Über streckentreue und winkeltreue Abbildung.

Von

Hans Rademacher in Wickersdorf (Thüringen).

Von Herrn H. Bohr ist kürzlich bewiesen worden, daß jede eindeutige und streckentreue Abbildung eines Gebietes konform ist¹⁾. Ferner hat früher Herr R. Remak die Frage aufgeworfen, ob jede winkeltreue Abbildung konform sei, und hat unter einschränkenden Voraussetzungen einen Teil dieser Frage bejahend beantwortet²⁾. Ein von mir neuerdings bewiesener Satz über die partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen ermöglicht es nun, den Bohrschen Satz aufs neue zu beweisen und auch das Problem der winkeltreuen Abbildung ein merkliches Stück zu fördern. Zugleich wird in der vorliegenden Arbeit das gegenseitige methodische Verhältnis der beiden Probleme dadurch hervortreten, daß wir beide mit den gleichen Hilfsmitteln behandeln.

I. Voraussetzungen und Hilfsmittel.

Wir erinnern zunächst an die Definitionen von „Winkeltreue“ und „Streckentreue“. In dem beschränkten Gebiet G der Ebene der Variablen $z = x + iy$ sei die komplexe Funktion $\zeta = f(z)$ definiert. Die durch diese Funktion vermittelte Abbildung des Gebietes G auf einen Bereich der Ebene der Variablen $\zeta = \xi + i\eta$ heiße *winkeltreu*, wenn zu jedem z in G

¹⁾ Vgl. H. Bohr, Über streckentreue und konforme Abbildung, Math. Zeitschrift Bd. I (1918), S. 403—420.

²⁾ Vgl. R. Remak, Über winkeltreue und streckentreue Abbildung an einem Punkte und in der Ebene, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 38 (1914), S. 193—246. Die winkeltreue Abbildung eines Gebietes behandelt Herr Remak statt unter der Voraussetzung (1) nur unter der Bedingung der Existenz des „erweiterten Signumdifferentialquotienten“

$$\lim_{l_1 \rightarrow 0, l_2 \rightarrow 0} \frac{\text{sign}(f(z+l_1) - f(z+l_2))}{\text{sign}(l_1 - l_2)} = p(z)$$

und einer komplizierten Bedingung für die Konvergenzgeschwindigkeit dieses Limes.

$$(1) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sign}(f(z+l) - f(z))}{\operatorname{sign} l} = p(z)$$

existiert, wo $l = h + ik$ komplex sein soll und unter „signum von u “ dabei

$$\operatorname{sign} u = \frac{u}{|u|}$$

verstanden wird, was nur für $|u| > 0$ definiert ist. Die Abbildung heiße *streckentreu*, wenn zu jedem z in G

$$(2) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \frac{|f(z+l) - f(z)|}{|l|} = q(z)$$

als endliche Zahl existiert.

Es sei nun $\varphi(x, y)$ eine in G definierte *reelle* Funktion von x und y . Wir bilden

$$(3) \quad w_\varphi(x, y; \varrho) = \text{obere Grenze von } \frac{|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|}{\sqrt{h^2 + k^2} \leq \varrho^2},$$

wo h und k hier wie im folgenden reelle Zahlen seien. Mit abnehmen- dem ϱ kann $w_\varphi(x, y; \varrho)$ nicht wachsen. Es existiert also

$$(4) \quad L_\varphi(x, y) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} w_\varphi(x, y; \varrho)$$

als eine Funktion von (x, y) , die auch unendlich sein kann. Die Endlichkeit von $L_\varphi(x, y)$ in einem Punkte impliziert dort offenbar die Stetigkeit von $\varphi(x, y)$. Nun gilt der folgende

Satz A: *Ist in dem beschränkten Gebiet G der xy -Ebene eine reelle Funktion $\varphi(x, y)$ definiert, für welche $L_\varphi(x, y)$ in G endlich und summierbar ist, so ist $\varphi(x, y)$ in einem maßgleichen Kern E_0 von G total differenzierbar im Stolzischen Sinne, d. h. es existieren in E_0 die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, und es ist dort*

$$(5) \quad \varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + h \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sqrt{h^2 + k^2} R(h, k),$$

worin $R(h, k) \rightarrow 0$ gleichmäßig mit $h^2 + k^2 \rightarrow 0$ ³⁾).

Wir benötigen ferner den folgenden

Satz B: *Ist in G eine komplexe Funktion $\zeta = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ definiert mit endlichen und in G summierbaren Funktionen L_φ und L_ψ , die gemäß (3) und (4) gebildet sind, und genügen die in*

³⁾ Siehe meine demnächst in den *Mathematischen Annalen* erscheinende Arbeit: „ber partielle und totale Differenzierbarkeit und über die Transformation der Doppelintegrale“, Satz I.

einem maßgleichen Kern E_1 von G existierenden partiellen Ableitungen in E_1 den Gleichungen

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

so ist $\zeta = f(z)$ eine in G reguläre analytische Funktion⁴⁾.

Daß die partiellen Ableitungen unter der Voraussetzung des Satzes B in einem maßgleichen Kern von G existieren, sagt schon der vorige Satz aus. Unter den Zeichen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ usw. mögen im folgenden Beweise in der Nullmenge, wo die Ableitungen etwa nicht existieren, die vorderen oberen Derivierten verstanden werden. Es sei C der Rand und R die Fläche eines beliebigen in G liegenden Rechtecks

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2.$$

Dann ist

$$(7) \quad \begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (\varphi + i\psi)(dx + i dy) \\ &= \int_C (\varphi dx - \psi dy) + i \int_C \psi dx + \varphi dy. \end{aligned}$$

Nun existiert das Integral

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy,$$

denn es ist

$$\text{obere Grenze}_{0 < |k| \leq \varepsilon} \frac{|\varphi(x, y+k) - \varphi(x, y)|}{|k|} \leq \text{obere Grenze}_{0 < \sqrt{h^2 + k^2} \leq \varepsilon} \frac{|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

also für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \leq L_\varphi(x, y),$$

womit die Endlichkeit und Summierbarkeit von $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ in G und a fortiori in R erwiesen ist. Nach einem Satze von G. Fubini⁵⁾ existiert dann, außer in einer linearen Nullmenge des Intervalls $x_1 \leq x \leq x_2$, das Integral

$$(8) \quad \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dy,$$

⁴⁾ Dieser Satz findet sich schon, in etwas allgemeinerer Fassung, in der mir nicht rechtzeitig bekannt gewordenen Arbeit von Herrn Ch. J. de la Vallée Poussin, Réduction des intégrales doubles de Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques, Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Sciences) 1910, S. 768–798. (Anmerkung bei der Korrektur.)

⁵⁾ Sugli integrali multipli, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (5) 16, I (1907), S. 608–614; vgl. auch C. Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 632, Satz 4.

und es ist, wenn man diesem Integral auf der linearen Nullmenge der x , wo es etwa nicht existiert, einen beliebigen Wert beilegt,

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dy.$$

Überall, wo (8) existiert, ist ferner wegen der Endlichkeit der vorderen oberen Derivierten $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ und wegen der Stetigkeit von φ

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dy = \varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1) \quad ^6),$$

und somit

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \int_{x_1}^{x_2} [\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)] dx = - \int_c \varphi dx,$$

das letzte Integral hierbei im positiven Sinne um das Rechteck herumerstreckt. Die analogen Umformungen für die anderen Ableitungen lassen aus (7) hervorgehen

$$\int_c f(z) dz = - \iint_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy,$$

und da, außer höchstens in einer Nullmenge, (6) gilt, so folgt

$$\int_c f(z) dz = 0$$

für jeden achsenparallelen Rechtecksrand C in G . Also ist zufolge des Moreraschen Satzes, da $f(z)$ wegen der Endlichkeit von L_φ und L_ψ in G stetig ist, der Hilfssatz bewiesen.

II. Winkeltreue Abbildung.

Es genüge die in G definierte komplexe Funktion $\zeta = f(z)$ der Gleichung (1), d. h. sie bilde G *winkeltreu* ab. Wir bilden hier

$$w_f(z; \varrho) = \text{obere Grenze}_{0 < |l| \leq \varrho} \frac{|f(z+l) - f(z)|}{|l|} \quad (l \text{ komplex})$$

und dazu

$$L_f(z) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} w_f(z; \varrho).$$

$L_f(z)$ kann als Maß für die größte „Streckung“ der Abbildung im Punkte z angesehen werden; es möge $L_f(z)$ danach die „Streckungsfunktion“ heißen. Setzen wir

$$(9) \quad f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

⁶⁾ C. Carathéodory, l. c. ⁵⁾, S. 597, Satz 4.

so ist

$$\begin{aligned} w_{\varphi}(x, y; \varrho) &= \text{obere Grenze} \frac{|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|}{0 < \sqrt{h^2 + k^2} \leq \varrho} \\ &\leq \text{obere Grenze} \frac{|f(z+l) - f(z)|}{0 < |l| \leq \varrho} = w_f(z; \varrho), \end{aligned}$$

worin

$$l = h + ik.$$

Daher haben wir

$$L_{\varphi}(x, y) \leq L_f(z)$$

und ebenso

$$L_{\psi}(x, y) \leq L_f(z).$$

Von $L_f(z)$ setzen wir nun voraus, daß es in G endlich und summierbar sei. Dann kommen auch den L_{φ} und L_{ψ} diese Eigenschaften zu, und man kann auf φ und ψ Satz A anwenden.

Gleichung (1) formen wir durch (9) um in

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{\text{sign} [\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) + i(\psi(x+h, y+k) - \psi(x, y))]}{\text{sign}(h + ik)} = p(z).$$

Es liege nun z in dem maßgleichen Kern E_1 von G , in dem φ und ψ zugleich total differenzierbar sind. Dann ergibt die Anwendung von (5), nachdem wir noch $h = at$, $k = bt$ gesetzt haben, wo $t > 0$ und a, b irgendein reelles Zahlenpaar sei, das beim Grenzübergang festbleibt,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\text{sign}(at + ibt)} \text{sign} \left[at \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + t \sqrt{a^2 + b^2} R_1(at, bt) \right. \\ \left. + i \left(at \frac{\partial \psi}{\partial x} + bt \frac{\partial \psi}{\partial y} + t \sqrt{a^2 + b^2} R_2(at, bt) \right) \right] = p(z). \end{aligned}$$

Gemäß der Definition von signum kann man t im Zähler und Nenner fortlassen und dann zum Limes übergehen:

$$\frac{\text{sign} \left[a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} + b \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]}{\text{sign}(a + ib)} = p(z).$$

Dieser Grenzübergang ist wegen der Definition von signum freilich nur erlaubt, wenn die Klammer im Zähler nicht verschwindet. Sind aber alle vier Ableitungen gleich Null, so sind die Gleichungen (6) ohnehin erfüllt. Verschwindet aber mindestens eine Ableitung nicht, so braucht das Wertepaar a, b höchstens eine einparametrische Schar auszulassen, um das Nullwerden der Klammer zu verhüten. Dann setzen wir

$$p(z) = r + is$$

und schreiben unter Benutzung der Abkürzungen $\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ usw.

$$\text{sign} [a \varphi_x + b \varphi_y + i(a \psi_x + b \psi_y)] = \text{sign} [ar - bs + i(as + br)].$$

Diese Gleichung kann nur gelten, wenn

$$(a\varphi_x + b\varphi_y):(a\psi_x + b\psi_y) = (ar - bs):(as + br),$$

oder

$$(a\varphi_x + b\varphi_y)(as + br) = (a\psi_x + b\psi_y)(ar - bs)$$

ist. Da a, b abgesehen von der obigen Einschränkung beliebige reelle Zahlen waren, muß diese Gleichung in a, b identisch erfüllt sein. Durch Koeffizientenvergleichung gelangt man zu

$$(10) \quad \varphi_x s = \psi_x r, \quad \varphi_y r = -\psi_y s,$$

$$(11) \quad \varphi_x r + \varphi_y s = -\psi_x s + \psi_y r.$$

Multiplikation von (10) mit r und (11) mit s und Einsetzung aus (10) in (11) ergibt

$$\psi_x r^2 + \varphi_y s^2 = -\psi_x s^2 - \varphi_y r^2,$$

$$\varphi_y (s^2 + r^2) = -\psi_x (s^2 + r^2)$$

und wegen

$$r^2 + s^2 = |p(z)|^2 = 1$$

$$(12a) \quad \varphi_y = -\psi_x.$$

Multipliziert man (10) mit s und (11) mit r und verfährt sonst ebenso, so entsteht

$$\varphi_x r^2 - \psi_y s^2 = -\varphi_x s^2 + \psi_y r^2,$$

$$\varphi_x (r^2 + s^2) = \psi_y (r^2 + s^2),$$

$$(12b) \quad \varphi_x = \psi_y.$$

Die Gleichungen (12) sind aber mit (6) identisch; diese sind also in dem maßgleichen Kern E_1 von G erfüllt, so daß die Anwendung des Satzes B ergibt, daß $f(z)$ in G regulär ist. Da ferner durch (1) die Möglichkeit $f'(z) = 0$ ausgeschlossen wird, wie man durch Entwicklung von $f(z+l) - f(z)$ nach Potenzen von l leicht feststellt, so haben wir den

Satz I: Eine durch die komplexe Funktion $\zeta = f(z)$ vermittelte winkeltreue Abbildung eines beschränkten Gebietes G der z -Ebene auf einen Bereich Γ der ζ -Ebene ist konform, wenn die durch

$$w_f(z; \varrho) = \lim_{0 < |l| \leq \varrho} \frac{|f(z+l) - f(z)|}{|l|}, \quad (l \text{ komplex})$$

$$L_f(z) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} w_f(z; \varrho)$$

definierte Streckungsfunktion $L_f(z)$ in G endlich und summierbar ist.

Eindeutigkeit der Abbildung ist nicht vorausgesetzt.

III. Streckentreue Abbildung.

Die in G definierte Funktion $\zeta = f(z)$ vermittele eine *eindeutige* und *streckentreue* Abbildung auf das beschränkte Gebiet Γ der ζ -Ebene⁷⁾. Ferner soll durch diese Abbildung der *Umlaufssinn aufrechterhalten* bleiben, was offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Wir setzen zunächst wieder $L_f(z)$ als *endlich* und in G *summierbar* voraus. Die Umformung von (2) durch (9) ergibt nach dem Quadrieren beider Seiten:

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{[\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)]^2 + [\psi(x+h, y+k) - \psi(x, y)]^2}{h^2 + k^2} = q^2(z).$$

Es liege z in dem maßgleichen Kern E_1 von G , in dem φ und ψ total differenzierbar sind. Setzen wir wieder $h = at$, $k = bt$, wo $t > 0$ und a, b ein beliebiges reelles Zahlenpaar ist, das beim Grenzübergang fest bleibt, so ergibt die Anwendung von (5)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2(a^2 + b^2)} \{ [at\varphi_x + bt\varphi_y + t\sqrt{a^2 + b^2}R_1(at, bt)]^2 + [at\psi_x + bt\psi_y + t\sqrt{a^2 + b^2}R_2(at, bt)]^2 \} = q^2(z)$$

und nach dem Kürzen des Bruches durch t^2 und der Ausführung des Grenzüberganges

$$[a\varphi_x + b\varphi_y]^2 + [a\psi_x + b\psi_y]^2 = q^2a^2 + q^2b^2.$$

Diese Gleichung muß wieder identisch in a, b erfüllt sein. Daher:

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi_x^2 + \psi_x^2 &= \varphi_y^2 + \psi_y^2 = q^2, \\ 2\varphi_x\varphi_y + 2\psi_x\psi_y &= 0. \end{aligned}$$

Unter Einführung des Imaginären kann man diese Gleichungen folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \varphi_x^2 + 2i\varphi_x\varphi_y - \varphi_y^2 &= \psi_y^2 - 2i\psi_x\psi_y - \psi_x^2 \\ \text{oder} \quad \varphi_x + i\varphi_y &= \pm(\psi_y - i\psi_x), \\ \varphi_x &= \pm\psi_y, \quad \varphi_y = \mp\psi_x. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen bestimmen wir durch die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \pm(\psi_y^2 + \psi_x^2) = \pm(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = \pm q^2.$$

Ist $q = 0$, so verschwinden wegen (13) sämtliche Ableitungen und erfüllen dann also gewiß (6). Ist $q > 0$, so muß die dann nicht-ver-

⁷⁾ Es liegt keine wesentliche Einschränkung in der Voraussetzung eines beschränkten Γ , denn wegen (2) wird jede hinreichend kleine Umgebung eines Punktes auf ein beschränktes Gebiet abgebildet, und G läßt sich mit solchen Umgebungen abzählbar vieler Punkte überdecken.

schwindende *Funktionaldeterminante* in E_1 positiv sein, da der Umlaufungsinn aufrechterhalten werden soll⁸⁾. Also ist

$$\varphi_x = +\psi_y, \quad \varphi_y = -\psi_x$$

in dem maßgleichen Kern E_1 von G , und der Satz B sagt dann aus, daß $f(z)$ analytisch und regulär in G ist. Ferner kann wegen der vorausgesetzten Eineindeutigkeit $f'(z) = 0$ in G nicht stattfinden, so daß also die durch $\zeta = f(z)$ geleistete Abbildung in G ausnahmslos *konform* ist.

Endlich ist hier, wie ein Vergleich der Definitionen sofort lehrt,

$$(14) \quad L_f(z) = q(z).$$

Nach einer schönen Schlußweise von Herrn Bohr ist aber $q(z)$ in G summierbar. Denn offenbar ist $q^2(z)$ das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung im Punkte z . Daher ist

$$\begin{aligned} \iint_G q^2 d\omega &= m\Gamma, \\ 2 \iint_G q d\omega &\leq \iint_G (1 + q^2) d\omega = mG + m\Gamma, \end{aligned}$$

was die behauptete Summierbarkeit von q einschließt⁹⁾. Wegen (14) erübrigt sich also bei der streckentreuen Abbildung unsere besondere Voraussetzung über $L_f(z)$. Damit haben wir den Bohrschen Satz wiedergewonnen.

Satz II: *Jede eineindeutige streckentreue Abbildung eines beschränkten Gebietes G auf ein beschränktes Gebiet Γ ist konform.*

⁸⁾ Siehe I. c. ²⁾ Satz IV.

⁹⁾ Vgl. I. c. ¹⁾ S. 415f. (wo $g(z)$ für unser $q(z)$ geschrieben ist). Daß $q^2(z)$ das Vergrößerungsverhältnis wenigstens für die Punkte von E_1 darstellt, ergibt auch Satz III I. c. ³⁾ wegen $q^2 = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$.