Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

§ 1.

Siano $u = \text{cost.}^e$, $v = \text{cost.}^e$ le equazioni delle linee di curvatura di una superficie S non sviluppabile, ed L una linea qualunque tracciata sopra S , segante le linee $v = \text{cost.}^e$ sotto l'angolo i . Chiamando ρ_n il raggio della sezione normale tangente ad L , e r_u , r_v i raggi di curvatura principali della S relativi alle linee $u = \text{cost.}^e$, $v = \text{cost.}^e$, si ha

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\text{sen}^2 i}{r_u} + \frac{\cos^2 i}{r_v}. \quad (1)$$

Se poi θ è l'angolo sotto il quale il piano osculatore di L sega il piano tangente e ρ il raggio di curvatura di L , si ha dal teorema di MEUNIER

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\text{sen } \theta}{\rho}. \quad (2)$$

Osservando quindi che $\frac{\rho}{\cos \theta}$ rappresenta il raggio di curvatura geodetica di L sopra la superficie S , si ricava dalle due relazioni precedenti

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2 g} + \left(\frac{\text{sen}^2 i}{r_u} + \frac{\cos^2 i}{r_v} \right)^2;$$

cioè, indicando con H il raggio di curvatura della geodetica tangente ad L ,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2 g} + \frac{1}{H^2}.$$

La quantità $\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{H^2}$ è dunque un invariante di flessione della superficie.

Chiamando L_1 una linea tangente ad L in un punto e tracciata sulla stessa superficie S , si ha

$$\frac{1}{\rho^2_1} = \frac{1}{\rho^2_{1g}} + \frac{1}{H^2}.$$

E se fra questa equazione e la precedente eliminiamo H , si ricava:

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2_1} = \frac{1}{\rho^2_g} - \frac{1}{\rho^2_{1g}}.$$

La quantità $\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2_1}$, relativa al punto di contatto delle due linee tangenti, è dunque un invariante di flessione della superficie data.

Qualora poi la superficie sia sviluppabile, le equazioni (1), (2) divengono più semplici; supposto che le linee $v = \text{cost.}^e$ siano le generatrici rettilinee, si ha $\frac{1}{r_v} = 0$ e le equazioni (1), (2) forniscono la relazione

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2_g} + \frac{\text{sen}^4 i}{r^2_u}. \quad (3)$$

§ 2.

Se la sviluppabile è cilindrica, r_u è eguale al raggio di curvatura ρ_0 della sezione retta L_0 . Osservando poi che ρ_g viene ad essere il raggio di curvatura della linea piana a cui si riduce L collo sviluppo del cilindro, si ha

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{di}{ds} = \text{sen } i \cdot \frac{di}{ds_0},$$

essendo s_0 l'arco di L_0 .

Avremo dunque dalla (3)

$$\frac{1}{\rho} = \text{sen}^4 i \sqrt{\frac{1}{\rho^2_0} + \left(\frac{1}{\text{sen } i} \frac{di}{ds_0} \right)^2}; \quad (4)$$

e se rammentiamo che per la torsione $\frac{1}{r}$ di una linea tracciata sopra una sviluppabile si ha l'espressione

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{\text{sen } \theta}{\rho} \cot i,$$

dove

$$\cos \theta = \frac{\rho}{\rho_g},$$

avremo

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} i} \left(\frac{di}{ds_0} \right)^2}{\frac{1}{\varphi_0^2} + \left(\frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{di}{ds_0} \right)^2} \cdot \frac{d}{ds_0} \left(\frac{\operatorname{sen} i}{\varphi_0 \frac{di}{ds_0}} \right) - \frac{1}{\varphi_0} \operatorname{sen} i \cdot \cos i. \quad (5)$$

Consideriamo ad es. le curve cilindriche nelle quali

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_0} \operatorname{sen}^2 i = \frac{1}{k}, \quad (6)$$

con k costante. Siccome da questa relazione si ricava

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\varphi_0 \frac{di}{ds_0}} = \frac{1}{k}, \quad (7)$$

le equazioni (4), (5) ci danno

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen}^2 i}, \quad r = - \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen} i \cos i}.$$

Perciò: *Se in ogni punto della linea cilindrica L per la quale è soddisfatta la condizione (6), si conduce l'elica tangente l , i raggi di curvatura e quelli di torsione di tutte queste eliche l nei punti di contatto, sono rispettivamente proporzionali ed eguali ai raggi di curvatura e di torsione di L nei medesimi punti.*

La costruzione della linea L avente questa proprietà può effettuarsi col mezzo dell'equazione

$$\cot i = \frac{1}{2a} \left(a^2 e^{k \int \frac{ds_0}{\varphi_0}} - e^{-k \int \frac{ds_0}{\varphi_0}} \right),$$

che si deduce integrando la (7).

Se consideriamo in secondo luogo la curva L che sul cilindro è una didonia, si ha

$$\frac{1}{\varphi_0} = \operatorname{sen} i \frac{di}{ds_0} = \frac{1}{k},$$

con k costante. Perciò per tale linea le equazioni (4), (5) divengono

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{k^2 \varphi_0^2 + (k^2 - s_0^2)^2}}{k^2 \varphi_0}, \quad \frac{1}{r} = \frac{k \varphi_0^2 \sqrt{k^2 - s_0^2}}{k^2 \varphi_0^2 + (k^2 - s_0^2)^2} \cdot \frac{d}{ds_0} \left(\frac{k^2 - s_0^2}{k \varphi_0} \right) + \frac{s_0 \sqrt{k^2 - s_0^2}}{k^2 \varphi_0}.$$

Si vede quindi ad es. che la didonia cilindrica avrà curvatura assoluta co-

stante $= \frac{1}{h}$ sempre e soltanto quando la sezione retta del cilindro sia la curva rappresentata dall'equazione

$$\rho_0 = \frac{h}{k\sqrt{k^2 - h^2}} \cdot (k^2 - s_0^2).$$

§ 3.

La S sia una superficie conica e chiamiamo R le porzioni delle generatrici rettilinee comprese fra il vertice e la curva L .

Osservando allora che ρ_g rappresenta il raggio di curvatura assoluta della trasformata di L quando il cono si sviluppa in un piano, si avrà (*)

$$\rho_g = \frac{R\sqrt{1 - R'^2}}{1 - R'^2 - RR''}, \quad (8)$$

essendo le derivate di R prese rapporto all'arco. Si osservi di più che r_u è eguale al raggio di curvatura geodetica, sulla sfera che la contiene, della linea di curvatura sferica del cono, passante pel punto di L che si considera; e perciò

$$r_u = R\tau,$$

essendo τ il raggio di curvatura geodetica della curva Λ che si ottiene segnando il cono colla sfera di raggio 1 che ha il centro nel vertice.

Avremo perciò

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1 - R'^2 - RR''}{1 - R'^2} + \frac{(1 - R'^2)^2}{\tau^2} \right\}. \quad (9)$$

Se ad es. si considera una geodetica del cono, si ha

$$1 - R'^2 - RR'' = 0,$$

e quindi

$$\rho = \frac{R\tau}{1 - R'^2}.$$

Perciò: *Il raggio di curvatura in un punto qualunque di una geodetica d'un cono è eguale al raggio di curvatura geodetica, sulla sfera che la contiene,*

(*) Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci. Formola (11). Giornale di Battaglini, vol. XXVII.

della linea di curvatura sferica del cono in quel punto, diviso per il quadrato del seno dell'inclinazione della geodetica sulla generatrice rettilinea del cono.

Nel caso-limite in cui il cono divenga un cilindro, si ha un teorema noto relativo alle eliche.

Se insieme all'equazione (9) si considera l'altra

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\sqrt{1-R^2}}{R}, \quad (10)$$

che lega l'arco elementare ds di L all'arco elementare $d\sigma$ della linea sferica Λ , si giunge all'importante conclusione che è costruibile *in un sol modo* la curva dello spazio di cui sono dati in funzione dell'arco il raggio di curvatura e il raggio vettore relativo a un punto fisso qualunque.

Esempi. 1.°) Si voglia la curva determinata dalle equazioni

$$R = s \cdot \cos i, \quad \rho = as,$$

con i, a costanti. Dall'equazione (9) si ricava

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{1-R^2} \sqrt{\frac{R^2}{\rho^2} - \frac{(1-R'^2-RR'')^2}{1-R^2}}; \quad (11)$$

e questa, nel caso nostro, ci dà

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{\cos^2 i - a^2 \sin^2 i}}{a \sin^2 i},$$

la quale dimostra che la linea sferica Λ è un piccolo cerchio.

La curva richiesta è dunque una traiettoria sotto l'angolo costante i delle generatrici di un cono circolare retto, il cui semiangolo al vertice è

$$\arctg \left(\frac{\sqrt{\cos^2 i - a^2 \sin^2 i}}{a \sin^2 i} \right).$$

2.°) Si voglia determinare la curva definita dalle equazioni

$$R = a \cdot \sin \left(\frac{s}{a} + b \right); \quad \rho = \frac{a \operatorname{tg} \left(\frac{s}{m} + n \right)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{s}{m} + n \right) + \sin^2 \left(\frac{s}{a} + b \right)}},$$

con a, b, m, n costanti.

Applicando la (11) si ricava

$$\tau = \operatorname{tg} \left(\frac{s}{m} + n \right);$$

ma dalla (10) si ha con un'integrazione

$$s = a\sigma + h,$$

con h costante arbitraria. Perciò τ viene dato in funzione di σ dall'equazione

$$\tau = \operatorname{tg}\left(\frac{a\sigma}{m} + k\right),$$

con k costante arbitraria.

Calcolando con questa formola il raggio di torsione r_0 della curva sferica Λ , si ottiene

$$r_0 = \frac{1 + \tau^2}{\frac{d\tau}{d\sigma}} = \frac{m}{a},$$

quantità costante. E siccome dall'equazione che dà R si ricava, in forza della (8)

$$\rho g = \frac{a}{2},$$

si vede che per ottenere la curva in discorso, basta prendere sopra una sfera di raggio 1 una curva Λ a torsione costante $\frac{a}{m}$ e avvolgere il piano di una circonferenza di raggio $\frac{a}{2}$ sopra la superficie conica che proietta Λ dal centro della sfera, colla condizione che il centro della circonferenza si trovi nel vertice del cono.

§ 4.

La formola ricordata al numero precedente

$$\rho = \frac{R\sqrt{1-R'^2}}{1-R^2-RR''}, \quad (12)$$

serve a determinare la curva piana il cui raggio vettore, rispetto a un dato centro, è una funzione nota dell'arco.

In tale ipotesi l'integrazione della (12) conduce alla relazione più generale possibile fra l'arco della linea e il suo raggio vettore relativo a un polo qualsivoglia del suo piano.

Se per es. si tratta di una circonferenza di raggio k , la relazione della

quale ora si parla è la seguente

$$R = \sqrt{2k(k-a) + 2k\sqrt{k(k-2a)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{s+m}{k}\right)},$$

con a ed m costanti arbitrarie.

S'incontra una formola del tutto analoga alla (12) quando si cerchi di stabilire l'espressione della *curvatura circolare* di una linea piana, chiamando con tal nome il rapporto all'arco elementare dell'angolo infinitesimo di due cerchi passanti per un punto fisso e tangenti alla linea data in due punti infinitamente vicini.

Sia O il punto fisso, che assumeremo come origine dei raggi vettori R ; siano OA , OB due raggi vettori consecutivi di L , M ed N i loro punti medi. Condotte le perpendicolari a questi raggi vettori nei punti M , N , queste incontrano le normali alla L in A e B nei centri A_1 , B_1 dei cerchi. Chiamando R_1 il raggio di questi cerchi, L_1 il luogo dei punti A_1 , B_1 , ... e $d\theta$ l'angolo infinitesimo sotto il quale si segano i cerchi, angolo rappresentato da A_1OB_1 , si hanno le equazioni

$$\cos(\widehat{OA_1A_1}) = \sqrt{1-R^2}, \quad R_1 = OA_1 = \frac{R}{2\sqrt{1-R^2}},$$

$$ds_1 = dR_1 + R_1 \cdot d\theta,$$

dall'ultima delle quali si ricava

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1} \sqrt{\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dR_1}{ds}\right)^2}.$$

Ma fra le coordinate x , y di A e quelle x_1 , y_1 di A_1 hanno luogo le relazioni

$$x_1 = x + R_1 \cos \lambda, \quad y_1 = y + R_1 \cos \mu,$$

essendo λ , μ gli angoli fatti cogli assi coordinati dalla normale principale di L .

Deducendosi da queste

$$\frac{ds_1}{ds} = \left(1 - \frac{R_1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dR_1}{ds}\right)^2,$$

si avrà

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{\rho}.$$

Ricordando infine i valori precedenti di ρ e R_1 e indicando con K il raggio

di curvatura circolare (rappresentato dal rapporto $\frac{ds}{d\theta}$) si ha

$$K = \frac{R\sqrt{1-R'^2}}{1-R'^2-RR''}. \quad (13)$$

L'analogia delle formole (12), (13) è manifesta.

Applicazioni. 1.º) L'equazione $R' = 0$ è caratteristica della spirale logaritmica; per tale curva dunque, e solamente per essa, si ha la relazione $\rho = K$.

2.º) Avendosi dalle precedenti equazioni

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{K} = \frac{2\sqrt{1-R'^2}}{R},$$

se sarà

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{K} = \frac{2}{a},$$

con a costante, avremo

$$R = a \cdot \sin\left(\frac{s}{a}\right),$$

equazione di una circonferenza.

Dunque: *Se la somma della curvatura ordinaria e della curvatura circolare di una linea piana è costante, la curvatura circolare è nulla e la linea è una circonferenza.*

3.º) Avendosi

$$\frac{1}{K^2} - \frac{1}{\rho^2} = \frac{4R''}{R},$$

se si avrà

$$\frac{1}{K^2} - \frac{1}{\rho^2} = \frac{4}{a^2},$$

con a costante, si avrà pure

$$R = \frac{1}{2h} \left(h^2 e^{\frac{s}{a}} - m e^{-\frac{s}{a}} \right),$$

con m ed h costanti.

Tale è l'equazione delle linee in cui è costante la differenza dei quadrati della curvatura circolare e della curvatura ordinaria.

Per $m = 0$ si ha l'equazione

$$R = \frac{h}{2} e^{\frac{s}{a}},$$

che rappresenta l'inversa di una sviluppante di circonferenza quando il centro di questa sia considerato come polo.

§ 5.

Siano ρ , r , R il raggio di curvatura, di torsione e della sfera osculatrice di una linea L tracciata sopra una superficie; ρ_g il raggio di curvatura geodetica; θ , ε le inclinazioni del piano osculatore e della sfera osculatrice sul piano tangente.

È noto che

$$\cos \theta = \frac{\rho}{\rho_g}. \quad (14)$$

Inoltre il coseno dell'angolo formato dalla normale principale di L colla retta che congiunge il punto che si considera di L col centro corrispondente della sfera osculatrice è dato da $\frac{\rho}{R}$.

Applicando quindi anche la (14), si trova

$$\cos \varepsilon = \frac{\rho}{R \rho_g} \left(\sqrt{\rho_g^2 - \rho^2} + r \frac{d\rho}{ds} \right), \quad (15)$$

Facendo in quest'equazione successivamente $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = 0$, si ricava:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè le sfere osculatrici di una linea tracciata sopra una superficie siano ortogonali, ovvero tangenti, alla superficie sono rispettivamente che in ogni punto il raggio di curvatura geodetica ρ_g della linea sia eguale al raggio R della sfera osculatrice, ovvero che sia legato a questo dalla relazione

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{r}{R \rho} \cdot \frac{d\rho}{ds}. \quad (16)$$

Sia L una linea a curvatura non costante, tracciata sopra una superficie S .

Quando L sia linea di curvatura di S e in ogni punto di essa si abbia $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, per un teorema altra volta da me dimostrato (*) L è una curva sferica.

Risultando allora R costante, per il teorema precedente risulta pure costante ρ_g .

Quando sia $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ e ρ_g costante, per il teorema precedente sarà pure R

(*) *Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe.* Giornale di Battaglini, 1885.

costante; non essendo quindi la L a curvatura costante (per dato), sarà sferica e conseguentemente linea di curvatura.

Quando infine L sia linea di curvatura e ρ_g costante, per un teorema del prof. BRIOSCHI (*), la linea detta è sferica e la sfera che la contiene è ortogonale alla superficie.

Dunque: *Se per una linea tracciata sopra una superficie, e non a curvatura costante, sono verificate due delle proprietà seguenti:*

- 1.^a che le sfere osculatrici siano ortogonali alla superficie,
- 2.^a che sia una linea di curvatura,
- 3.^a che sia a curvatura geodetica costante,

la curva data è sferica e per essa è pure verificata la rimanente proprietà.

Quando L sia una linea a curvatura costante e lungo di essa si abbia $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, la relazione precedente

$$\rho_g = R,$$

dimostra che $\rho_g = \rho$, e che quindi L è assintotica della superficie sulla quale è descritta. Se poi la L è assintotica e lungo di essa si ha $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, la relazione $\rho_g = R$, che ora deve essere soddisfatta, dimostra che $\rho = R$, la quale relazione non può sussistere che per le linee a curvatura costante.

Se finalmente L è assintotica e ρ è costante, si ha $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$, $\rho_g = \rho$ e quindi è soddisfatta la condizione $\rho_g = R$, d'onde segue che $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Perciò: *Se una linea tracciata sopra una superficie possiede due delle seguenti proprietà:*

- 1.^a che le sfere osculatrici seghino la superficie ortogonalmente,
- 2.^a che sia a curvatura costante,
- 3.^a che sia assintotica,

possiede pure la rimanente.

Quando L sia a curvatura costante e lungo di essa si abbia $\varepsilon = 0$, dalla (16) si ricava $\frac{1}{\rho_g} = 0$, il che prova che L è geodetica.

Se poi L è geodetica, e lungo di essa si ha $\varepsilon = 0$, la (16) dà $\rho =$ costante.

(*) *Intorno ad alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche.* Annali di Tortolini, 1857.

Se infine ρ è costante ed L è geodetica, la (16) è soddisfatta identicamente, il che prova che $\varepsilon = 0$.

Dunque: *Se una linea tracciata sopra una superficie possiede due delle seguenti proprietà:*

- 1.^a *che le sfere osculatrici siano tangenti alla superficie,*
- 2.^a *che sia a curvatura costante,*
- 3.^a *che sia geodetica,*

possiede pure la rimanente.

Quando la linea L non sia geodetica della superficie sulla quale è tracciata, dalle (14), (15) si può eliminare ρ_g e risulta

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{R} \left(\rho \sin \vartheta + r \frac{d\rho}{ds} \cos \vartheta \right). \quad (17)$$

Se in quest'equazione si suppone ρ costante (nel qual caso $R = \rho$) si ottiene

$$\cos \varepsilon = \sin \vartheta, \quad \text{d'onde} \quad \varepsilon + \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque: *Nelle linee a curvatura costante non piane e non geodetiche tracciate sopra una superficie qualunque, i piani osculatori e le sfere osculatrici segano la superficie sotto angoli complementari.*

Risolvendo poi l'equazione (17) rapporto a $\cos \vartheta$, si ottiene

$$\cos \vartheta = \frac{1}{R} \left(\pm \rho \sin \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon \right).$$

Per vedere quale dei due segni dobbiamo prendere in quest'equazione, si consideri la linea nella quale ρ è costante. L'equazione precedente si riduce all'altra

$$\cos \vartheta = \pm \sin \varepsilon;$$

e onde questa non sia in contraddizione con quanto è espresso dal teorema precedente, si deve scegliere il segno superiore. Abbiamo dunque in ogni caso

$$\cos \vartheta = \frac{1}{R} \left(\rho \sin \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon \right). \quad (18)$$

Questa relazione è notevole, in quanto che si ottiene dalla (17) colla permutazione degli angoli ϑ ed ε .

Dividendo ambi i membri della (18) per ρ , si ha

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos \vartheta}{\rho} = \frac{\sin \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon}{R \rho},$$

e quindi: Considerando una linea tracciata sopra una superficie qualunque, e deformando questa per flessione in un modo arbitrario, le quantità

$$\frac{\cos \theta}{\rho}, \quad \frac{\rho \sin \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon}{R\rho},$$

rimangono invariate.

Si ricava ancora: Una geodetica e un'assintotica di una superficie qualunque sono caratterizzate rispettivamente dalle equazioni

$$\rho \sin \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon = 0 \quad (19)$$

$$\rho \cos \varepsilon - r \frac{d\rho}{ds} \sin \varepsilon = 0. \quad (20)$$

Si vede quindi che, nella deformazione per flessione di una superficie qualunque, l'equazione (19), relativa a una linea tracciata sopra di essa, è sempre soddisfatta ovvero non lo è mai; l'equazione (20) è invece soddisfatta tutto al più una sola volta per una speciale forma della superficie deformantesi.

Per una stessa linea L si facciano passare due superficie S, S_1 ; siano $(\theta, \varepsilon), (\theta_1, \varepsilon_1)$ gli angoli dianzi considerati e relativi alle superficie S ed S_1 rispettivamente. Se allora insieme alle equazioni (17), (18) si considerano le altre analoghe relative alle quantità θ_1, ε_1 , si può dire: Se, facendo passare due superficie S, S_1 per una stessa linea L , si trova verificata una delle relazioni

$$\theta_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \theta,$$

si troverà pure verificata l'altra.

Siccome dall'equazione (17) si ricava

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\sin \theta \cos \theta \pm \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{r}, \quad (21)$$

le curve per le quali θ ed ε sono due determinate funzioni dell'arco s di L , sono caratterizzate dalla relazione

$$\rho = a \cdot e^{\int \frac{\sin \theta \cos \theta \pm \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \theta} \cdot \frac{ds}{r}},$$

che lega fra loro l'arco c i raggi ρ, r .

Se poi

$$\frac{\sin \theta \cos \theta \pm \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \theta} = k, \quad (22)$$

con k costante, la curva L è caratterizzata dalla relazione

$$\rho = a \cdot e^{k \int \frac{ds}{r}}, \quad (23)$$

la quale s'incontra anche quando si cercano le linee dello spazio nelle quali il raggio della sfera osculatrice è proporzionale al raggio del cerchio osculatore.

Osservando che la relazione (22) è soddisfatta quando θ ed ε sono costanti e tenendo conto anche della (21), si può dire:

Se una linea tracciata sopra una superficie possiede due delle seguenti proprietà:

- 1.^a *che i piani osculatori seghino la superficie sotto angolo costante,*
- 2.^a *che le sfere osculatrici seghino la superficie sotto angolo costante,*
- 3.^a *che il raggio della sfera osculatrice sia proporzionale al raggio*

del cerchio osculatore,

possiede pure la rimanente.

Si ha un nuovo teorema, se nell'enunciato precedente si sostituisce alla linea data un'elica, e se alla terza condizione si sostituisce l'altra che l'elica sia circolare o cilindrico-conica.

§ 6.

Delle curve (23), le quali s'incontrano in molte questioni, si può dare una facile costruzione.

Essendo $R > \rho$, si può porre

$$\frac{\rho}{k} = \cos i,$$

ed i sarà un angolo costante. Avremo allora

$$r\rho' = \rho \cdot \operatorname{tg} i;$$

se quindi L_0 è il luogo dei centri delle sfere osculatrici di L , sarà

$$\rho_0 = \rho + r(r\rho')' = \frac{\rho}{\cos^2 i}; \quad r_0 = \frac{\rho}{r} \{ \rho + r(r\rho')' \} = \frac{\rho^2}{r \cos^2 i}$$

$$\frac{ds_0}{ds} = \frac{\rho}{r} + (r\rho')' = \frac{\rho}{r \cos^2 i}.$$

Da queste equazioni si deducono facilmente le altre

$$\rho = \rho_0 \cos^2 i; \quad r = \frac{\rho_0^2}{r_0} \cos^2 i; \quad R = \rho_0 \sqrt{1 + \rho_0'^2} \cdot \cos^2 i;$$

e poichè per la curva L sussiste la relazione

$$\rho = R \cos i,$$

per la linea L_0 sussiste l'altra

$$\frac{d\rho_0}{ds_0} = \operatorname{tg} i,$$

dalla quale si ricava

$$\rho_0 = s_0 \cdot \operatorname{tg} i + a,$$

con a costante.

Quest'equazione dimostra che la trasformata di L , ottenuta distendendo sopra di un piano la sua sviluppabile osculatrice, è una spirale logaritmica segante i raggi vettoriali uscenti dal polo sotto l'angolo $\frac{\pi}{2} - i$.

Se ora indichiamo con L_1 il luogo dei centri di curvatura di L , e con A_0, A_1, A punti corrispondenti sulle tre curve L_0, L_1, L , avremo le equazioni

$$A_0 A_1 = r \rho' = \rho_0 \operatorname{sen} i \cdot \cos i, \quad A_1 A = \rho = \rho_0 \cos^2 i,$$

le quali servono per passare dalla linea L_0 (facilmente costruibile) alla L_1 , e da questa alla L .

Nel terminare questa Nota, esporrò una costruzione assai facile delle sviluppabili che ammettono una geodetica sferica.

Se L è una linea tracciata sopra una sfera qualunque S , la linea L_0 luogo degli estremi dei quadranti geodetici tangenti ad L è, sulla sfera S , l'indicatrice delle tangenti di L . L'evoluto sferico L_1 di L è una curva geodeticamente parallela ad L_0 e distante da essa di un quadrante geodetico. Ne segue che l'evoluto sferico L_2 di L_0 è la seconda evoluto sferico di L .

Perciò: *In una linea sferica qualunque L l'indicatrice dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice è la seconda evoluto sferico L_2 di L .*

In base a questo teorema, per costruire una sviluppabile avente una geodetica tracciata sopra una sfera S , e il cui spigolo di regresso è, sopra S , una determinata linea L_2 , si costruisca un'evolvente geodetica qualunque L_1 di L_2 e poscia un'evolvente geodetica qualunque L di L_1 . Indi per i punti di L si conducano delle parallele ai raggi della sfera che vanno ai punti corrispondenti di L_2 .

Queste rette sono le generatrici della sviluppabile domandata ed L ne è la geodetica sferica.