Über die Gravitation ruhender Massen.

Von

C. Runge in Göttingen.

Einstein hat gezeigt¹⁾, wie man aus einem vorgegebenen Energietensor die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ in erster Annäherung finden kann. Besteht die Energie nur aus ruhender Materie, so hat man, wie in der klassischen Mechanik, das Gravitationspotential

$$u = -K \int \frac{dm}{r}$$

zu berechnen ($K = \frac{1}{8\pi} 1,87 \cdot 10^{-27} \text{ cmg}^{-1}$, wobei die Zeiteinheit so gewählt ist, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird) und erhält dann für das Quadrat des vierdimensionalen Bogenelements

$$(1 + 2u) dt^2 - (1 - 2u)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

wo x, y, z rechtwinklige Raumkoordinaten und t die Maßzahl der Zeit bedeuten.

Dieses Bogenelement ist für die Gravitation eines Massenpunktes zuerst von de Sitter angegeben worden.

Die Annäherung gilt nur für hinreichend kleine Werte von u , d. h. wenn das von den ruhenden Massen angezogene hinreichend klein anzunehmende Massenteilchen den anziehenden Massen nicht zu nahe kommt. Für den Merkur z. B. ist u schon zu groß, um die Perihelbewegung noch so genau zu liefern, wie sie beobachtet ist.

Gibt man indessen dem Quadrat des Bogenelements die Form

$$e^{2u} dt^2 - e^{-2u}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

die sich von der oben angegebenen nur in Gliedern zweiter Ordnung in u unterscheidet, so läßt sich zeigen, daß der Fehler des Gravitationsfeldes

¹⁾ Sitzungsberichte der preuß. Akad. 1918, S. 156.

von dritter Ordnung in u wird, so daß sich dann auch die Perihelbewegung des Merkur mit ausreichender Genauigkeit ergibt.

Um das zu zeigen, bilden wir zunächst den Tensor, dessen Komponenten Einstein²⁾ mit $B_{\mu\nu}$ bezeichnet, wie er der Form

$$e^{2u} dt^2 - e^{-2u} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

entspricht. Werden die Variablen x, y, z, t mit $x^1 x^2 x^3 x^4$ und die partiellen Differentialquotienten von u nach x, y, z mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet, so ergibt sich

$$B_{44} = -e^{4u} \Delta u, \quad B_{4\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} \Delta u - 2u_\alpha u_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

wobei $\delta_{\alpha\beta}$ gleich 1 oder 0 zu setzen ist, je nachdem α gleich oder ungleich β ist. Wir fügen nun zu dem Quadrat des Bogenelements eine quadratische Form

$$a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

hinzu. Die hinzutretenden Glieder werden nur die Komponenten $B_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) beeinflussen. Setzen wir nun $a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{2u_\alpha u_\beta}{r} dx dy dz$,³⁾ so werden sich die Komponenten $B_{\alpha\beta}$ bis auf Glieder höherer Ordnung um $2u_\alpha u_\beta$ ändern.

Für das Quadrat des Bogenelements

$$e^{2u} dt^2 - e^{-2u} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

wird demnach bis auf Glieder dritter Ordnung

$$B_{44} = -e^{4u} \Delta u, \quad B_{4\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} \Delta u$$

oder, wie man auch sagen kann, die $a_{\alpha\beta}$ brauchten nur noch um Glieder dritter Ordnung verändert zu werden, um diese Werte der $B_{\alpha\beta}$ zu ergeben. Aus den $B_{\lambda\mu}$ erhalten wir die Komponenten des Energietensors durch die Gleichungen

$$8\pi K T_{\lambda\mu} = -\left(B_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} B\right),$$

wo

$$B = g^{\lambda\mu} B_{\lambda\mu} = 2e^{2u} \Delta u,$$

d. h. alle Komponenten des Energietensors verschwinden mit Ausnahme von T_{44} , wofür sich ergibt:

$$4\pi K T_{44} = e^{4u} \Delta u \quad \text{oder} \quad 4\pi K T^{44} = \Delta u.$$

²⁾ Annalen der Physik 49 (1916), S. 108.

³⁾ r ist hier die Entfernung des Punktes, in dem die $a_{\alpha\beta}$ bestimmt werden sollen, von dem Element $dx dy dz$, wie bei der Einsteinschen Bestimmung der Gravitationspotentiale. Integriert wird über den ganzen Raum mit Ausschluß der Teile, wo u zu groß wird.

u wird also aus T^{44} durch das Integral

$$u = -K \int \frac{T^{44}}{r} dx dy dz$$

berechnet.

Es zeigt sich nun, daß der zu dem Quadrat des Bogenelements hinzugefügte Teil $a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ die Beschleunigung des Massenteilchens um Beträge ändert, die in u zwar nur von der zweiten Ordnung sind, aber außerdem noch das Quadrat der Geschwindigkeit des Massenteilchens als Faktor enthalten. Denn es ist

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \left[\begin{smallmatrix} \mu \nu \\ \tau \end{smallmatrix} \right] g^{\alpha\tau} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}.$$

Durch das Hinzutreten von $a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ sind die $g_{\lambda\mu}$ um Größen zweiter Ordnung geändert, aber nur diejenigen unter ihnen, deren Indizes beide nicht größer als 3 sind. Dasselbe gilt von den $g^{\alpha\tau}$. Da Differentiationen nach x^4 nicht vorkommen, so sind daher nur diejenigen Größen $\left[\begin{smallmatrix} \mu \nu \\ \tau \end{smallmatrix} \right]$ geändert, bei denen alle drei Indizes nicht größer als 3 sind. α ist nicht größer als 3, da es sich um die Komponenten der Beschleunigung handelt. $g^{\alpha\tau}$ kann nur für $\tau \leq 3$ von Null verschieden sein. $g^{\alpha\tau}$ wird daher um eine Größe zweiter Ordnung geändert sein. Die Änderung ist mit $\left[\begin{smallmatrix} \mu \nu \\ \tau \end{smallmatrix} \right] \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}$ zu multiplizieren. Da aber $\left[\begin{smallmatrix} \mu \nu \\ \tau \end{smallmatrix} \right]$ von erster Ordnung in den u_α ist, so resultiert eine Änderung dritter Ordnung. Betrachtet man andererseits die Änderung von $\left[\begin{smallmatrix} \mu \nu \\ \tau \end{smallmatrix} \right]$. Sie ist von zweiter Ordnung in den u_α und mit $g^{\alpha\tau} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}$ zu multiplizieren. Hier aber sind μ und ν beide nicht größer als 3. Denn sonst bleibt $\left[\begin{smallmatrix} \mu \nu \\ \tau \end{smallmatrix} \right]$ ungeändert. Es resultiert daher eine Änderung, die in den u_α von zweiter Ordnung und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Dies ist also eine Größe dritter Ordnung, wenn das Quadrat der Geschwindigkeit von erster Ordnung angenommen wird, wie es bei der Bewegung eines Planeten der Fall ist.

Die Perihelbewegung eines Planeten läßt sich in folgender Weise aus dem Bogenelement ableiten:

$$d\tau^2 = e^{2u} dt^2 - e^{-2u} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Man führe Polarkoordinaten r, φ, ϑ ein und beschränke sich auf die Meridianebene. Dann wird

$$(I) \quad d\tau^2 = e^{2u} dt^2 - e^{-2u} (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Das Verschwinden der Variation des Integrals

$$\int d\tau$$

liefert die beiden Gleichungen:

$$e^{2u} \frac{dt}{d\tau} = a, \quad e^{-2u} r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = c$$

oder

$$\frac{e^{4u}}{r^2} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{a}{c}, \quad \frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{1}{c} r^2 e^{-2u}.$$

Setzt man diese Werte von $\frac{dt}{d\varphi}$ und $\frac{d\tau}{d\varphi}$ in die Gleichung (I) ein, nachdem man sie durch $d\varphi^2$ dividiert hat, so ergibt sich

$$\frac{1}{c^2} r^4 e^{-4u} = e^{-6u} r^4 \frac{a^2}{c^2} - e^{-2u} \left(\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right)$$

oder

$$\frac{1}{c^2} e^{-2u} = e^{-4u} \frac{a^2}{c^2} - \left(\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right),$$

oder, wenn man für u seinen Wert $-\frac{KM}{r}$ einführt und daraus $\frac{du}{d\varphi} = \frac{KM}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$ ableitet:

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = -u^2 + \frac{K^2 M^2}{c^2} [a^2 e^{-4u} - e^{-2u}] = f(u).$$

Soll die Entfernung des Planeten sich zwischen zwei Grenzen bewegen, so muß $f(u)$ für zwei Werte u_1 und u_2 verschwinden. Man kann dann nach der bekannten Interpolationsformel

$$f(u) = \frac{f''(\bar{u})}{2} (u - u_1)(u - u_2)$$

setzen, wo $\bar{u}$ zwischen u_1 und u_2 liegt, wenn auch u demselben Intervall angehört. Da $f(u)$ für diese Werte von u positiv sein muß, so folgt, daß $f''(\bar{u})$ negativ ist. Es sei $u_1 < u_2$ und u bewege sich von u_1 nach u_2 und wieder zurück nach u_1 . Dann ist:

$$\pm \frac{du}{\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)}} = \sqrt{-\frac{f''(\bar{u})}{2}} d\varphi = \sqrt{1 - \frac{K^2 M^2}{c^2} [8a^2 e^{-4\bar{u}} - 2e^{-2\bar{u}}]} d\varphi.$$

Auf der rechten Seite können wir, da u_1 und u_2 beide sehr kleine Zahlen sind, das zwischenliegende $\bar{u}$ gleich Null setzen, und da a^2 sehr nahe gleich 1 sein muß, so erhalten wir durch Integration über den Hin- und Hergang von u genähert:

$$2\pi = \int d\varphi \left(1 - \frac{K^2 M^2}{c^2} 3 \right).$$

D. h. die Perihelbewegung ist bei einem Umlauf gleich

$$\int d\varphi - 2\pi = \frac{K^2 M^2}{c^2} 6\pi.$$

Statt der Konstanten c können wir den Mittelwert von u_1 und u_2 einführen. Entwickeln wir $f(u)$ nach Potenzen von u und vernachlässigen die Glieder dritter Ordnung, so ergibt sich für u_1 und u_2 die quadratische Gleichung

$$u^2 + \frac{K^2 M^2}{c^2} (4a^2 - 2)u + \frac{K^2 M^2}{c^2} (1 - a^2) = 0$$

und somit genähert $u_1 + u_2 = -\frac{K^2 M^2}{c^2} 2$ oder wenn r_m eine mittlere Entfernung des Planeten bezeichnet

$$-\frac{KM}{r_m} = -\frac{K^2 M^2}{c^2}$$

oder

$$\int d\varphi - 2\pi = \frac{KM}{r_m} 6\pi.$$

Aus der obigen Gleichung $\frac{e^{4u}}{r^2} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{a}{c}$ folgt $\frac{r}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e^{4u}}{a} \frac{c}{r}$. Für eine einigermaßen kreisförmige Bahn wird daher die mittlere Geschwindigkeit v genähert gleich

$$v = \frac{c}{r_m},$$

und da $\frac{1}{r_m} = \frac{KM}{c^2}$, so wird $v^2 = \frac{KM}{r_m}$ und somit

$$\int d\varphi - 2\pi = v^2 6\pi$$

eine Form für die Perihelbewegung, auf die schon Schwarzschild hingewiesen hat.

(Eingegangen am 10. 8. 1921.)