TRASFORMAZIONE DI COMBESURE ED ALTRE ANALOGHE PER LE CURVE STORTE.

Nota di **Gustavo Sannia**, in Torino.

Adunanza del 12 marzo 1905.

L'illustre prof. BIANCHI *) ha chiamato *trasformazione di COMBESURE* una particolare corrispondenza fra i punti di due curve, e ne ha fatto notevoli applicazioni alla ricerca delle più generali curve a flessione costante, dell'elica sferica, delle traiettorie ortogonali ad una semplice infinità di sfere, delle curve di BERTRAND.

Or questa trasformazione, ed altre analoghe, si presentano spontanee nello studio delle curve per via *intrinseca*.

Sieno ρ ed r i raggi di prima e seconda curvatura di una curva C in un punto M , s l'arco che ha per termine M , computato a partire da un'origine fissa su C , (xyz) le coordinate cartesiane di un punto M_1 , mobile con M , rispetto al triedro fondamentale di C in M , ossia rispetto alla tangente, alla binormale ed alla normale principale di C in M ; siano poi $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ le coordinate del punto M'_1 in cui si porta M_1 quando M , muovendosi su C , passa nel punto infinitamente vicino M' . Reggono allora le formole fondamentali **)

$$(1) \quad \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{z}{\rho} + 1, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{z}{r}, \quad \frac{\delta z}{ds} = \frac{dz}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}.$$

Che se poi $\alpha\beta\gamma$ sono i coseni direttori di una direzione mobile con M , si hanno le formole analoghe

$$(2) \quad \frac{\delta \alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho}, \quad \frac{\delta \beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds} - \frac{\gamma}{r}, \quad \frac{\delta \gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{r}.$$

*) Cfr. *Lezioni di Geometria differenziale*, 2^a ed., vol. I, pag. 40 e seg.

**) Cfr. E. CESÀRO, *Lezioni di Geometria intrinseca*, pag. 124.

Ponendo nelle (1) $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, si hanno le relazioni

$$\frac{dx}{ds} = \frac{z}{\rho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r}, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{x}{\rho} - \frac{y}{r}$$

necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto M_1 .

Sorge qui spontanea l'idea di annullare due sole delle quantità $\delta x, \delta y, \delta z$.

Ponendo, per esempio, $\delta y = \delta z = 0$, il punto M_1 si muoverà descrivendo una curva C_1 riferita a C per modo, che nei punti corrispondenti M e M_1 esse avranno le tangenti parallele, e però C_1 è una curva che può dedursi da C con una *trasformazione di COMBESURE*.

Evidentemente anche le binormali e le normali principali saranno parallele, e però saranno eguali gli angoli infinitesimi di contingenza e di torsione ε e η ; ne segue che,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varepsilon}{\delta s_1} = \frac{\varepsilon}{ds} \cdot \frac{ds}{\delta s_1} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{\delta s_1}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{\eta}{\delta s_1} = \frac{\eta}{ds} \cdot \frac{ds}{\delta s_1} = \frac{1}{r} \frac{ds}{\delta s_1},$$

ove si è dato l'indice 1 alle quantità che si riferiscono a C_1 , ossia

$$\rho_1 = \rho f(s), \quad r_1 = r f(s),$$

ove si è posto

$$\frac{\delta s_1}{ds} = f(s).$$

Ne segue che una *trasformazione di COMBESURE* lascia inalterato il rapporto delle curvature.

Se ne deduce che sono parallele anche le rette rettificanti di C e C_1 nei punti corrispondenti, perchè l'inclinazione θ della retta rettificante di C sulla tangente è definita dalla formola *)

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\tau}{\rho}.$$

Raccogliendo si ha che:

$$(3) \quad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r}, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{x}{\rho} - \frac{y}{r}$$

sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il punto $M_1(xyz)$ descriva una curva C_1 trasformata di COMBESURE di C ; C_1 avrà la tangente, la binormale, la normale principale e la retta rettificante parallele alle rette analoghe di C ed avrà per equazioni intrinseche

$$(4) \quad \rho_1 = \rho f(s), \quad r_1 = r f(s), \quad \delta s_1 = f(s) ds,$$

*) Cfr. E. CESÀRO, loc. cit., pag. 137.

ove

$$(5) \quad f(s) = \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{\tau}{\rho} + 1.$$

Pongo invece $\delta x = \delta \tau = 0$ nelle (1). Allora il punto M_1 si muoverà descrivendo una curva C_1 riferita a C per modo che la tangente a C_1 in M_1 sarà parallela alla binormale di C nel punto corrispondente M . Dirò che C_1 si deduce da C con una trasformazione B o che C_1 è una trasformata B di C .

Mediante le (1) e (2) si possono dedurre direttamente le proprietà della trasformata C_1 , ma si possono anche dedurre subito da un notevole teorema del BIANCHI *): *per ogni curva C ne esiste un'altra C_1 (definita a meno di una traslazione) corrispondente per eguaglianza d'arco alla C ; le due curvatures e le direzioni della tangente e della binormale vengono per la trasformazione permutate. Precisamente: scelto per verso positivo della tangente di C_1 , quello della binormale di C , il verso positivo della binormale di C_1 sarà quello della tangente di C , mentre che le normali principali saranno parallele ma coi sensi positivi opposti; sarà poi*

$$\rho_1 = -\rho, \quad \tau_1 = -\tau.$$

Detta B_0 questa particolare, ma fondamentale, trasformazione B , notando che tutte le trasformate B di una curva si possono dedurre l'una dall'altra con trasformazioni di COMBESURE, si ha che: la più generale trasformazione B è il prodotto della B_0 per la più generale trasformazione di COMBESURE (o viceversa).

In simboli, detta T una trasformazione di COMBESURE, si ha

$$B = B_0 \cdot T = T B_0.$$

Da quanto precede, si raccoglie che:

$$(6) \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\tau}{\rho} - 1, \quad \frac{d\tau}{ds} = -\frac{x}{\rho} - \frac{y}{r}$$

sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché il punto $M_1(x, y, \tau)$ descriva una curva C_1 trasformata B di C ; C_1 avrà la tangente e la binormale parallele alla binormale e alla tangente di C (e con versi positivi eguali) e la normale principale parallela alla normale principale di C (ma con senso positivo opposto), ed avrà per equazioni intrinseche

$$(7) \quad \rho_1 = -\rho f(s), \quad \tau_1 = -\tau f(s), \quad \delta s_1 = f(s) ds,$$

*) Loc. cit., vol. I, pag. 53.

ove

$$(8) \quad f(s) = \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{z}{r}.$$

Nelle (1) poniamo infine $\delta x = \delta y = 0$. Allora il punto $M_1(xyz)$ si muoverà descrivendo una curva C_1 riferita a C per modo, che la tangente in M_1 sarà parallela alla normale principale di C nel punto corrispondente M . Dirò che C_1 si deduce da C con una *trasformazione N* o che C_1 è una *trasformata N* di C .

Applicando le (2) alla direzione della tangente di C_1 , cioè ponendo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, si ha

$$\frac{\delta \alpha}{ds} = -\frac{1}{\rho}, \quad \frac{\delta \beta}{ds} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{\delta \gamma}{ds} = 0,$$

onde, posto

$$\delta \sigma = \sqrt{\delta \alpha^2 + \delta \beta^2 + \delta \gamma^2} = \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2}}{\rho r} ds,$$

saranno

$$\xi = \frac{\delta \alpha}{\delta \sigma} = -\frac{r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \quad \eta = \frac{\delta \beta}{\delta \sigma} = -\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \quad \zeta = \frac{\delta \gamma}{\delta \sigma} = 0$$

i coseni direttori della normale principale di C_1 e quindi

$$\lambda = -\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \quad \mu = \frac{r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \quad \nu = 0$$

quelli della binormale; e la flessione sarà

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\delta \sigma}{\delta s_1} = \frac{ds}{\delta s_1} \cdot \frac{\delta \sigma}{ds} = \frac{ds}{\delta s_1} \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2}}{\rho r}.$$

Posto

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{r}{\rho},$$

θ è l'inclinazione della retta rettificante di C sulla tangente, e si ha

$$\begin{aligned} \xi &= -\sin \theta, & \eta &= \cos \theta, & \zeta &= 0, \\ \lambda &= \cos \theta, & \mu &= \sin \theta, & \nu &= 0, \end{aligned}$$

onde la binormale di C_1 è parallela alla retta rettificante di C .

Applicando infine le (2) alla direzione $\lambda\mu\nu$, si ha

$$\frac{\delta \lambda}{ds} = -\sin \theta \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{\delta \mu}{ds} = \cos \theta \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{\delta \nu}{ds} = 0,$$

e però

$$\frac{1}{r_1} = \sqrt{\left(\frac{\delta \lambda}{\delta s_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta \mu}{\delta s_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta \nu}{\delta s_1}\right)^2} = \frac{ds}{\delta s_1} \cdot \frac{d\theta}{ds}.$$

Raccogliendo si ha che:

$$(9) \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\tau}{\rho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\tau}{r}$$

sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché il punto $M_1(xy\tau)$ descriva una curva C_1 trasformata N di C ; la tangente e la binormale di C_1 sono parallele alla normale principale ed alla retta rettificante di C ; le equazioni intrinseche di C_1 sono

$$(10) \quad \frac{f(s)}{\rho_1} = \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2}}{\rho r}, \quad \frac{f(s)}{r_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \delta s_1 = f(s) ds$$

ove

$$(11) \quad f(s) = \frac{\delta \tau}{ds} = \frac{d\tau}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}.$$

Ogni curva ha infinite trasformate TBN , perchè, in ciascuna trasformazione, delle 4 funzioni $xy\tau f$ di s una è arbitraria. Specializzando convenientemente una di queste funzioni farò alcune applicazioni dei risultati precedenti, ma è chiaro che queste applicazioni possono protrarsi indefinitamente. Tralascero le applicazioni già fatte dal Prof. BIANCHI e che ho ricordate in principio.

I. Per $x=0$, le (6) danno $\tau=\rho$, $y=-r \frac{d\rho}{ds}$, quindi $M_1(xy\tau)$ è un punto dell'asse del circolo osculatore di C e questo asse è la tangente in M_1 alla C_1 . Dunque, tenendo presenti le (7) e (8) si ha che: *gli assi dei circoli osculatori di una curva C formano una superficie sviluppabile (sviluppabile polare di C) che è l'involuppo dei suoi piani normali; lo spigolo di regresso C_1 (luogo dei centri delle sfere osculatrici di C) è una trasformata B di C ed ha per equazioni intrinseche le (7), ove*

$$-f(s) = \frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\rho}{ds} \right).$$

Se ρ è costante, e solo allora, si ha $y=0$; in tal caso M_1 ha per coordinate $(0, 0, \rho)$ e C_1 è il luogo dei centri dei circoli osculatori di C ; poi

$$f(s) = -\frac{\rho}{r}, \quad \rho_1 = \rho, \quad rr_1 = \rho^2.$$

Si ha così il teorema di BOUQUET che caratterizza i circoli storti: *il luogo dei centri di curvatura di un circolo storto C è anche un circolo storto C_1 ; C e C_1 sono l'uno il luogo dei centri dei circoli osculatori dell'altro e l'altro dell'uno, e si deducono l'uno dall'altro con una trasforma-*

zione B ; hanno egual flessione e il prodotto delle loro torsioni eguaglia il quadrato della flessione comune.

Se $f(s) = 0$, e solo allora, si ha $\rho_1 = r_1 = 0$, e quindi C_1 si riduce ad un punto; poi

$$MM_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \left(r \frac{d\rho}{ds}\right)^2,$$

ma da $f(s) = 0$ segue che $\rho^2 + \left(r \frac{d\rho}{ds}\right)^2$ è costante, dunque C è una curva sferica. Si ha così il teorema noto: $\frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\rho}{ds}\right) = 0$ è la condizione necessaria e sufficiente affinché una curva sia tracciata sopra una sfera di raggio $\sqrt{\rho^2 + \left(r \frac{d\rho}{ds}\right)^2}$.

II. Pongo più generalmente $x = c$ (costante). Allora, per le (6),

$$y = -r \frac{d\rho}{ds} - c \frac{r}{\rho}, \quad z = \rho$$

e il teorema precedente si generalizza nel seguente: nel piano condotto per l'asse del circolo osculatore di una curva e parallelo al piano rettificante, le rette parallele a questo asse e rigidamente legato ad esso generano superficie sviluppabili i cui spigoli di regresso C_1 sono trasformate B della curva ed hanno per equazioni intrinseche le (7), ove

$$-f(s) = \frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\rho}{ds}\right) + c \frac{d}{ds} \left(\frac{r}{\rho}\right).$$

Queste curve C_1 sono tutte trasformate T dello spigolo di regresso della sviluppabile polare di C ; sono congruenti con esso solo quando C è un'elica cilindrica, ch allora $\frac{d}{ds} \left(\frac{r}{\rho}\right) = 0$.

III. Le (6) non sono soddisfatte per $x = z = 0$ ossia le binormali di una curva non formano mai una superficie sviluppabile.

IV. Volendo invertire il problema I, cio volendo trovare tutte le curve che hanno una curva assegnata C come luogo dei centri delle sfere osculatrici, basta porre $y = 0$. Le (6) danno

$$\frac{dx}{ds} = \frac{z}{\rho} - 1, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{x}{\rho}$$

fra le quali eliminando z ,

$$\rho \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{d\rho}{ds} = 0,$$

ossia

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} + x + \frac{d\rho}{d\varphi} = 0,$$

ove si è posto

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{\rho};$$

ne segue integrando

$$(12) \quad \begin{cases} x = c \sin \varphi + c' \cos \varphi - \sin \varphi \int \sin \varphi ds - \cos \varphi \int \cos \varphi ds \\ z = c \cos \varphi - c' \sin \varphi - \cos \varphi \int \sin \varphi ds + \sin \varphi \int \cos \varphi ds \end{cases}$$

con c e c' costanti arbitrarie.

Le (12) risolvono il problema proposto e quindi anche l'altro equivalente: *trovare tutte le traiettorie ortogonali ad una semplice infinità di piani* (i piani osculatori di C). Il problema, già risoluto per altre vie, si risolve dunque mediante tre quadrature.

Le equazioni intrinseche di dette traiettorie sono

$$\rho_1 = \chi, \quad r_1 = \chi \frac{\rho}{r}, \quad \delta s_1 = \frac{\chi}{r} ds.$$

V. Passando alla trasformazione T , pongo $x=0$ nelle (3); ne risulta

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\chi}{r}, \quad \frac{d\chi}{ds} = -\frac{y}{r},$$

ed eliminando χ ,

$$r \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{y}{r} = 0,$$

ossia

$$\frac{d^2 y}{d\psi^2} + y = 0,$$

ove si è posto

$$(13) \quad \psi = \int_0^s \frac{ds}{r};$$

ne segue integrando

$$(14) \quad \begin{cases} y = c \cos \psi + c' \sin \psi \\ z = c' \cos \psi - c \sin \psi \end{cases}$$

con c e c' costanti arbitrarie.

Condotte per M le due normali di C di inclinazione ψ e $\frac{\Pi}{2} + \psi$ sulla normale principale, è chiaro che il punto $M_1(0, y, z)$ definito dalle (14) è quel punto del piano normale di C che dista di c e c' dalle suddette normali. Or se si tien presente che la (13) è la condizione neces-

saria e sufficiente affinché l'una e (quindi) l'altra normale generino superficie sviluppabili *), si può asserire che: *un punto del piano normale di una curva C , invariabilmente legato a due normali ortogonali tra loro, genera una curva C_1 trasformata T di C , quando una delle due normali (e quindi l'altra) genera una superficie sviluppabile.*

Osservando poi che le curve C_1 sono traiettorie ortogonali ai piani normali di C , si ha che le (14) risolvono il problema di: *costruire le traiettorie ortogonali ad una semplice infinità di piani, quando è nota una di essa.* Questo problema dunque si risolve mediante una sola quadratura, la (13), mentre che il problema generale richiede tre quadrature. (Cfr. IV).

Essendo poi

$$M M_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 + c'^2,$$

ne segue che: *due traiettorie ortogonali ad una semplice infinità di piani sono dappertutto equidistanti.*

VI. Ponendo $z = 0$, le (3) danno $y = c$ (costante) e $x = -\frac{\rho}{r}c$, e però $M_1(xy, z)$ sta sulla retta rettificante di C in M . Si ha così il teorema di CESÀRO **) *le rette parallele alla tangente di una curva C , contenute nel piano rettificante e rigidamente legate al suo triedro fondamentale, generano superficie sviluppabili.*

Qui possiamo aggiungere che: *gli spigoli di regresso C_1 sono trasformate T di C ; le loro equazioni intrinseche sono*

$$s_1 = s - \frac{\rho}{r}c, \quad \rho_1 = \rho \left[1 - c \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho}{r} \right) \right], \quad r_1 = r \left[1 - c \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho}{r} \right) \right],$$

ed hanno in comune con C la sviluppabile rettificante.

Una curva è geodetica della sua sviluppabile rettificante, dunque C e C_1 sono geodetiche della comune sviluppabile rettificante ed egualmente inclinate sulle generatrici; poi $M M_1 = c \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2}$.

Dunque: *se a partire da ciascun punto M di una geodetica C di una superficie sviluppabile si porta sulla corrispondente generatrice il segmento $M M_1 = c \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2}$, il luogo del punto M_1 è un'altra geodetica egualmente inclinata sulla generatrice.*

*) CESÀRO, loc. cit., pag. 139.

**) Loc. cit., pag. 149.

Se C è un'elica cilindrica, cioè se $\frac{\rho}{r}$ è costante, si ha

$$s_1 = s + \text{cost.}, \quad \rho_1 = \rho, \quad r_1 = r,$$

e però il teorema evidente: *un'elica cilindrica può scorrere sul cilindro nel senso delle generatrici e senza deformarsi*, e del quale il precedente può ritenersi come una generalizzazione.

VII. Per $y = \pm \rho$, le (3) danno

$$z = \pm r \frac{d\rho}{ds}, \quad x = \mp \rho \left[\frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\rho}{ds} \right) \right].$$

Or, come è facile vedere, il punto $P \left(y = \pm \rho, z = \pm r \frac{d\rho}{ds} \right)$ del piano normale di C in M non è altro che il centro della sfera osculatrice (Cfr. I) $\left(y = -r \frac{d\rho}{ds}, z = \rho \right)$ rotato dell'angolo $\pm \frac{\pi}{2}$ nel piano stesso intorno ad M ; dunque: *la parallela alla tangente in un punto M di una curva C condotta pel centro della sfera osculatrice, rotato dell'angolo $\pm \frac{\pi}{2}$ intorno ad M nel piano normale, genera una superficie sviluppabile, quando M si muove sulla curva.*

Se C è una curva sferica, risulta (Cfr. I) $x = 0$ e però: il centro di una sfera rotato di un angolo retto intorno ad un punto M di una curva tracciata su di essa, nel piano normale di questa, genera una trasformata T della curva, quando M si muove sulla curva.

VIII. Le (9) non son soddisfatte da $x = y = 0$ ossia le normali principali di una curva non formano mai una superficie sviluppabile.

IX. Dalla (10) segue che $\frac{1}{r_1} = 0$ solo quando θ è costante, ossia quando $\frac{\rho}{r}$ è costante; dunque: *fra le curve storte le eliche cilindriche sono caratterizzate dal fatto che tutte le loro trasformate N sono curve piane contenute in piani perpendicolari alle generatrici del cilindro.*

X. Per $y = 0$ le (9) danno $z = 0, x = c - s$ con c costante arbitraria. Allora $M_1(xy z)$ è un punto della tangente in M , ed essendo $MM_1 = x = c - s$, il luogo C_1 dei punti M_1 è una sviluppante di C ; dunque: *le sviluppanti di una curva sono trasformate N di essa.*

Più generalmente, per $y = c'$ (costante) le (9) danno pure $z = 0, x = c - s$; quindi: *un punto di una sviluppante di una curva, spostato di un segmento costante c' nel verso della binormale nel punto corrispondente della curva, genera una trasformata N della curva.*

XI. Ponendo nelle (9) $x = 0$, si ha $y = \int \frac{\rho}{r} ds$, $z = \rho$. La curva C_1 descritta dal punto $M_1(xyz)$ giace sulla sviluppabile polare di C , e su questa è una traiettoria ortogonale delle generatrici, chè la tangente in M_1 , essendo parallela alla normale principale di C in M , è perpendicolare all'asse del circolo osculatore. Dunque: *la normale principale di una curva, spostata parallelamente a sè stessa nel piano normale di $y = \int \frac{\rho}{r} ds$, descrive una superficie sviluppabile, il cui spigolo di regresso giace sulla sviluppabile polare della curva e ne incontra le generatrici ad angolo retto.*

Il punto $P\left(0, \int \frac{\rho}{r} ds, \rho\right)$ dell'asse polare di una curva è dunque tale che la parallela per esso alla normale principale e l'asse polare stesso generano superficie sviluppabili. Ma i valori $y = \int \frac{\rho}{r} ds$, $r = \rho$ soddisfanno anche le (3) e danno

$$x = -\rho \left(\frac{d\rho}{ds} + \frac{1}{r} \int \frac{\rho}{r} ds \right),$$

quindi anche la parallela alla tangente condotta per P genera una superficie sviluppabile. Dunque: *le parallele alla tangente alla binormale e alla normale principale di una curva, condotte pel punto del piano normale distante per ρ e $\int \frac{\rho}{r} ds$ dalle ultime due rette, generano tre superficie sviluppabili, i cui spigoli di regresso sono trasformate TBN della curva.*

Torino, febbrajo 1905.

GUSTAVO SANNIA.