Ueber die Darstellung von Fehlergesetzen.

Von H. Bruns.

1. Nachstehend soll eine interpolatorische Darstellung reeller willkürlicher Functionen entwickelt werden, die bei der Untersuchung von Fehlergesetzen eine ähnliche Rolle spielt, wie die bekannte trigonometrische Reihenentwicklung

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

bei der Behandlung periodischer Vorgänge.

Als Ausgangspunkt dient uns die Betrachtung einer Function $f(x)$, die durch die Gleichung

$$\pi f(x) = \int_{-x}^x \frac{dv}{v} \sin v$$

definiert ist. Hierbei genügt es, da $f(x)$ ungerade ist, der Veränderlichen x nur positive Werthe beizulegen. Theilt man das Gebiet der positiven x an den Stellen

$$x = 0, \quad x = \pi, \quad x = 2\pi, \quad \dots,$$

so ist innerhalb eines jeden derart bestimmten Intervalls die Ableitung von $f(x)$ entweder nur positiv oder nur negativ, d. h. innerhalb eines Intervalls nimmt $f(x)$ nur zu oder nur ab, und die auf einander folgenden Maxima und Minima von f finden in den Intervallgrenzen statt.

Die absolute Grösse der Werthschwankung von $f(x)$ innerhalb eines Intervalls nimmt mit steigender Intervallnummer ab, weil unter dem Integralzeichen der Nenner v beständig wächst, während sich der Zähler $\sin v$ periodisch wiederholt. Ist $k\pi$ das grösste in x enthaltene Vielfache von π , so enthält die Reihe

$$f(x) = [f(\pi) - f(0)] + [f(2\pi) - f(\pi)] + \dots \\ + [f(k\pi) - f((k-1)\pi)] + [f(x) - f(k\pi)],$$

bei der die in $[\]$ eingeschlossenen Differenzen als die einzelnen Reihenglieder anzusehen sind, abwechselnd positive und negative Glieder, deren numerischer Betrag beständig fällt. Infolgedessen convergirt die Reihe bei unbeschränkt wachsendem x gegen einen festen Grenzwert $f(\infty)$, der bekanntlich gleich Eins ist. Ist ferner g eine beliebig kleine angebbare positive Zahl, so lässt sich stets eine von g abhängende positive Zahl $K(g)$ derart bestimmen, dass für jedes x oberhalb K die Differenz

$$f(x) - f(\infty)$$

numerisch kleiner als g bleibt.

2. Weiter betrachten wir die Function $f(x, a)$, die durch die Gleichung

$$\pi f(x, a) = \int_{-x}^x \frac{dv}{v} \sin av$$

definiert ist, wo a eine Constante bedeutet. Führt man die neue Integrationsveränderliche $u = av$ ein, so wird

$$\pi f(x, a) = \int_{-ax}^{ax} \frac{du}{u} \sin u, \\ f(x, a) = f(xa),$$

woraus $f(\infty, a) = \pm 1$ folgt, je nachdem a positiv oder negativ ist. Bedeutet das Symbol $sg(a)$, (gesprochen signum von a), die Zahl $+1$, 0 oder -1 , je nachdem a positiv, null oder negativ ist, und beachtet man, dass $f(x, 0)$ gleich Null ist, so liefert $f(x, a)$ offenbar eine angenäherte Darstellung der von a abhängenden unstetigen Function $sg(a)$, und der Fehler dieser Darstellung convergirt mit unbeschränkt wachsendem x gegen Null. Soll wie vorhin der Fehler unterhalb der kleinen Grösse g bleiben, so muss ax grösser als $K(g)$, oder x grösser als $K:a$ gewählt werden.

Die vorstehende Bemerkung wollen wir noch etwas anders fassen. Es sei C eine positive feste Zahl, ferner seien g und k zwei beliebig kleine angebbare Grössen, dann lässt sich für C stets ein solcher Werth angeben, dass die Differenz

$$sg(a) - f(C, a)$$

zwischen den Grenzen $\pm g$ bleibt, wenn a ausserhalb des Intervalls $-k \dots +k$ liegt. Liegt dagegen a innerhalb des genannten Intervalls, so können die Grenzen $\pm g$ allerdings überschritten werden, jedoch geht jene Differenz niemals über eine bestimmte endliche Grenze hinaus. Die Gleichung

$$\pi sg(a) = \int_{-C}^C \frac{dv}{v} \sin av$$

ist also als eine interpolatorische Darstellung von $sg(a)$ anzusehen, deren Annäherung nur innerhalb eines beliebig eng zu wählenden Intervalls versagt.

Benutzt man für die Exponentialfunction e^x die Schreibweise $\exp x$, so können wir die gefundene Darstellung auch

in der Gestalt

$$\pi \operatorname{sg}(a) = \int_{-C}^C \frac{dv}{iv} \exp(2ia v)$$

ansetzen, wenn man hinzufügt, dass am Schlusse der Rechnung nur die reellen Bestandtheile beizubehalten sind.

3. Es sei $\psi(v)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von v mit geraden Gliedern, deren Coefficienten reell und im übrigen nur der folgenden Einschränkung unterworfen sein sollen. Ist die Reihe endlich, so soll der Coefficient des höchsten Gliedes positiv sein; ist dagegen die Reihe unendlich, so soll sie beständig convergiren und von einem beliebig hohen Gliede ab nur positive Coefficienten enthalten. In beiden Fällen wird für ein unbeschränkt wachsendes v die Function $\psi(v)$ schliesslich positiv unendlich. Dies festgesetzt bilden

$$\pi \operatorname{sg}(y-x) = \sum R(x)_n \int_{-C}^C \frac{dv}{iv} \exp[2iyv - \psi(v)] (2iv)^n.$$

Setzt man

$$\pi \Psi(y, C) = \int_{-C}^C \frac{dv}{iv} \exp[2iyv - \psi(v)],$$

wobei rechts der imaginäre Bestandtheil zu unterdrücken ist, so ist Ψ nach y in eine beständig convergente Potenzreihe entwickelbar, d. h. Ψ ist eine ganze transscendente Function. Durch Differentiiren nach y erhält man aus Ψ für die successiven Ableitungen $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ die Darstellung

$$\pi \Psi(y, C)_n = \int_{-C}^C \frac{dv}{iv} \exp[2iyv - \psi(v)] (2iv)^n,$$

woraus

$$\operatorname{sg}(y-x) = \sum R(x)_n \Psi(y, C)_n \quad (1)$$

folgt. Der Fehler dieser convergenten Darstellung lässt sich nach dem obigen durch Wahl eines hinreichend grossen C innerhalb der beliebig engen Grenzen $\pm g$ halten, so lange $y-x$ ausserhalb eines beliebig klein zu wählenden Intervalls $-k \dots +k$ bleibt, während innerhalb des genannten Intervalls der Fehler zwar nicht mehr beliebig klein, wohl aber immer noch endlich ist.

Lässt man den Parameter C unendlich werden, so bleiben dabei die Polynome R ungeändert, während die Ψ in bestimmte transscendente ganze Functionen übergehen. Der Fehler der ursprünglichen Integraldarstellung convergirt dann, wie wir wissen, gegen Null, dagegen ist es vorläufig fraglich, ob die Convergenz der Reihe (1) erhalten bleibt, und ob die Summe der Reihe, falls sie convergirt, den richtigen Werth $\operatorname{sg}(y-x)$ liefert. Die Sache liegt hier ähnlich, wie bei den trigonometrischen Reihen, die ja auch nach transscendenten ganzen Functionen fortschreiten, und nicht immer, selbst wenn sie convergiren, den Verlauf der entwickelten Function vollständig wiedergeben.

Die Erledigung der ausgesprochenen Zweifel würde, soviel ich die Aufgabe zu übersehen vermag, eine weiter ausgreifende Untersuchung nöthig machen. Deshalb will ich bei der Entwicklung (1) stehen bleiben, zumal sie für unseren

wir mit den beiden Parametern x und y die interpolatorische Gleichung

$$\pi \operatorname{sg}(y-x) = \int_{-C}^C \frac{dv}{iv} \exp[2iyv - \psi(v)] \cdot R,$$

$$R = \exp[\psi(v) - 2ixv].$$

Die Grösse R lässt sich nach Potenzen von $2iv$ in der Gestalt

$$R = \sum_n R(x)_n (2iv)^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

entwickeln, wo die $R(x)_n$ gerade oder ungerade Polynome n -ten Grades von x mit reellen Coefficienten bedeuten. Weil v auf das endliche Intervall $-C \dots +C$ beschränkt ist, so steht die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe für R ausser Frage, und wir erhalten damit

eigentlichen Zweck vollständig ausreicht. Bei den Anwendungen kommt überdies von der Reihe (1) immer nur eine mässige Anzahl von Gliedern in Betracht, und man darf dann ohne praktischen Nachtheil die Vereinfachung $C = \infty$ einführen.

Sind h und c zwei Constanten, und h positiv, so folgt aus (1) die allgemeinere Formel

$$\operatorname{sg}(y-x) = \sum R[h(x-c)]_n \cdot \Psi[h(y-c), C]_n \quad (2)$$

4. Die vorstehende Gleichung wenden wir zunächst auf die Darstellung unstetiger Häufigkeitsfunctionen an, wie sie bei Beobachtungen statistischer Art auftreten. Es seien z. B. n Urnen mit weissen und schwarzen Kugeln gegeben. Aus jeder Urne wird je eine Kugel gezogen, und diese n Züge sollen zusammen einen Versuch bilden. Die relative Häufigkeit von »weiss« kann dann bei einem angestellten Versuche irgend einen der Werthe $x_r = r:n$ annehmen, wo r von 0 bis n zu laufen hat. Die Wahrscheinlichkeit, mit der x_r bei dem Versuche zu erwarten ist, ist gleich einem bestimmten positiven echten Bruche y_r , und die Summe sämmtlicher y_r ist gleich Eins. Andere Werthe als die angegebenen x_r kann der Versuch nicht liefern, d. h. die Wahrscheinlichkeit für eine von den x_r verschiedene relative Häufigkeit x ist beständig null. Damit gelangt man zu der Vorstellung einer Häufigkeitsfunction $\varphi(x)$, die im allgemeinen null ist und nur für die discreten Argumente $x = x_r$ die von Null verschiedenen Werthe y_r annimmt.

Um das betrachtete specielle Beispiel zu verallgemeinern, hat man offenbar nur die Annahme nöthig, dass die $n+1$ Argumente x_r , für die allein die Häufigkeitsfunction $\varphi(x)$ von Null verschiedene Werthe y_r annimmt, irgendwie discret vertheilt seien, während die y_r positive Grössen mit der Summe Eins bedeuten.

Bedeutet nun $X(x)$ eine beliebige Function von x , so kann man, wenn eine Häufigkeitsfunction $\varphi(x)$ der eben betrachteten Art mit den ausgezeichneten Argumenten x_r

und den dazu gehörigen Functionswerthen y_r vorliegt, sich das arithmetische Mittel aus allen X , unter Berücksichtigung der Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen x , gebildet denken. Dieses Mittel ist durch die, über alle x_r erstreckte, Summe aus den Producten $y_r X(x_r)$ gegeben und soll als der nach $\varphi(x)$ genommene Durchschnitt von X bezeichnet werden. Als abkürzendes Symbol für diese Bildung eines Durchschnittes möge das Zeichen $D(X)$ dienen. Dies festgesetzt bezeichnen wir mit $H(a, b)$ die relative Häufigkeit der x , die bei Annahme der Function $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen a und b , ($a < b$), liegen. Fällt a und b mit keinem der ausgezeichneten Argumente x_r zusammen, so ist $H(a, b)$ durch die Summe der y_r gegeben, deren Argumente zwischen a und b liegen. Ist dagegen a oder b mit einem x_r identisch, so kann man zunächst in Zweifel sein, ob bei der Bildung der Summe über die y das betreffende y_r mitgenommen werden soll oder nicht. Wir wollen in diesem Falle fest-

$${}_2 H(a, b) = \sum_n D[R[h(x-c)]_n] \cdot [\Psi[h(b-c), C]_n - \Psi[h(a-c), C]_n] \quad (3)$$

Der Fehler dieser Darstellung kann, sobald die Intervalle zwischen zwei auf einander folgenden x_r angebbare Grössen besitzen, dadurch beliebig klein gemacht werden, dass man einerseits die Grössen a und b in die Mitten jener Intervalle verlegt und andererseits C hinreichend gross wählt.

5. Die Darstellung (3) lässt sich durch eine einfache Ueberlegung auf den Fall stetiger Häufigkeitsfunctionen übertragen. Beispielsweise sei ein bestimmtes Beobachtungsverfahren gegeben, dessen mögliche Fehler x , wie es ja in der Regel zutrifft, eine stetige Mannigfaltigkeit bilden. Ferner sei $\varphi(x)$ die dazu gehörige Fehlerfunction, d. h. es soll $\varphi(x) dx$ die relative Häufigkeit der Fehler angeben, die in das Intervall von x bis $x + dx$ fallen. Denkt man sich nun das Gebiet der x in die unendlich kleinen und einander gleichen Intervalle dx zerlegt und ordnet dem Mittelpunkt jedes Intervalls den entsprechenden Werth von $\varphi(x) dx$ als Häufigkeitsbetrag zu, so ist man wieder bei dem vorigen Falle angelangt, nur dass jetzt die Anzahl der ausgezeichneten Argumente x_r unendlich gross wird. Die Häufigkeit $H(a, b)$ ist dabei durch

$$H(a, b) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

gegeben, während der Durchschnitt eines vorgelegten $X(x)$ aus der Gleichung

$$D(X) = \int X(x) \varphi(x) dx$$

folgt, in der die Integration über das ganze Gebiet der x zu erstrecken ist.

Der Fehler $F(x)$ der für $E(x)$ angesetzten Reihe übersteigt bei passend gewähltem C eine vorgeschriebene Grenze g nur dann, wenn die Differenzen $x - a$ und $x - b$ ein gewisses, übrigens beliebig eng zu haltendes, Intervall

setzen, dass für $H(a, b)$ das Mittel aus den beiden möglichen Werthen genommen, dass also das zu $x = a$ oder $x = b$ gehörige y mit seinem halben Betrage in die Summe eingestellt werde. Aus dieser Festsetzung ergibt sich, wenn zur Abkürzung noch

$${}_2 E(x) = \text{sg}(b - x) - \text{sg}(a - x)$$

eingeführt wird, die Gleichung

$$H(a, b) = \sum y_r E(x_r),$$

wo die Summation über alle vorhandenen x_r auszudehnen ist. Beachtet man nun die oben gegebene Definition des Symbols D , so kann man auch schreiben

$$H(a, b) = D[E(x)].$$

Diese Gleichung, verbunden mit (2), liefert die Darstellung

$-k \dots + k$ nicht überschreiten. Ferner hat der Fehler der für

$$D(E) = \int E(x) \varphi(x) dx \quad (4)$$

angesetzten Reihe die Gestalt

$$D(F) = \int F(x) \varphi(x) dx \quad (5)$$

Nun liefert die Ausführung der Integration über die beiden kritischen Intervalle, die die Stellen $x = a$ und $x = b$ einschliessen, zu $D(F)$ einen Beitrag von der Ordnung der Grösse k . Andererseits erzeugt die Integration über das Gebiet ausserhalb der beiden kritischen Intervalle einen Beitrag von der Ordnung der Grösse g . Hiernach liefert bei einer stetigen Häufigkeitsfunction $\varphi(x)$ die Gleichung (3) eine gleichmässig convergente Darstellung von

$$H(a, b) = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

deren Fehler durch Wahl eines hinreichend grossen angebbaren C überall unter eine vorgeschriebene beliebig kleine Grenze gebracht werden kann. Diese Eigenschaft bleibt, wie die Betrachtung von (4) und (5) lehrt, auch noch bestehen, wenn sich $\varphi(x)$ an einzelnen Stellen sprungweise ändert, also nur abschnittsweise stetig ist.

6. Bei den vielfachen Anwendungen, die man von der Gleichung (3) machen kann, sind im allgemeinen zwei Fälle zu unterscheiden. Erstlich kann, wie das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Regel sein wird, die Function $\varphi(x)$ theoretisch gegeben sein, und zwar durch einen Ausdruck, der für die directe Behandlung zu verwickelt ist und deshalb durch eine einfachere, wenn auch nur genäherte, Formel zu ersetzen ist. Die Aufgabe kommt dann darauf hinaus, nach passender Wahl von $\psi(v)$, h und c die Durchschnitte aus den R_n zu berechnen. Zweitens kann $\varphi(x)$

aber auch rein empirisch gegeben sein. Wenn z. B. eine grössere Reihe von Beobachtungsfehlern vorliegt, so denke man sich das Gebiet der x in passende Intervalle $a \dots b$ getheilt, und für jedes Intervall durch Auszählen der darin vorkommenden x das dazu gehörige $H(a, b)$ ermittelt. Die berechneten H liefern dann ein System von Gleichungen der Form (3), in dem nach passender Wahl von ψ , h und c die Durchschnitte $D(R_p)$ als Unbekannte anzusehen und durch Auflösung oder Ausgleichung zu berechnen sind.

In beiden Fällen erhält man, da es sich schliesslich immer nur um eine interpolatorische Darstellung handelt, einen geschlossenen Näherungsausdruck für $H(a, b)$, dessen Differentiation nach b auf eine stetige Function $\chi(b)$ führt, die als Näherung für die vorgelegte, stetige oder unstetige, Häufigkeitsfunction $\varphi(b)$ anzusehen ist. Hierbei kann man dann auch die Functionen Ψ durch Einführung eines unendlichen C vereinfachen.

Der Spielraum, der in der Wahl von ψ vorläufig besteht, lässt sich zur Erfüllung von Nebenbedingungen be-

$$2 H(a, b) = \sum_n D[R[h(x-c)]_n] \cdot [\Phi[h(b-c)]_n - \Phi[h(a-c)]_n] \quad (4)$$

über.

Für die R -Grössen erhält man aus der jetzt geltenden Gleichung

$$\sum_n R(x)_n (2iv)^n = \exp(v^2 - 2ixv) \quad (5)$$

die Ausdrücke

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{0!0!} = 1, \\ R_2 &= \frac{x^2}{0!2!} - \frac{1}{1!0!4}, \\ R_4 &= \frac{x^4}{0!4!} - \frac{x^2}{1!2!4} + \frac{1}{2!0!4^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ R_1 &= -\frac{x}{0!1!}, \\ R_3 &= -\frac{x^3}{0!3!} + \frac{x}{1!1!4}, \\ R_5 &= -\frac{x^5}{0!5!} + \frac{x^3}{1!3!4} - \frac{x}{2!1!4^2}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

aus denen das Gesetz des Fortschreitens ersichtlich ist. Entwickelt man die Gleichung

$$\exp(-v^2) \sum R(x)_n (2iv)^n = \exp(-2ixv)$$

links und rechts nach Potenzen von $2iv$, so erhält man die Potenzen von x linear durch die R ausgedrückt, welche Gleichungen mitunter gebraucht werden.

7. Zwischen zwei auf einander folgenden R besteht die aus ihrem Bildungsgesetz unmittelbar abzulesende Gleichung

$$\frac{dR(x)_n}{dx} = R(x)_{n-1}.$$

nutzen. Sind solche nicht vorhanden, so wird man es vorziehen, für ψ eine möglichst einfache Gestalt, nämlich das Quadrat von v , zu wählen. Man erhält dann, wenn zugleich C unendlich genommen wird,

$$\pi \Psi(y, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v} \sin(2yv) \exp(-v^2) = \pi \Phi(y),$$

wo die Function Φ identisch mit der aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannten Transscendente ist, die gewöhnlich durch die Gleichung

$$\sqrt{\pi} \Phi(y) = 2 \int_0^y dx \exp(-x^2)$$

definiert wird. Die Gleichung (3) geht dann, wenn die Indices von Φ wieder die Ableitungen bedeuten, in die Darstellung

Eine andere unschwer zu beweisende Beziehung ist durch die Gleichungen

$$\Phi(x)_{n+1} = 2^n n! R(x)_n \Phi(x)_1$$

gegeben. Die beiden vorstehenden Relationen gestatten den Satz abzuleiten, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x)_{p+1} \Phi(x)_{q+1}}{\Phi(x)_1} dx, \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots)$$

wenn p und q verschieden sind, den Werth Null besitzt, dagegen für $p = q$ den Werth $2 \cdot 2^p p!$ annimmt. Damit ergeben sich, wenn eine convergente Entwicklung von der Form

$$\varphi(x) = a_0 \Phi(x)_1 + a_1 \Phi(x)_2 + a_2 \Phi(x)_3 + \dots$$

vorhanden ist, die Coefficienten unmittelbar in ähnlicher Weise wie bei den trigonometrischen Reihen.

Der Coefficient der Φ_1 in (4) hat die Gestalt

$$-D[h(x-c)] = -hD(x) + hc.$$

Er verschwindet also, wenn c gleich $D(x)$ gesetzt wird. Ferner wird der Coefficient der Φ_2 gleich

$$D[1/2 h^2 (x-c)^2 - 1/4] = 1/2 h^2 D[(x-c)^2] - 1/4.$$

Der Durchschnitt aus $(x-c)^2$ liefert, wenn c in der eben angegebenen Weise bestimmt wird, das Quadrat des mittleren Fehlers m oder, allgemeiner gesprochen, der mittleren Abweichung, die zu dem betrachteten $\varphi(x)$ gehört. Bestimmt man nun das »Präcisionsmaass« h zu $\varphi(x)$ aus der Bedingung $2h^2 m^2 = 1$, so fallen in (4) auch die Glieder mit Φ_2 fort. Das erste Glied mit $\Phi_0 = \Phi$ gewinnt dadurch den Character einer genaueren Annäherung und entspricht offenbar dem Gauss'schen Exponentialgesetz. Das einfache Exponentialgesetz erscheint hierbei recht in seiner eigentlichen Bedeutung, nämlich als das Anfangsglied einer Entwicklung,

die im allgemeinen unendlich viele Glieder enthält. In der That kommt dem Gauss'schen Gesetz in der Fehlertheorie keine andere Rolle zu, als etwa der Vorstellung von einer genau kugelförmigen Erde in der Geodäsie. Prüft man die in der Litteratur zur Bestätigung des Gauss'schen Gesetzes herangezogenen Beobachtungsreihen genauer, so stellen sich meistens deutliche Abweichungen systematischer Natur heraus, deren Darstellung das Mitnehmen von wenigstens einem weiteren Gliede in (4) nöthig macht. In der Regel liegen die Abweichungen so, dass die mittelgrossen Fehler seltener, die übrigen häufiger auftreten, als es das einfache Exponentialgesetz fordert; indessen kommt auch das entgegengesetzte Verhalten vor.

Den Hauptnutzen gewährt übrigens die Darstellung (4) bei der Untersuchung von sogenannten »Collectiv-Gegenständen.« Dieser von Fechner herrührende Ausdruck dient zur Bezeichnung einer Vielheit von gleichartigen Dingen, die nach einem der Abstufung fähigen Merkmal statistisch geordnet werden können. Das dem Rechner geläufigste Beispiel hierzu sind die Häufigkeitscurven der Fehler von längeren Beobachtungsreihen; jedoch bildet dieses Beispiel nur einen einzelnen besonderen Fall der allgemeinen Collectiv-Maasslehre. Häufigkeitscurven lassen sich ja für die verschiedenartigsten Dinge construiren, und in einem nachgelassenen, zur Zeit im Drucke befindlichen Werke *) hat Fechner eingehend die Frage behandelt, wie weit sich für solche, empirisch gewonnene, Curven einfache und allgemeine Maassbeziehungen nachweisen lassen. Die nothwendige Vorbereitung besteht dabei in der interpolatorischen Darstellung der empirischen Curven durch einen hinreichend kurzen Ausdruck, und dies leisten die oben entwickelten Reihen bei der überwiegenden Mehrzahl der untersuchten Collectiv-Gegenstände auf ungezwungene Weise. Bisher hat man die genannten Curven gewöhnlich in das Gauss'sche Gesetz hineinzuwängen gesucht, obgleich dies, wie Fechner nachweist, häufig auf eine directe Misshandlung der beobachteten Zahlen hineinläuft.

8. Zum Schlusse möge die Anwendung von (4) noch an theoretischen Beispielen erläutert werden. Als erstes soll die Poisson'sche Verallgemeinerung des Bernoulli'schen Satzes über die grossen Zahlen dienen. Zu dem Ende nehmen wir das oben betrachtete Beispiel mit den n Urnen wieder auf. Es seien p_s und q_s die Wahrscheinlichkeiten

für das Ziehen von »weiss« und »schwarz« bei der Urne mit der Nummer s , ferner bilde man das Product

$$P = (p_1 u + q_1)(p_2 u + q_2) \cdots (p_r u + q_r)$$

und entwickle P in die Reihe

$$P = \sum_{\alpha} W(\alpha) u^{\alpha}, \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

dann ist bekanntlich der Coefficient $W(\alpha)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb eines Versuches »weiss« mit der absoluten Häufigkeit α oder mit der relativen Häufigkeit $x = \alpha : n$ beobachtet werde. Die Function $\varphi(x)$ ist also in dem vorliegenden Falle durch die Gleichung

$$\varphi(x) = W(n x), \quad \left(x = \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$$

gegeben. Weiter folgt der Durchschnitt von x^r aus der Gleichung

$$D(x^r) = \sum_x W(n x) x^r.$$

Dieser Ausdruck wird aber auch erhalten, wenn man die Reihe (6) r -mal hintereinander nach $n \log u$ differentiirt und dann $u = 1$ oder $\log u = 0$ setzt. Daraus fliesst, wenn P als Function von $n \log u$ angesehen und nach Potenzen dieser Grösse entwickelt wird, die Reihe

$$P(u) = \sum_r D(x^r) \frac{(n \log u)^r}{r!}, \quad (r = 0, 1, \dots)$$

die sich in der Gestalt

$$P(u) = D[\exp(n x \log u)] \quad (7)$$

summiren lässt.

Aus (5) folgt

$$\sum_r R(x)_r w^r = \exp(-1/4 w^2 - x w). \quad (8)$$

Setzt man nun in (7) $n \log u = -h w$, so wird

$$P\left[\exp\left(-\frac{h w}{n}\right)\right] = D[\exp(-h x w)],$$

woraus

$$\begin{aligned} \exp(-1/4 w^2 + h c w) P &= D[\exp(-1/4 w^2 - h(x - c)w)] \\ &= \sum_r w^r D[R[h(x - c)]_r] \end{aligned}$$

folgt. Damit ist die erzeugende Function für die gesuchten Durchschnitte $D(R_r)$ gegeben, und zwar durch das erste Glied der vorstehenden Gleichung. Zweckmässig entwickelt man zunächst den Logarithmus des genannten Gliedes nach w und geht dann zum Numerus über. Die Rechnung soll hier nicht durchgeführt, sondern nur das Ergebniss für die niedrigsten Glieder hergesetzt werden.

Es seien p und q die arithmetischen Mittel aus den

p_s und q_s , ferner sei

$$\sum_r (p_r - p)^s = n P_s, \quad (s = 2, 3, \dots),$$

dann erhält man mit $c = p$ den mittleren Fehler m nebst dem Praecisionsmaass h aus den Gleichungen

$$n m^2 = p q - P_2, \quad 2 h^2 m^2 = 1,$$

und es wird mit $h^2 = k^2 n$ der Reihe nach

*) Collectiv-Maasslehre, herausgegeben von Lipps, Leipzig, W. Engelmann.

$$\begin{aligned}
D(R_0) &= 1, & D(R_1) &= D(R_2) = 0, \\
\frac{\sqrt{n}}{h^3} D(R_3) &= -\frac{1}{6}(q-p)(pq-3P_2) - \frac{1}{3}P_3, \\
\frac{n}{h^4} D(R_4) &= \frac{1}{24}pq(1-6pq) - \frac{1}{24}P_2(7-36pq) + \frac{1}{2}(q-p)P_3 - \frac{1}{4}P_4.
\end{aligned}$$

Wenn die p zusammenfallen, so entstehen die einfacheren Gleichungen

$$\begin{aligned}
2k^2pq &= 1, \\
\sqrt{n}D(R_3) &= -\frac{1}{6}k^3pq(q-p), \\
nD(R_4) &= \frac{1}{24}k^4(1-6pq)pq.
\end{aligned}$$

Als zweites Beispiel diene eine von Bessel (A. N. Nr. 358, 359) behandelte Aufgabe. Wenn ein Beobachtungsfehler x als die Summe

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

von n Partialfehlern x_r entstanden ist, die sich unabhängig von einander zu dem Gesamtfehler x mischen, so entspringt, wie Bessel zeigt, aus dieser Mischung die Tendenz, die Fehlerfunction von x dem Exponentialgesetz zu nähern, wie auch im übrigen die Gesetze der einzelnen Partialfehler beschaffen sein mögen. Der Grad der Annäherung hängt selbstverständlich jedesmal von den besonderen Umständen des einzelnen Falles ab und ist im allgemeinen am grössten, wenn, wie wir hier annehmen wollen, allen x_r dasselbe Fehlergesetz zukommt, wenn also

$$D(x_1^s) = D(x_2^s) = \dots = D(x_r^s)$$

$$\begin{aligned}
D\left(\sum_s R(hx)_s w^s\right) &= \exp(-\frac{1}{4}w^2) D[\exp(-hxw)] \\
&= \exp(-\frac{1}{4}w^2) \prod_r [D[\exp(-hx_r w)]] \\
&= \exp(-\frac{1}{4}w^2) [D[\exp(-hx_r w)]]^r.
\end{aligned}$$

Entwickelt man das letzte Glied nach w , wobei man zweckmässig erst wieder durch den Logarithmus hindurchgeht, so erhält man mit der Abkürzung

$$P_s = \sum_r D(x_r^s) = n D(x_r^s)$$

nach den nöthigen Reductionen die Coefficienten

$$\begin{aligned}
D(R_0) &= 1, & D(R_1) &= D(R_2) = 0, \\
\frac{1}{h^3} D(R_3) &= -\frac{1}{6}P_3, \\
\frac{1}{h^4} D(R_4) &= \frac{1}{24}P_4 - \frac{1}{8n}P_2^2, \\
\frac{1}{h^5} D(R_5) &= -\frac{1}{120}P_5 + \frac{1}{12n}P_2P_3, \\
\frac{1}{h^6} D(R_6) &= \frac{1}{720}P_6 + \frac{1}{72}P_3^2 - \frac{1}{48n}P_2P_4 \\
&\quad - \frac{1}{72n}P_3^2 + \frac{1}{24n^2}P_2^3.
\end{aligned}$$

Leipzig 1897 Mai 2.

ist. Der Einfachheit halber setzen wir $D(x_r) = 0$ voraus, d. h. es soll von jedem x_r der sogenannte constante Fehlerbestandtheil $D(x_r)$ bereits abgezogen sein, so dass auch $D(x)$ verschwindet.

Bei der Bildung des Durchschnittes von x^s benutzen wir folgenden Satz. Es seien $X_1, X_2, X_3 \dots$ irgend welche Functionen von den x_r , dann ist

$$D(X_1 X_2 X_3 \dots) = D(X_1) \cdot D(X_2) \cdot D(X_3) \dots,$$

sobald jedes x_r immer nur in einem einzigen X vorkommt. Damit bilden wir zunächst

$$\begin{aligned}
m^2 &= D(x^2) = \sum_r D(x_r^2) = n D(x_r^2), \\
2h^2 m^2 &= 1,
\end{aligned}$$

während der Parameter c gleich Null gesetzt werden soll. Aus (8) folgt dann, unter Berücksichtigung der Gleichung

$$x = \sum_r x_r,$$

Entspricht z. B. die Fehlerfunction $\varphi(x_r)$ von x_r dem Gesetz des einfachen Abrundungsfehlers, ist also $\varphi(x_r)$ innerhalb des Intervalls ± 0.5 constant gleich Eins, ausserhalb dagegen constant gleich Null, so verschwinden die ungeraden P und $D(R)$, und man erhält mit

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{n}{12}, \\
P_4 &= \frac{n}{80}, \\
P_6 &= \frac{n}{448}, \dots
\end{aligned}$$

und mit $h^3 = 6:n$ die Werthe

$$n D(R_4) = -\frac{1}{80}, \quad n^2 D(R_6) = \frac{1}{840}, \dots$$

die schon für mässige n eine rasche Convergenz der Φ Reihe anzeigen.

Das Vorstehende mag genügen; weitere Ausführungen gedenke ich an einer anderen Stelle zu geben.

H. Bruns.