Ueber die Ablenkung der Lothlinie in grossen Höhen.

Dass in grossen Höhen über der Erdoberfläche die Lothlinie eine Ablenkung zeigen müsse, verglichen mit derjenigen Richtung, welche sie in derselben Normale des Erdsphäroids an der Erdoberfläche besitzt, folgt einfach aus der Thatsache, dass in grossen Höhen die Anziehung der Erde abnimmt, die Centrifugalkraft dagegen zunimmt. Denn danach muss die Resultante beider, d. i. die Schwere, in grossen Höhen (ausgenommen am Aequator und in den Polen) einen kleineren Winkel mit der Erdachse einschliessen als in derselben Normale am Erdboden, oder die Polhöhe muss dort zu gross erscheinen. Ueber die Grösse dieser Ablenkung aber dürfte es zur Zeit unmöglich sein eine vollkommen exacte Bestimmung zu treffen. Die Annahme des Erdsphäroids als eines homogenen Körpers widerstreitet zu sehr den bekannten geognostischen Thatsachen, auch liefert sie eine Erdgestalt, die nur wenig mit den Ergebnissen geodätischer Operationen harmonirt. Die Annahme eines nicht homogenen Erdkörpers aber scheitert an der Unmöglichkeit, ein Gesetz aufzustellen, nach welchem die Dichtigkeit mit der Tiefe zunimmt. Nichts desto weniger scheint auf dem folgenden Wege zum wenigsten eine angenäherte Bestimmung der gedachten Grösse erreichbar zu sein.

Wir werden, um grösserer Deutlichkeit willen, streng zwischen „Anziehung“ und „Schwere“ unterscheiden, indem wir unter Schwere stets nur die Resultante aus Anziehung und Centrifugalkraft verstehen.

1) Es sei a die grosse Halbachse des Erdsphäroids. In irgend einem Punkte des Aequators sei ferner g_0 die Schwere, G_0 die Anziehung. Für die Centrifugalkraft am Aequator hat man den bekannten Ausdruck

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2}$$

wo T die Dauer des Sterntages in Secunden bedeutet, oder wenn man setzt

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = f$$

so wird fa der Ausdruck für die Centrifugalkraft am Aequator. Aus der Zusammensetzung der Kräfte folgt sodann

$$g_0 = G_0 - fa$$

oder wenn man $\frac{fa}{G_0} = \alpha$ setzt

$$g_0 = G_0 (1 - \alpha) \dots \dots \dots (1)$$

Die Beobachtungen geben $g_0 = 9^m 78061$ und mit Rücksicht auf die *Bessel'schen* Erddimensionen wird $fa = 0^m 03391$ also $G_0 = 9^m 81452$. Folglich hat man für das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Anziehung am Aequator den Werth

$$\alpha = \frac{1}{289,42} \dots \dots \dots (2)$$

und für das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwere am Aequator den Werth

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} = \beta = \frac{1}{288,42} \dots \dots \dots (3)$$

Die Grössen α und β sind offenbar von derselben Ordnung wie die Abplattung des Erdsphäroids, welche wir hier als die erste Ordnung bezeichnen wollen.

2) In irgend einem Punkte A der Erdoberfläche von der Polhöhe φ sei g die Schwere, G die Anziehung. Die Richtung der Anziehung schneide die Erdachse im Punkte C , und es sei $AC = r$ und der Winkel, den diese Linie mit der Ebene des Aequators einschliesst, $= \psi$. Für die Centrifugalkraft im Punkte A kann man sodann setzen $fr \cos \psi$. Da nun in diesem Punkte A die Richtung der Schwere mit der Normale des Erdsphäroids zusammenfällt, so folgt aus der Zusammensetzung der Kräfte

$$\tan \varphi = \frac{G \sin \psi}{G \cos \psi - fr \cos \psi}$$

d. i.

$$\tan \varphi = \frac{\tan \psi}{1 - \alpha} \dots \dots \dots (4)$$

wo wir der Kürze wegen den Beweis unterdrücken, dass bis auf Grössen, welche gegen α verschwinden,

$$\frac{fr}{G} = \frac{fa}{G_0} = \alpha$$

gesetzt werden kann.

Die Winkel φ und ψ stehen hiernach in einer ähnlichen Beziehung zu einander wie geographische und geocentrische Breite. Jedoch ist ψ immer grösser als die geocentrische Breite, oder die Richtung der Anziehung geht zwischen der Normale und dem Mittelpunkte des Ellipsoids hindurch, wie es auch beim homogenen Ellipsoid der Fall ist.

Für $\varphi = 45^\circ$ ist $\psi = 44^\circ 54' 4'' 6$.

3) Im Punkte A von der Polhöhe φ errichte man auf der Erdoberfläche eine Normale AB und setze die Höhe $AB = h$. Zur Bestimmung der Anziehung in B müssten wir, unter der Voraussetzung eines homogenen Ellipsoids, nach dem Satze von *Ivory* verfahren. Da aber die Hypothese der Homogenität nicht der Wirklichkeit entspricht, überdies wir uns nur auf kleine Werthe von h beschränken, so erscheint es ausreichend, für den genannten Zweck einfach den vorhin bestimmten Punkt C der Erdachse wie den anziehenden Punkt gelten zu lassen. Dies wird nicht nur der Wahrheit nahe bleiben, sondern es giebt auch eine ziemlich einfache Rechnung.

Denn es sei $BC = r'$ und der Winkel, den diese Linie mit der Ebene des Aequators einschliesst, $= \psi'$. Dann hat die Anziehung im Punkte B den Werth $G \frac{r'^2}{r^2}$, die Centrifugalkraft im Punkte B wird $fr' \cos \psi'$, und wenn man den Winkel, den die Richtung der Schwere im Punkte B mit der Ebene des Aequators bildet, mit φ' bezeichnet, so folgt aus der Zusammensetzung der Kräfte

$$\tan \varphi' = \frac{G \frac{r'^2}{r^2} \sin \psi'}{G \frac{r'^2}{r^2} \cos \psi' - fr' \cos \psi'}$$

d. h.

$$\tan \varphi' = \frac{\tan \psi'}{1 - \frac{\alpha r'^2}{r^3}} \dots \dots \dots (5)$$

Zur Bestimmung von r' und ψ' durch h hat man überdies die Gleichungen

$$\begin{aligned} r' \sin \psi' &= r \sin \psi + h \sin \varphi \\ r' \cos \psi' &= r \cos \psi + h \cos \varphi \end{aligned}$$

aus denen folgt

$$r'^2 = r^2 + h^2 + 2rh \cos(\varphi - \psi) \dots \dots \dots (6)$$

$$\tan \psi' = \frac{r \sin \psi + h \sin \varphi}{r \cos \psi + h \cos \varphi} \dots \dots \dots (7)$$

Soll nun hieraus der Werth von $\varphi' - \varphi$ für kleine Werthe von h , d. h. die Ablenkung der Lothlinie in der Höhe h gefunden werden, so bestimme man aus (5), (6), (7) den Werth von $\frac{d\varphi'}{dh}$, wobei auch r' und ψ' als abhängig von h anzusehen sind, und setze hinterher $h = 0$, folglich auch $r' = r$ und $\psi' = \psi$. Diese Rechnung giebt, bis auf Grössen der zweiten Ordnung genau, für die Ablenkung $d\varphi'$ in der Höhe dh den Ausdruck

$$d\varphi' = \frac{2\alpha \sin 2\varphi}{1 - \alpha} (1 - \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \varphi) \frac{dh}{r} \dots \dots \dots (8)$$

wofür man auch, ohne merklichen Fehler, mit Weglassung der Klammer noch einfacher schreiben kann

$$d\varphi' = 2\beta \sin 2\varphi \cdot \frac{dh}{r} \dots \dots \dots (9)$$

und worin für r der Halbmesser des Aequators gesetzt werden darf.

Um $d\varphi'$ (wofür man jetzt auch $d\varphi$ schreiben kann) in Secunden ausgedrückt zu erhalten, muss die rechte Seite dieser Gleichung noch mit dem Factor 206264,8 multiplicirt werden.

Der Ausdruck (9) wird ein Maximum für $\varphi = 45^\circ$. Soll in diesem Falle die Ablenkung $d\varphi = 1$ Secunde sein,

so muss man haben $dh = 4460^m = 13730$ Pariser Fuss, welche Höhe die höchsten Bergspitzen der Schweiz übertrifft, den Montblanc aber nicht erreicht.

Zur Vergleichung mag bemerkt werden, dass in einem homogenen Sphäroid von den Dimensionen der Erde die Richtungen der Anziehung in A und B , beide Punkte einander sehr nahe liegend vorausgesetzt, sich schon schneiden, bevor sie die Erdachse treffen, und dass demgemäss der Werth $d\varphi$ in dem Verhältniss 1 : 1,14 grösser ausfällt als in (9). Hiernach würde, unter 45° Polhöhe, eine Ablenkung von 1 Secunde schon in der Höhe von $3910^m = 12040$ Pariser Fuss eintreten, welche Höhe die höchsten Spitzen der Schweiz nicht völlig erreicht.

4) Aus allem Vorstehenden folgt, dass die wahre Lothlinie eines gegebenen Punkts A der Erdoberfläche (angenommen am Aequator und in den Polen) eine krumme Linie ist, welche in der Meridian-Ebene des gegebenen Punkts liegt und ihre concave Seite nach dem nächsten Erdpol hinwendet. Die Tangente dieser krummen Linie in irgend einem Punkte derselben stellt die Richtung der Schwere in diesem Punkte dar. Die Differentialgleichung der Lothlinie ist also in der Gleichung (5) enthalten, wo r' und ψ' wie die veränderlichen Coordinaten anzusehen sind. Dann setzt man darin, um rechtwinkelige Coordinaten einzuführen, $r' \cos \psi' = x$ und $r' \sin \psi' = y$, so wird $\tan \varphi' = \frac{dy}{dx}$ und die Gleichung nimmt die Gestalt an

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r^3} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \dots \dots \dots (10)$$

Diese Gleichung kann aber auch auf dem folgenden Wege erhalten werden, der zugleich für die ganze vorstehende Entwicklung eine bemerkenswerthe Rechnungsprobe bietet. Laplace leitet in der Mécanique céleste (3. Buch, 7. Cap.) für geringe Erhebungen über der Erdoberfläche die Gleichung einer Surface de niveau ab, d. h. einer Fläche, in deren sämtlichen Punkten die Richtung der Schwere auf ihr senkrecht steht. Diese Gleichung hat in der hier gebrauchten Bezeichnung die Gestalt

$$\text{Const.} = \frac{2r}{r'} + \frac{\alpha r'^2}{r^2} \cos \psi'^2.$$

Lässt man darin die Constante sich ändern, so stellt offenbar die rechtwinkelige Trajectorie aller dieser Flächen die in Rede stehende Lothlinie dar. In der That giebt die Ausführung dieser Rechnung, bei der man sich auf eine Meridian-Ebene beschränken darf, genau wieder die Gleichung (10).

Hannover, Juli 1869.

Wittstein.