varphi' + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon)\varphi'', \\ f'' = \varphi'' + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon)\varphi''', \end{array}$$

wo die φ zu den f in analoger Beziehung stehen, wie in (23^b) die Φ zu den F .

Ferner ergeben sich für die in (24) vorhandenen Grössen $a^2, a^4, b^2 c^2$ auf Grund von (21) folgende Ausdrücke:

$$(26) \quad \begin{array}{l} a^2 = (1 + 2\mu)\alpha^2 + \varepsilon', \\ a^4 = (1 + 4\mu)\alpha^4 + \varepsilon'', \\ b^2 c^2 = (1 + 2\nu + 2\pi)\beta^2 \gamma^2 + \varepsilon''', \end{array}$$

wo $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ (ebenso wie das schon vorhin eingeführte ε) mit ungeraden Potenzen von α, β, γ behaftet, und (ebenfalls wie jenes ε) aus Gliedern zusammengesetzt sind, deren jedes eine der kleinen Grössen $\mu, \nu, \pi, \mu_1, \nu_1, \pi_1, \mu_2, \nu_2, \pi_2, \mu', \nu', \pi'$ zum Factor hat. — Substituirt man die Werthe (25), (26) in (24), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 m H_1 &= m S m_1 [(1 + 2 \mu) \alpha^2 \varphi' + 2 (\mu \alpha^2 + \nu \beta^2 + \pi \gamma^2) \alpha^2 \varphi''], \\
 (27) \quad m H_{11} &= m S m_1 2 [(1 + 4 \mu) \alpha^4 \varphi'' + 2 (\mu \alpha^2 + \nu \beta^2 + \pi \gamma^2) \alpha^4 \varphi'''], \\
 m H_{23} &= m S m_1 2 [(1 + 2 \nu + 2 \pi) \beta^2 \gamma^2 \varphi'' + \\
 &\quad + 2 (\mu \alpha^2 + \nu \beta^2 + \pi \gamma^2) \beta^2 \gamma^2 \varphi'''].
 \end{aligned}$$

Denn bei der hier auszuführenden (auf die fingirte, also auf eine absolut gleichförmige Vertheilung sich beziehenden) Summation S fallen die Grössen $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$, wo sie linear vorkommen, deswegen fort, weil sie mit ungeraden Potenzen von α, β, γ behaftet sind; während sie andererseits, wo sie mit einander multiplicirt vorkommen, ebenfalls fortfallen, weil ein solches Product in Bezug auf die Grössen μ, ν, π, μ_1 , etc. von der zweiten Dimension ist.

Wir führen nun, was die Umgebung von m während ihres fingirten Zustandes anbelangt, die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
 S m_1 \varphi^2 \varphi' &= 3 K, \\
 (28) \quad S m_1 \varphi^4 \varphi'' &= \frac{3 \cdot 5}{2} \kappa, \\
 S m_1 \varphi^6 \varphi''' &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2} \kappa'.
 \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die absolute Gleichförmigkeit, welche während jenes fingirten Zustandes in der Umgebung von m herrscht, ergeben sich alsdann [wie später (pag. 356) erläutert werden soll] die Formeln:

$$\begin{aligned}
 S m_1 \alpha^2 \varphi' &= K, \\
 (29) \quad S m_1 \alpha^4 \varphi'' &= \frac{3}{2} \kappa, \quad S m_1 \alpha^2 \beta^2 \varphi'' = \frac{1}{2} \kappa, \\
 S m_1 \alpha^6 \varphi''' &= \frac{3 \cdot 5}{4} \kappa', \quad S m_1 \alpha^4 \beta^2 \varphi''' = \frac{3}{4} \kappa', \quad S m_1 \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \varphi''' = \frac{1}{4} \kappa'.
 \end{aligned}$$

Und zwar repräsentirt die erste dieser Zeilen im Ganzen drei Formeln, die aus der wirklich aufgeführten durch Vertauschung von α mit β und γ entstehen. In ähpnlicher Weise repräsentirt die zweite Zeile im Ganzen sechs, und die dritte zehn Formeln*). — Durch

*) Aus den Formeln (28) folgt, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, dass $K + \kappa = 0$ wird, sobald die Function φ der Bedingung entspricht:

$$\varphi^2 \varphi' + \frac{2}{5} \varphi^4 \varphi'' = 0,$$

d. i. der Bedingung:

$$(\alpha.) \quad \varphi' + \frac{2}{5} \eta \varphi'' = 0,$$

wo zur Abkürzung $\varphi^2 = \eta$ gesetzt ist. — Ebenso ergibt sich aus den Formeln (28) andererseits, dass $\kappa + \kappa' = 0$ wird, sobald φ der Bedingung entspricht:

$$(\beta.) \quad \varphi'' + \frac{2}{7} \eta \varphi''' = 0.$$

Beachtet man nun, dass $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ die Ableitungen von φ nach φ^2 , d. i. die Ableitungen von φ nach η sind, so zeigt sich augenblicklich, dass die Bedingung (β)

Anwendung von (29) gewinnen die für die Coëfficienten H erhaltenen Werthe (27) folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} H_1 &= (1 + 2\mu)K + (3\mu + \nu + \pi)\kappa, \\ H_{11} &= (3 + 12\mu)\kappa + (15\mu + 3\nu + 3\pi)\kappa', \\ H_{23} &= (1 + 2\nu + 2\pi)\kappa + (\mu + 3\nu + 3\pi)\kappa', \end{aligned}$$

oder (besser geschrieben) folgende:

$$\begin{aligned} (30) \quad H_1 &= K + 2\mu(K + \kappa) + \sigma\kappa, \\ H_{11} &= 3\kappa + 12\mu(\kappa + \kappa') + 3\sigma\kappa', \\ H_{23} &= \kappa + 2(\nu + \pi)(\kappa + \kappa') + \sigma\kappa', \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(31) \quad \sigma = \mu + \nu + \pi.$$

Mit Rücksicht auf die in unseren Bezeichnungen beobachtete Symmetrie ergeben sich nun aus (30) unmittelbar folgende Formelsysteme:

$$\begin{aligned} (32^a) \quad H_1 &= K + \kappa\sigma + 2(K + \kappa)\mu, \\ H_2 &= K + \kappa\sigma + 2(K + \kappa)\nu, \\ H_3 &= K + \kappa\sigma + 2(K + \kappa)\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (32^b) \quad H_{11} &= 3\kappa + 3\kappa'\sigma + 12(\kappa + \kappa')\mu, \\ H_{22} &= 3\kappa + 3\kappa'\sigma + 12(\kappa + \kappa')\nu, \\ H_{33} &= 3\kappa + 3\kappa'\sigma + 12(\kappa + \kappa')\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (32^c) \quad H_{23} &= \kappa + \kappa'\sigma + 2(\kappa + \kappa')(\nu + \pi), \\ H_{31} &= \kappa + \kappa'\sigma + 2(\kappa + \kappa')(\pi + \mu), \\ H_{12} &= \kappa + \kappa'\sigma + 2(\kappa + \kappa')(\mu + \nu). \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln*) ergeben sich augenblicklich die überraschend einfachen Relationen:

eine unmittelbare Consequenz der Bedingung (α) ist, dass also beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein würden, falls etwa φ den Werth haben sollte:

$$(1.) \quad \varphi = C \cdot \eta^{-\frac{3}{2}} = C \varrho^{-3},$$

wo C eine willkürliche Constante.

*) Wenden wir unsere Betrachtungen für einen Augenblick an auf den freien Aether, d. i. auf denjenigen Aether, welcher sich befindet innerhalb eines von ponderabler Materie leeren Raumes, und dessen Vertheilung also eine absolut gleichförmige ist. Bei Betrachtung eines solchen Aethermediums wird für die von uns herbeigezogene fingirte Anordnung am besten die wirkliche Anordnung selber zu wählen sein, weil sie den Anforderungen der absoluten Gleichförmigkeit völlig entspricht. Ist aber die fingirte Anordnung identisch mit der

$$\begin{aligned}
 (33) \quad & H_{22} + H_{33} = 6 H_{23}, \\
 & H_{33} + H_{11} = 6 H_{31}, \\
 & H_{11} + H_{22} = 6 H_{12}.
 \end{aligned}$$

Die hier berechneten Coefficienten H beziehen sich individuell auf das von uns betrachtete Aethertheilchen m ; sie sind nämlich, zufolge ihrer ursprünglichen Definition (24), Summen, die sich ausdehnen über die Umgebung von m ; sie sind daher abhängig von derjenigen Anordnung, welche der Aether zur Zeit seines Gleichgewichtes darbietet innerhalb jener Umgebung. Diese Abhängigkeit giebt sich leicht zu erkennen in den für diese Coefficienten gefundenen Formeln (32^{a, b, c}). Denn μ , ν , π , σ leiten sich ab aus denjenigen kleinen Verschiebungen, deren es bedarf, um die Umgebung von m aus ihrem wirklichen Zustande überzuführen in einen fingirten absolut gleichförmigen Zustand; und K , κ , κ' sind bestimmt durch die Natur dieses letztern Zustandes, d. i. durch die bei demselben vorhandene Dichtigkeit. Bezeichnet man letztere mit ϑ , so sind K , κ , κ' lediglich Functionen von ϑ .

Um auf die Bedeutung von μ , ν , π , σ , K , κ , κ' näher einzugehen, denken wir uns innerhalb der Umgebung von m eine kleine, in sich geschlossene Fläche abgegrenzt, welche während des wirklichen und während des fingirten Zustandes von verschiedener Gestalt

wirklichen, so sind $\mu = \nu = \pi = \sigma = 0$. In diesem Falle verwandeln sich also die Formeln (32) in:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & H_1 = H_2 = H_3 = K, \\
 & H_{11} = H_{22} = H_{33} = 3\kappa, \\
 & H_{23} = H_{31} = H_{12} = \kappa.
 \end{aligned}$$

Offenbar sind nun die Coefficienten H des freien Aethers identisch mit ihren Mittelwerthen h ; die Gleichungen (α) können also auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad & h_1 = h_2 = h_3 = K, \\
 & h_{11} = h_{22} = h_{33} = 3\kappa, \\
 & h_{23} = h_{31} = h_{12} = \kappa.
 \end{aligned}$$

Diese Werthe der h entsprechen der II. und III. Voraussetzung (pag. 333). Die I. Voraussetzung ist ebenfalls erfüllt, weil ponderable Materie gar nicht vorhanden ist. Bedient man sich nun der bei Gelegenheit jener Voraussetzungen eingeführten Bezeichnungen, so verwandeln sich die Formeln (β) in:

$$\begin{aligned}
 (\gamma) \quad & \bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{p} = K, \\
 & a = b = c = \kappa.
 \end{aligned}$$

Bildet man daher mit Bezug auf den freien Aether die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit m (pag. 335), so ergiebt sich:

$$(\delta) \quad 0 = \frac{\alpha^2}{m^2 - (K + \kappa)} + \frac{\beta^2}{m^2 - (K + \kappa)} + \frac{\gamma^2}{m^2 - (K + \kappa)}.$$

d. i.

$$(\varepsilon) \quad m^2 = K + \kappa.$$

sein wird, und welche im erstern Zustande mit S , im letztern mit Σ bezeichnet werden mag. Die innerhalb dieser Fläche enthaltene Aethermasse M ist ausdrückbar durch das über S ausgedehnte Integral:

$$(34) \quad M = \iiint q \, da \, db \, dc,$$

andererseits aber auch ausdrückbar durch das über Σ ausgedehnte Integral:

$$(35) \quad M = \iiint \vartheta \, da \, d\beta \, d\gamma,$$

vorausgesetzt, dass man unter q und ϑ die Dichtigkeiten des Aethers zur Zeit des wirklichen und zur Zeit des fingirten Zustandes versteht. Durch Transformation verwandelt sich das letztere Integral in

$$(35^a) \quad M = \iiint \vartheta \nabla \, da \, db \, dc,$$

wo ∇ die Functionaldeterminante von α, β, γ nach a, b, c ist, und wo nunmehr die Integration nicht mehr über Σ , sondern [ebenso wie in (34)] über S ausgedehnt ist. Beachtet man, dass die Fläche S, Σ beliebig klein sein kann, so folgt aus (34) und (35^a) augenblicklich:

$$q = \vartheta \nabla,$$

oder, wenn man den Werth der Determinante ∇ aus (20) berechnet, und die höheren Dimensionen von $\mu, \nu, \pi, \mu_1, \dots$ wiederum vernachlässigt:

$$q = \vartheta(1 - \mu - \nu - \pi),$$

d. i. nach (31):

$$(36) \quad \begin{cases} q = \vartheta(1 - \sigma), \text{ oder:} \\ \vartheta = \frac{q}{1 - \sigma} = q(1 + \sigma). \end{cases}$$

Da σ (ebenso wie μ, ν, π) eine der Umgebung von m zugehörige Constante ist (vergl. pag. 344), und da ϑ die Dichtigkeit dieser Umgebung nach Eintritt des fingirten absolut gleichförmigen Zustandes repräsentirt, also ebenfalls constant ist, so folgt aus (36), dass auch q constant ist. Der in unseren Rechnungen eingehaltene niedrige Grad der Annäherung bringt also mit sich, dass die Dichtigkeit des Aethers während seines wirklichen Zustandes in der Umgebung von m (d. i. innerhalb der Wirkungssphäre von m) als constant betrachtet wird.

Aus den Formeln (22^{a, b}) ergibt sich, dass diejenigen Aethertheilchen, welche zur Zeit des wirklichen Zustandes auf einer um m beschriebenen Kugelfläche

$$(37^a) \quad a^2 + b^2 + c^2 = \text{Const.}$$

liegen, nach Herbeiführung des fingirten Zustandes auf einer Ellipsoidfläche sich befinden werden, die dargestellt ist durch die Gleichung:

$$(37^b) \quad (1 + 2\mu) \alpha^2 + (1 + 2\nu) \beta^2 + (1 + 2\pi) \gamma^2 + 4\mu' \beta \gamma + 4\nu' \gamma \alpha + 4\pi' \alpha \beta = \text{Const.}$$

Daraus folgt, dass die Umgebung des Theilchens m aus ihrem wirklichen Zustande in jenen fingirten Zustand übergehen wird durch drei auf einander senkrechte Dilatationen (resp. Contractionen), die ihrer Grösse und Richtung nach charakterisirt sind durch die dieser Umgebung zugehörigen Constanten $\mu, \nu, \pi, \mu', \nu', \pi'$.

Was also die für die Coefficienten H gefundenen Werthe (32^{a, b, c}) anbelangt, so sind μ, ν, π, σ abhängig von denjenigen Dilatationen, deren es bedarf, um die Umgebung von m aus ihrem wirklichen Zustande überzuführen in jenen fingirten absolut gleichförmigen Zustand; während andererseits K, κ, κ' Functionen derjenigen Dichtigkeit ϑ sind, welche nach Eintritt letzteren Zustandes stattfindet.

Der fingirte Zustand, in welchen die Umgebung von m versetzt werden sollte, ist bisher nicht vollständig bestimmt worden. Er sollte ein absolut gleichförmiger sein. Zu seiner vollständigen Bestimmung ist noch erforderlich die Angabe der Dichtigkeit, welche dieser absolut gleichförmige Zustand besitzen soll, d. i. die Angabe der Dichtigkeit ϑ . Offenbar darf sich diese Dichtigkeit nicht gar zu weit entfernen von derjenigen Dichtigkeit q , welche im wirklichen Zustande vorhanden ist; innerhalb des so bestimmten Spielraumes aber darf ϑ willkürlich gewählt werden. Vorzugsweise sind es zwei Methoden, welche in diesem Gebiete der Willkür als besonders zweckmässig hervortreten.

I. Die Methode der normalen Dichtigkeit. — Man nimmt für die Dichtigkeit ϑ des fingirten Zustandes, an welcher Stelle des Krystalls das betrachtete Aethertheilchen m sich auch befinden mag, immer ein und denselben Werth, einen gewissen Normalwerth, welcher etwa gleich ist dem Mittelwerthe der Aetherdichtigkeit q innerhalb des ganzen Krystalles. Alsdann werden K, κ, κ' (als nur abhängig von ϑ) Constante sein, nämlich für alle Stellen des Krystalles ein und dieselben Werthe besitzen.

II. Die Methode der localen Dichtigkeit. Man nimmt an jeder Stelle des Krystalls für ϑ denjenigen Werth, welchen die Aetherdichtigkeit an dieser Stelle bereits besitzt während des wirklichen Zustandes, d. i. den an dieser Stelle vorhandenen Werth von q . Alsdann werden K, κ, κ' von einer Stelle des Krystalls zur andern verschiedene Werthe besitzen, nämlich Functionen von q sein. Und gleichzeitig wird alsdann die Summe $\sigma = \mu + \nu + \pi$ Null werden, wie solches mit Rückblick auf (36) aus der Identificirung von ϑ und q unmittelbar folgt.

Die erste Methode erscheint weniger gut als die zweite. Denn

unsere Rechnungen sind um so genauer, je weniger der wirkliche Zustand der Umgebung irgend eines Theilchens von dem fingirten Zustande derselben differirt; und diese Differenz ist offenbar bei der Methode der normalen Dichtigkeit grösser als bei der Methode der localen Dichtigkeit.

§. 5.

Die Mittelwerthe h der Coefficienten H .

Wir haben früher (pag. 332) drei Voraussetzungen eintreten lassen, deren Berechtigung jetzt näher untersucht werden soll.

Die I. Voraussetzung bestand darin, dass die directe Einwirkung der ponderablen Molecüle auf die Aethertheilchen Null ist. Dass diese Voraussetzung unseren Grundvorstellungen durchaus entspricht, übersieht man sofort; denn jene Wirkung wird als Null zu betrachten sein, sobald die Excursionen u , v , w der einzelnen Aethertheilchen so klein gedacht werden, dass jene Kräfte im Gebiete einer solchen Excursion als constant angesehen werden können.

Die II. Voraussetzung drückte sich aus durch die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} h_{22} + h_{33} &= 6h_{23}, \\ h_{33} + h_{11} &= 6h_{31}, \\ h_{11} + h_{22} &= 6h_{12}. \end{aligned}$$

Nun haben wir aber gefunden (pag. 348), dass zwischen den Coefficienten H an jeder beliebigen Stelle des Krystalles die Relationen obwalten:

$$(2) \quad \begin{aligned} H_{22} + H_{33} &= 6H_{23}, \\ H_{33} + H_{11} &= 6H_{31}, \\ H_{11} + H_{22} &= 6H_{12}. \end{aligned}$$

Und hieraus ergeben sich jene die Mittelwerthe der H betreffende Gleichungen (1) als eine ebenso unmittelbare wie nothwendige Consequenz.

Es bleibt also nur noch übrig die III. Voraussetzung, welche sich ausdrückte durch die Gleichungen:

$$(3) \quad h_1 = h_2 = h_3.$$

Nun haben wir gefunden (pag. 347):

$$(4) \quad \begin{aligned} H_1 &= K + \kappa\sigma + 2(K + \kappa)\mu, \\ H_2 &= K + \kappa\sigma + 2(K + \kappa)\nu, \\ H_3 &= K + \kappa\sigma + 2(K + \kappa)\pi. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich, wenn man die Methode der normalen Dichtigkeit (pag. 350) in Anwendung bringt, die Grössen K , κ , μ also als

Constante betrachtet, für die Mittelwerthe h_1, h_2, h_3 folgende Werthe:

$$(5) \quad \begin{aligned} h_1 &= K + \kappa \bar{\sigma} + 2(K + \kappa) \bar{\mu}, \\ h_2 &= K + \kappa \bar{\sigma} + 2(K + \kappa) \bar{\nu}, \\ h_3 &= K + \kappa \bar{\sigma} + 2(K + \kappa) \bar{\pi}, \end{aligned}$$

wo $\bar{\sigma}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\pi}$ die Mittelwerthe von σ, μ, ν, π vorstellen sollen.

Jene III. Voraussetzung $h_1 = h_2 = h_3$ würde also verlangen, dass

$$(6) \quad \bar{\mu} = \bar{\nu} = \bar{\pi}$$

ist. Alsdann aber würde, wie aus den für die H gefundenen Werthen (pag. 347) sofort erhellt, nicht nur $h_1 = h_2 = h_3$, sondern auch $h_{11} = h_{22} = h_{33}$ und $h_{23} = h_{31} = h_{12}$ werden. Soll also die III. Voraussetzung aufrecht erhalten werden, so wird die hier benutzte Methode der normalen Dichtigkeit anzusehen sein als ein zu grobes, den krystallinischen Charakter völlig auslöschendes Verfahren, folglich zu verwerfen sein.

Demgemäss gehen wir über zur Methode der localen Dichtigkeit. Vermittelst dieser ergibt sich aus (4):

$$(7) \quad \begin{aligned} h_1 &= \bar{K} + \overline{\kappa \sigma} + 2(\overline{K + \kappa}) \bar{\mu}, \\ h_2 &= \bar{K} + \overline{\kappa \sigma} + 2(\overline{K + \kappa}) \bar{\nu}, \\ h_3 &= \bar{K} + \overline{\kappa \sigma} + 2(\overline{K + \kappa}) \bar{\pi}, \end{aligned}$$

wo wiederum die Mittelwerthe durch horizontale Striche angedeutet sind, wo also z. B. $\overline{\kappa \sigma}$ den Mittelwerth des Productes $\kappa \sigma$, ebenso $(\overline{K + \kappa}) \bar{\mu}$ den Mittelwerth des Productes $(K + \kappa) \mu$ vorstellt. Soll daher die III. Voraussetzung $h_1 = h_2 = h_3$ mit unseren Formeln in Einklang sein, so muss

$$(8) \quad (\overline{K + \kappa}) \bar{\mu} = (\overline{K + \kappa}) \bar{\nu} = (\overline{K + \kappa}) \bar{\pi}$$

sein.

Allerdings scheint ein Widerspruch zwischen diesen Relationen (8) und unseren Grundvorstellungen **nicht** statzufinden. Aber das ist nicht genug. Die hier entwickelte Theorie würde vielmehr erst dann eine völlig befriedigende sein, wenn sich nachweisen liesse, dass die Relationen (8), die Repräsentanten der III. Voraussetzung, eine unmittelbare Consequenz jener Grundvorstellungen sind. Ob ein solcher Nachweis möglich ist, darüber habe ich bis jetzt kein bestimmtes Urtheil. Jedenfalls ist es mir bisher, trotz mancher Bemühung, nicht gelungen, denselben zu führen. Und die mehrfach verbreitete Ansicht, dass ein solcher Nachweis sich führen liesse durch Betrachtung der im Innern des Aethers vorhandenen Druckkräfte,

scheint mir einer strengen Kritik gegenüber nicht Stand halten zu können.

Die in (8) enthaltene Grösse $K + \kappa$ ist, da wir die Methode der localen Dichtigkeit eingeschlagen haben, eine Function der localen Dichtigkeit q , nämlich angehörig einem fingirten Aethermedium, welches in absolut gleichförmiger Weise mit jener Dichtigkeit q im Raume vertheilt ist. Man könnte zur Erklärung der Relationen (8) die Conjectur machen, dass diese Function $K + \kappa$ Null wäre für jeden beliebigen Werth von q . Eine solche Conjectur ist aber unstatthaft. Denn wäre $K + \kappa$ für jedes q gleich Null, so würde die Function $\kappa + \kappa'$ ebenfalls für jedes q Null sein (wie solches im nächsten Paragraph dargelegt werden soll); und demgemäss würde alsdann (wie aus den Werthen der H (pag. 347) augenblicklich folgt) nicht nur $h_1 = h_2 = h_3$, sondern auch $h_{11} = h_{22} = h_{33}$ und $h_{23} = h_{31} = h_{12}$ werden.

Noch in anderer Art lässt sich nachweisen, dass die von q abhängende Function $K + \kappa$ nicht für jedes q Null sein kann. Es ist nämlich unmöglich, dass sie verschwindet für diejenige Dichtigkeit q , welche im freien Aether vorhanden ist, weil sonst (vergl. die Note auf pag. 347) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether den Werth Null erhalten würde.

§. 6.

Betrachtung eines absolut gleichförmig vertheilten Aethermediums.

Der Zweck dieses Paragraphen besteht lediglich darin, den nachträglichen Beweis zu liefern für einige früher gemachte Behauptungen.

In einem absolut gleichförmig vertheilten Aethermedium seien m und m_1 irgend zwei Theilchen mit der Entfernung ϱ und mit den relativen Coordinaten α, β, γ . Ferner sei Φ eine beliebige Function von ϱ^2 , welche verschwindet, sobald ihr Argument ϱ^2 eine gewisse Grösse überschreitet.

Wir denken uns durch m eine gerade Linie gelegt, und zwar in solcher Richtung, dass ihre Richtungsosinus proportional sind mit drei gegebenen Constanten A, B, C . Auf diese Linie denken wir uns die Entfernung ϱ senkrecht projicirt. Für die so erhaltene Projection δ ergibt sich dann die Formel:

$$(1) \quad \delta = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Aus dieser folgt:

$$(2) \quad (A^2 + B^2 + C^2)^n \delta^{2n} = (A\alpha + B\beta + C\gamma)^{2n},$$

wo n eine beliebig gewählte ganze Zahl sein mag. Aus (2) ergibt sich durch Multiplication mit $m_1 \Phi$ und durch Summation über alle zur Umgebung von m gehörige Theilchen m_1 :

$$(3) \quad (A^2 + B^2 + C^2)^n S m_1 \delta^{2n} \Phi = S m_1 (A\alpha + B\beta + C\gamma)^{2n} \Phi.$$

Entwickelt man linker Hand die Potenz $(A^2 + B^2 + C^2)^n$, und ebenso rechter Hand den Ausdruck $(A\alpha + B\beta + C\gamma)^{2n}$ nach dem polynomischen Satz, und beachtet man dabei, dass auf der rechten Seite diejenigen Glieder verschwinden, welche mit ungeraden Potenzen von α, β, γ behaftet sind, so erhält man:

$$(4) \quad \left(\sum \frac{\Pi n \cdot A^{2p} B^{2q} C^{2r}}{\Pi p \cdot \Pi q \cdot \Pi r} \right) \cdot S m_1 \delta^{2n} \Phi = \sum \left(\frac{\Pi 2n \cdot A^{2p} B^{2q} C^{2r}}{\Pi 2p \cdot \Pi 2q \cdot \Pi 2r} \cdot S m_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi \right),$$

wo $\Pi 0 = 1$ und $\Pi n = 1.2.3 \dots n$ ist, und wo die Summation Σ ausgedehnt zu denken ist über alle diejenigen Systeme positiver ganzer Zahlen p, q, r , für welche

$$(5) \quad p + q + r = n$$

ist. Da A, B, C beliebig gegebene, d. i. beliebig gewählte Constante sind, so müssen in der Formel (4) die links und rechts mit dem Product $A^{2p} B^{2q} C^{2r}$ behafteten Glieder einander gleich sein; somit folgt:

$$(6) \quad \frac{\Pi n}{\Pi p \cdot \Pi q \cdot \Pi r} S m_1 \delta^{2n} \Phi = \frac{\Pi 2n}{\Pi 2p \cdot \Pi 2q \cdot \Pi 2r} S m_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi.$$

Noch mag bemerkt werden, dass zufolge der vorausgesetzten absoluten Gleichförmigkeit des Aethermediums die Gleichungen stattfinden werden:

$$(7) \quad S m_1 \delta^{2n} \Phi = S m_1 \alpha^{2n} \Phi = S m_1 \beta^{2n} \Phi = S m_1 \gamma^{2n} \Phi.$$

Nun ist, um eine Betrachtung von anderer Seite her einzuschlagen:

$$(8) \quad \begin{aligned} \varrho^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \\ m_1 \varrho^{2n} \Phi &= m_1 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^n \Phi, \end{aligned}$$

mithin auch:

$$(9) \quad S m_1 \varrho^{2n} \Phi = S m_1 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^n \Phi,$$

oder, wenn nach dem polynomischen Satz entwickelt wird:

$$(10) \quad S m_1 \varrho^{2n} \Phi = \sum \left(\frac{\Pi n}{\Pi p \cdot \Pi q \cdot \Pi r} S m_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi \right),$$

wo die Summation Σ [ebenso wie in (4)] über alle diejenigen Systeme positiver ganzer Zahlen p, q, r ausgedehnt ist, welche der Bedingung (5) entsprechen. — Substituirt man in (10) für $S m_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi$ den durch (6) dargebotenen Werth, so ergibt sich mit Rücksicht auf (7):

$$(11a) \quad S m_1 \varrho^{2n} \Phi = \left\{ \sum \left(\frac{\Pi 2n}{\Pi 2p \cdot \Pi 2q \cdot \Pi 2r} \frac{\Pi 2p \cdot \Pi 2q \cdot \Pi 2r}{\Pi 2n} \right) \right\} \cdot S m_1 \alpha^{2n} \Phi,$$

d. i.

$$(11^b) \quad Sm_1 \varrho^{2n} \Phi = N. Sm_1 \alpha^{2n} \Phi,$$

wo N die aus (11^a) ersichtliche Bedeutung besitzt, mithin eine allein von n abhängende Zahl repräsentirt. — Um den Werth dieser Zahl N zu ermitteln, braucht man nur zu beachten, dass die hier angestellten Betrachtungen Schritt für Schritt auch dann gültig sein müssen, wenn man statt der Summationen über discrete Punkte Integrationen nimmt, die sich ausdehnen über eine um m beschriebene Kugel von beliebig gegebenem Radius. Der Einfachheit willen mag dieser Radius $= 1$, und die Function Φ ebenfalls $= 1$ gewählt werden. Setzt man also:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varrho \cos \vartheta &= \varrho \mu, \\ \beta &= \varrho \sin \vartheta \cos \varphi &= \varrho \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \\ \gamma &= \varrho \sin \vartheta \sin \varphi &= \varrho \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, \end{aligned}$$

und nimmt man an Stelle von m_1 das Raumelement:

$$\varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi,$$

so wird man in ganz derselben Weise, wie man zur Formel (11^{a, b}) gelangte, auch gelangen zu folgender Formel:

$$(12) \quad \iiint \varrho^{2n} \varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi = N. \iiint (\varrho\mu)^{2n} \varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi,$$

wo die Zahl N identisch ist mit der in (11^{a, b}) enthaltenen Zahl N , und wo die Integrationen nach ϱ, μ, φ die Grenzen besitzen:

$$\begin{aligned} \text{Grenzen für } \varrho: & \quad 0 \dots\dots 1, \\ \text{Grenzen für } \mu: & \quad -1 \dots\dots +1, \\ \text{Grenzen für } \varphi: & \quad 0 \dots\dots 2\pi. \end{aligned}$$

Führt man zunächst die Integrationen nach ϱ und φ aus, so ergibt sich:

$$\frac{2\pi}{2n+3} \int_{-1}^{+1} d\mu = \frac{2\pi \cdot N}{2n+3} \int_{-1}^{+1} \mu^{2n} d\mu$$

d. i.

$$\frac{4\pi}{2n+3} = \frac{4\pi \cdot N}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Somit folgt:

$$(13) \quad N = 2n + 1.$$

Die Formel (11^{a, b}) geht also über in:

$$(14) \quad Sm_1 \varrho^{2n} \Phi = (2n+1) Sm_1 \alpha^{2n} \Phi.$$

Setzt man also zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(15^a) \quad Sm_1 \varrho^{2n} \Phi = \Gamma,$$

so folgt aus (14) und (7):

$$(15^b) \quad Sm_1 \delta^{2n} \Phi = Sm_1 \alpha^{2n} \Phi = Sm_1 \beta^{2n} \Phi = Sm_1 \gamma^{2n} \Phi = \frac{\Gamma}{2n+1}.$$

Sodann folgt weiter mit Rücksicht auf (6)

$$(15^c) \quad Sm_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi = \frac{\Pi n}{\Pi p. \Pi q. \Pi r} \frac{\Pi 2p. \Pi 2q. \Pi 2r}{\Pi 2n} \frac{\Gamma}{2n+1}.$$

Diese letztere Formel kann, weil nach (5) $p+q+r=n$, mithin

$$\frac{\Pi n}{\Pi p. \Pi q. \Pi r} = \frac{2^n \Pi n}{2^p \Pi p. 2^q \Pi q. 2^r \Pi r} = \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{(2 \cdot 4 \dots 2p) (2 \cdot 4 \dots 2q) (2 \cdot 4 \dots 2r)}$$

ist, auch so geschrieben werden:

$$(15^d) \quad Sm_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi = \frac{(1 \cdot 3 \dots 2p-1) (1 \cdot 3 \dots 2q-1) (1 \cdot 3 \dots 2r-1)}{1 \cdot 3 \dots 2n-1} \frac{\Gamma}{2n+1}.$$

Aus diesen Formeln ($15^{a,b,c,d}$) ergibt sich aber unmittelbar die Richtigkeit der früher (pag. 346) in Bezug auf die Grössen K, κ, κ' gemachten Behauptungen.

Wir denken uns, um zu einer ganz andern Betrachtung überzugehen, ein und dasselbe Aethermedium successive in zwei verschiedenen Zuständen. Bei beiden mag die Anordnung eine absolut gleichförmige sein; während aber bei der einen die Dichtigkeit $= \vartheta$ ist, mag sie bei der andern einen von ϑ unendlich wenig verschiedenen Werth besitzen, nämlich $= \vartheta + d\vartheta$ sein.

Mit Bezug auf die Anordnung (ϑ) mögen die Summen K, κ, κ' (pag. 346) gebildet gedacht werden:

$$Sm_1 \alpha^2 \varphi' = K,$$

$$(16) \quad Sm_1 \alpha^4 \varphi'' = \frac{3}{2} \kappa, \quad Sm_1 \alpha^2 \beta^2 \varphi'' = \frac{1}{2} \kappa,$$

$$Sm_1 \alpha^6 \varphi''' = \frac{15}{4} \kappa', \quad Sm_1 \alpha^4 \beta^2 \varphi''' = \frac{3}{4} \kappa', \quad Sm_1 \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \varphi''' = \frac{1}{4} \kappa'.$$

Die analogen Summen mit Rücksicht auf die Anordnung ($\vartheta + d\vartheta$) mögen bezeichnet werden mit $K^* + dK, \kappa + d\kappa, \kappa' + d\kappa'$.

Denken wir uns für diese zweite Anordnung die Coefficienten H berechnet, so ergibt sich aus der Definition dieser Coefficienten (pag. 340) augenblicklich:

$$(17) \quad \begin{aligned} H_1 &= H_2 = H_3 = K + dK, \\ H_{11} &= H_{22} = H_{33} = 3(\kappa + d\kappa), \\ H_{23} &= H_{31} = H_{12} = \kappa + d\kappa. \end{aligned}$$

An Stelle der früheren Anordnungen (q) und (ϑ) werden nämlich hier in Betracht gezogen die Anordnungen ($\vartheta + d\vartheta$) und (ϑ). Substituirt man die Werthe (17) in die zwischen den H und K, κ, κ' immer stattfindenden Relationen (pag. 347), so ergibt sich, dass im vorliegenden Falle $\mu = \nu = \pi$, folglich $\mu = \nu = \pi = \frac{\sigma}{3}$ ist. Gleichzeitig verwandeln sich jene Relationen in

$$\begin{aligned}
 K + dK &= K + \kappa\sigma + \frac{2}{3}(K + \kappa)\sigma, \\
 (18) \quad 3(\kappa + d\kappa) &= 3\kappa + 3\kappa'\sigma + 4(\kappa + \kappa')\sigma, \\
 \kappa + d\kappa &= \kappa + \kappa'\sigma + \frac{4}{3}(\kappa + \kappa')\sigma.
 \end{aligned}$$

Die dritte dieser Formeln ist identisch mit der zweiten. Die beiden ersten aber lassen sich einfacher so schreiben:

$$\begin{aligned}
 (19) \quad dK &= \frac{2K + 5\kappa}{3}\sigma, \\
 d\kappa &= \frac{4\kappa + 7\kappa'}{3}\sigma.
 \end{aligned}$$

Nun ist (vergl. pag. 349) im Allgemeinen $q = \vartheta(1 - \sigma)$, folglich im hier betrachteten Falle:

$$\vartheta + d\vartheta = \vartheta(1 - \sigma),$$

mithin

$$d\vartheta = -\vartheta\sigma,$$

d. i.

$$(20) \quad \sigma = -\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Aus (19) und (20) folgt sofort:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad dK &= -\frac{2K + 5\kappa}{3} \frac{d\vartheta}{\vartheta}, \\
 d\kappa &= -\frac{4\kappa + 7\kappa'}{3} \frac{d\vartheta}{\vartheta},
 \end{aligned}$$

und hieraus durch Addition:

$$(22) \quad d(K + \kappa) = -\frac{2(K + \kappa) + 7(\kappa + \kappa')}{3} \frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Aus dieser Formel aber folgt sofort, dass wenn $K + \kappa$ für jeden Werth von ϑ Null ist, Gleiches auch von $\kappa + \kappa'$ gelten muss*).

Hiermit ist die Richtigkeit einer früher gemachten Behauptung (pag. 353) erwiesen.

§. 7.

Zusammenfassung des Resultates der Untersuchung.

Geht man von den zu Anfang dieses Aufsatzes (pag. 325) genannten Hypothesen aus, und nimmt man ausserdem an, dass die ponderablen Molecüle eines Körpers keine directe Einwirkung haben auf die Aethervibrationen in seinem Innern, so gelangt man für die Bewegung ebener Aetherwellen in einem zwei und zweigliedrigen Kry-

*) Mit dem hier erhaltenen Resultat steht völlig in Einklang eine früher gemachte Bemerkung (Note auf pag. 346), nämlich die Bemerkung, dass $K + \kappa$ sowohl, als auch $\kappa + \kappa'$ für jeden Werth von ϑ verschwinden würden, sobald das Potential zweier Aethertheilchen auf einander umgekehrt proportional wäre mit der dritten Potenz ihrer Entfernung.

stall, ohne Zuziehung irgend einer weiteren Voraussetzung, zu folgenden Ergebnissen:

I. Sind α, β, γ die Cosinus derjenigen Winkel, unter welchen die Normale der Welle gegen die Krystallachsen geneigt ist, so bestimmt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit m der Welle durch die für m^2 quadratische Gleichung:

$$0 = \frac{\alpha^2}{mm - (\bar{p} + a)} + \frac{\beta^2}{mm - (\bar{p} + b)} + \frac{\gamma^2}{mm - (\bar{p} + c)}$$

wo $\bar{p}$ die Bedeutung hat:

$$\bar{p} = \bar{a}\alpha^2 + \bar{b}\beta^2 + \bar{c}\gamma^2,$$

und wo a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sechs dem Krystall eigenthümliche Constante sind. — Demgemäss existiren für jede gegebene Richtung α, β, γ nur zwei Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die beiden Wurzeln jener quadratischen Gleichung sind.

II. Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Wellen mit m und m' , ferner die Cosinus ihrer Vibrationsrichtungen mit A, B, C und A', B', C' , so gelten die Formeln:

$$A : B : C = \frac{\alpha}{m'm' - (\bar{p} + a)} : \frac{\beta}{m'm' - (\bar{p} + b)} : \frac{\gamma}{m'm' - (\bar{p} + c)},$$

$$A' : B' : C' = \frac{\alpha}{mm - (\bar{p} + a)} : \frac{\beta}{mm - (\bar{p} + b)} : \frac{\gamma}{mm - (\bar{p} + c)},$$

und ferner die Formeln:

$$0 = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

$$0 = \alpha A' + \beta B' + \gamma C',$$

$$0 = AA' + BB' + CC',$$

welche zeigen, dass die beiden Wellen genau transversal, und dass ihre Vibrationsrichtungen genau senkrecht auf einander sind.

Diese Resultate würden identisch sein mit den Fresnel'schen Gesetzen (die Vibrationsrichtung im Sinne meines Vaters genommen), sobald sich nachweisen liesse, dass die Constanten $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ einander gleich sind; denn alsdann würde der Ausdruck

$$\bar{p} = \bar{a}\alpha^2 + \bar{b}\beta^2 + \bar{c}\gamma^2$$

gleich sein dem gemeinschaftlichen Werthe jener drei Constanten, also ebenfalls eine Constante sein.

Dass aber die Constanten $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ einander gleich sind, scheint, wenn auch nicht im Widerspruch mit den genannten Hypothesen, so doch wenigstens keine nothwendige Consequenz derselben zu sein.

Es dürfte noch zu bemerken sein, dass die erhaltenen Resultate Aehnlichkeit besitzen mit den Resultaten einer Untersuchung von de Saint-Venant (C. R.-LVII. pag. 387; Ber. d. Berliner Pysikal. Ges. XIX. pag. 145).

September 1868.