

**5. Das Verhalten von Lichtwellen
in der Nähe eines Brennpunktes oder einer
Brennlinie;
von P. Debye.**

Das von Gouy entdeckte eigenartige Verhalten von Kugel- und Zylinderwellen in der Nähe von Brennpunkten und Brennlinien, insbesondere das Auftreten des sogenannten Phasensprunges, wurde kürzlich von Hrn. F. Reiche¹⁾ einer erneuten Betrachtung unterzogen. In Anlehnung an frühere, dort genannte Autoren wird zunächst auf Grund der optischen Differentialgleichungen der „Phasensprung“ in einem Brennpunkt abgeleitet für vollständige Kugelwellen; die Erscheinungen auf der Achse eines Strahlenbündels endlicher Öffnung, welche, wie Sagnac zuerst bemerkte, wesentlich von denen bei einer vollständigen Kugelwelle verschieden sind, werden dann berechnet unter Benutzung des Huygensschen Prinzips. Ich möchte nun im folgenden zeigen, wie eine geeignete Spezialisierung des Problems (Verlegung des das Lichtbündel begrenzenden Schirmes in unendliche Entfernung), welche die Beschreibung der zu beobachtenden Erscheinungen nicht wesentlich ändert, sowohl für Kugel- wie für Zylinderwellen zu einem äußerst einfachen Ausdruck für den Lichtvektor führt, der dann überall, nicht allein auf der Achse des Bündels, Gültigkeit hat. Derselbe gestattet eine geometrische Interpretation, welche die Verhältnisse, besonders im Falle von Zylinderwellen, ohne Mühe überblicken läßt.

Neben der soeben erwähnten Behandlung auf Grund des Huygensschen Prinzips ist noch ein zweiter Weg möglich, der direkt von der optischen Differentialgleichung ausgeht, und für Strahlenbündel endlicher Öffnung zu einer Darstellung des Lichtvektors in Reihenform führt, welche dann eine vollständig strenge Lösung des Problems bildet. Es ist nun bemerkenswert, daß bei unserer Formulierung des Problems letztere Darstellung völlig mit der unter Benutzung des

1) F. Reiche, Ann. d. Phys. 29. p. 65 und p. 401. 1909.

Huygensschen Prinzips gewonnenen übereinstimmt, was seinen Grund darin hat, daß im vorliegenden Falle, wo sich die Randbedingungen lediglich auf die unendlich ferne Kugelfläche beziehen, die dort geltenden Oberflächenwerte in Strenge richtig von vornherein angegeben werden können.

§ 1. Das konvergierende Strahlenbündel endlicher Öffnung
nach dem Huygensschen Prinzip.

Wir behandeln zunächst den Fall eines räumlichen Bündels und bemerken dazu, daß die Feldkomponenten sich ableiten lassen aus einem einzigen Vektor \mathfrak{P} , dem „Hertzschen Vektor“, dessen rechtwinkelige Komponenten die optische Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta \mathfrak{P} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{P} = 0$$

erfüllen müssen. Beschränken wir uns von vornherein auf periodische Zustände mit der Schwingungszahl ν in 2π sec und substituieren deshalb in üblicher Weise für \mathfrak{P} die Größe $\mathfrak{P} e^{i\nu t}$ und entsprechend für die Feldkomponenten, so gilt statt (1)

$$(1') \quad \Delta \mathfrak{P} + k^2 \mathfrak{P} = 0; \quad \left(k^2 = \frac{\nu^2}{c^2} \right).$$

Ist ein Ausdruck für \mathfrak{P} bekannt, so folgen daraus zwei mögliche, voneinander verschiedene Felder; das erste wird aus \mathfrak{P} abgeleitet mittels der Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \text{grad div } \mathfrak{P} + k^2 \mathfrak{P}, \\ \mathfrak{H} = i k \text{ rot } \mathfrak{P}, \end{cases}$$

für das zweite gilt:

$$(2') \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = -i k \text{ rot } \mathfrak{P}, \\ \mathfrak{H} = \text{grad div } \mathfrak{P} + k^2 \mathfrak{P}, \end{cases}$$

wobei die reellen Teile von $\mathfrak{E} e^{i\nu t}$, bzw. $\mathfrak{H} e^{i\nu t}$ elektrische, bzw. magnetische Feldstärke bedeuten.

Ist nun irgend eine Komponente von \mathfrak{P} , z. B. \mathfrak{P}_x sowie $\partial \mathfrak{P}_x / \partial n$, auf einer geschlossenen Fläche mit der Normalen n bekannt, so kann man in irgend einem Punkte innerhalb dieser Fläche \mathfrak{P}_x durch Integration finden, ähnlich wie es Kirchhoff beim Huygensschen Prinzip tut.

Die betreffende Formel folgt sofort aus dem Greenschen Satz, wenn man für die eine der in demselben auftretenden

Funktionen die Lösung e^{-ikR}/R von (1') und für die andere \mathfrak{P}_x substituiert, in der Form:

$$(3) \quad 4\pi \mathfrak{P}_x = - \int \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial n} \right) d\sigma,$$

wobei R den Abstand des Integrationspunktes vom Aufpunkte bedeutet und die Integration über die Fläche zu erstrecken ist, auf der \mathfrak{P}_x und $\partial \mathfrak{P}_x / \partial n$ gegeben sind.

Wir definieren nun um den geometrischen Brennpunkt des zu untersuchenden räumlichen Bündels Kugelkoordinaten r, ϑ, ω in der in Fig. 1 angegebenen Art, so daß $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ mit der Achse des Bündels zusammenfallen. Hat dasselbe den Öffnungswinkel 2α , so werden wir ein mögliches Bündel dadurch charakterisieren können, daß wir in sehr großer Entfernung vom Nullpunkt, innerhalb des Winkels $0 < \vartheta < \alpha$ für \mathfrak{P}_x z. B., den Ansatz gelten lassen:

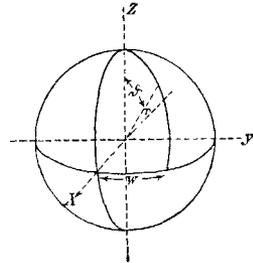


Fig. 1.

$$(4) \quad \mathfrak{P}_x = \frac{e^{-ikr}}{r},$$

während wir weiter voraussetzen, daß außerhalb dieses Winkels die Erregung entweder Null ist, d. h. von höherer Ordnung wie $1/r$ verschwindet, oder aus vom Nullpunkte wegeilenden Wellen besteht.¹⁾

Die Integration in (3) braucht dann über die zu letzteren Wellen gehörigen Gebiete nicht erstreckt zu werden, da sich dort die beiden Glieder des Integranden gegeneinander aufheben, im Gegensatz zu dem, von den einfallenden Wellen erfüllten Gebiet, wo die beiden Glieder dasselbe Zeichen haben, wie die folgenden Andeutungen noch näher beleuchten. Nennen wir noch die Koordinaten eines Punktes auf der unendlich großen Kugel, über die die Integration (3) in unserem Falle erstreckt werden soll, $r_0, \vartheta_0, \omega_0$, während die Koordinaten des Aufpunktes r, ϑ, ω sind, so gilt in erster Näherung

$$(5) \quad R = r_0 - r \cos \gamma,$$

1) Der Beweis letzterer Behauptung verläuft ebenso wie die folgende Rechnung auf p. 758.

wo γ den Winkel zwischen den Richtungen r und r_0 bedeutet. Man kann noch γ in ϑ , ϑ_0 , ω , ω_0 ausdrücken, mittels der bekannten Formel:

$$(6) \quad \cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\omega - \omega_0).$$

In derselben Näherung wie oben ist auf der Integrationskugel:

$$\mathfrak{P}_x = \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial n} = ik \frac{e^{ikr_0}}{r_0},$$

während mit Rücksicht auf (5) folgt

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} e^{ikr \cos \gamma},$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikR}}{R} = -ik \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} e^{ikr \cos \gamma},$$

Aus (3) folgt also für \mathfrak{P}_x die im ganzen Raume geltende Darstellung

$$(7) \quad 2\pi \mathfrak{P}_x = \frac{ik}{r_0^2} \int e^{ikr \cos \gamma} d\sigma,$$

oder unter Einführung des räumlichen Winkelelementes $d\Omega$, so daß $d\sigma = r_0^2 d\Omega$:

$$(7') \quad 2\pi \mathfrak{P}_x = ik \int e^{ikr \cos \gamma} d\Omega,$$

wo jetzt die Integration auf der Einheitskugel über ein Segment mit der Öffnung 2α zu erstrecken ist. Durch Substitution von (6) und

$$d\Omega = \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\omega_0$$

kann man (7') noch umformen in:

$$(7'') \quad 2\pi \mathfrak{P}_x = ik \int_{\vartheta_0=0}^{\vartheta_0=\alpha} \int_{\omega_0=0}^{\omega_0=2\pi} e^{ikr [\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\omega - \omega_0)]} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\omega_0.$$

Ebenso wie für ein räumliches Bündel folgt ein Ausdruck für die Feldstärken in einem ebenen Bündel, das geometrisch gesprochen in einer Brennpunktlinie konvergiert. Auch hier ist es von Vorteil, die Hertz'sche Funktion \mathfrak{P} zu benutzen. Denken wir an Wellen, die in der x, y -Ebene fortschreiten (für deren Feldstärken $\partial/\partial z = 0$ ist), so werden wir von \mathfrak{P} annehmen müssen, daß $\mathfrak{P}_x = \mathfrak{P}_y = 0$ und nur \mathfrak{P}_z von Null verschieden ist. Durch Anwendung von (2) bzw. (2') folgen dann zwei ver-

schiedene möglichen Zustände, die Wellen entsprechen, welche in bzw. senkrecht zur x, y -Ebene polarisiert sind und aus denen sich alle möglichen Zustände kombinieren lassen. Dieses ist sofort klar, wenn man (2) und (2') für den Fall $\mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_y = 0$ spezialisiert; man erhält dann, wenn man noch um den Nullpunkt der x, y -Ebene Polarkoordinaten ϱ, φ einführt, entweder

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\varrho = 0, & \mathfrak{H}_\varrho = \frac{ik}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathfrak{F}_z, \\ \mathfrak{E}_\varphi = 0, & \mathfrak{H}_\varphi = -ik \frac{\partial}{\partial \varrho} \mathfrak{F}_z, \\ \mathfrak{E}_z = k^2 \mathfrak{F}_z, & \mathfrak{H}_z = 0, \end{cases}$$

oder

$$(8') \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\varrho = -\frac{ik}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathfrak{F}_z, & \mathfrak{H}_\varrho = 0, \\ \mathfrak{E}_\varphi = ik \frac{\partial}{\partial \varrho} \mathfrak{F}_z, & \mathfrak{H}_\varphi = 0, \\ \mathfrak{E}_z = 0, & \mathfrak{H}_z = k^2 \mathfrak{F}_z. \end{cases}$$

Im ebenen Falle lautet der Greensche Satz:

$$(9) \quad 4i \mathfrak{F}_z = - \int \left(\mathfrak{F}_z \frac{\partial}{\partial n} H_2(kP) - H_2(kP) \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial n} \right) ds,$$

wenn P der Abstand des Aufpunktes vom Integrationspunkt bedeutet und $H_2(kP)$ die sogenannte zweite Hankelsche Funktion ist¹⁾, welche für kleine Werte von kP mit

$$(10) \quad -\frac{2i}{\pi} \log \frac{kP}{2}$$

und für große Werte von kP mit

$$(11) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi k P}} e^{-i(kP - \frac{\pi}{4})}$$

zusammenfällt; die Integration ist über eine den Aufpunkt umschlingende Linie s mit der äußeren Normalen n zu erstrecken. Charakterisieren wir nun das ebene Bündel vom Öffnungswinkel 2α dadurch, daß für $-\alpha < \varphi < \alpha$ in sehr großer Entfernung vom Nullpunkte

$$\mathfrak{F}_z = H_1(k\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k \varrho}} e^{i(k\varrho - \frac{\pi}{4})}$$

1) Vgl. für die im folgenden angeführten Näherungsformeln N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktion. Leipzig 1904.

und für alle anderen Richtungen die Erregung verschwindet oder zu Wellen gehört, welche von einem im Endlichen gelegenen Punkt aus divergieren, so ergibt (9) analog wie im räumlichen Falle mit Rücksicht auf die asymptotische Darstellung (11) für \mathfrak{R}_z die Formel:

$$(12) \quad \pi \mathfrak{R}_z = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi_0.$$

Dieselbe ist, wie man sieht, ganz analog mit (7') gebaut und übrigens noch einfacher wie diese. Die Diskussion der Erscheinungen wird in § 3 und 4 direkt an (7), bzw. (12) angeknüpft werden. Zuvor wollen wir noch im nächsten Paragraphen zeigen, wie auch die direkte Integration der Differentialgleichung (1) auf Reihen führt, welche mit (7) bzw. (12) identisch sind.

§ 2. Reihenentwickelungen für den zum konvergierenden Lichtbündel gehörigen Hertzschen Vektor.

Wir wollen wieder zuerst das räumliche Strahlenbündel behandeln in der am Ende des vorigen Paragraphen angedeuteten Weise. Dazu bemerken wir zunächst, daß spezielle Lösungen von (1') gebildet werden durch die beiden Ausdrücke¹⁾

$$(13) \quad \frac{\eta_n(kr)}{kr} P_n(\cos \vartheta), \quad \text{bzw.} \quad \frac{\zeta_n(kr)}{kr} P_n(\cos \vartheta).$$

Für sehr große Werte von kr ist:

$$(14) \quad \eta_n(kr) = e^{-i\frac{\pi}{2}(n+1)} e^{ikr} \quad \text{und} \quad \zeta_n(kr) = e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} e^{-ikr},$$

die erste Lösung stellt demnach Wellen dar, die auf den Nullpunkt zu-, die zweite solche, die vom Nullpunkt wegeilen. Entwickeln wir andererseits eine Funktion $f(\vartheta)$, welche für $0 < \vartheta < \alpha$ den Wert 1 hat und für $\alpha < \vartheta < \pi$ verschwindet in eine Kugelfunktionenreihe von der Form

$$(15) \quad f(\vartheta) = \sum_0^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta),$$

1) Für die Definition und die Reihenentwickelungen der hier benutzten Funktionen vgl. man P. Debye, Lichtdruck usw. Diss. München § 2, sowie die dort angegebene Literatur, oder auch Ann. d. Phys. 30. p. 57. 1909.

so wird:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\alpha P_n(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ &= -\frac{2n+1}{2n(n+1)} \sin \alpha \frac{d}{d\alpha} P_n(\cos \alpha). \end{aligned} \right.$$

Setzen wir nun z. B. an:

$$(17) \quad \mathfrak{P}_x = u_1 = \sum_0^\infty a_n e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} \frac{\eta_n(kr)}{r} P_n(\cos \vartheta),$$

so wird dieses eine Lösung von (1') sein, die zwar nach (14) und (15) für $0 < \vartheta < \alpha$ den Wert $\frac{e^{ikr}}{r}$ annimmt, die aber noch nicht als Lösung der Aufgabe angesehen werden kann, da für kleine Werte von kr

$$\eta_n(kr) = -i \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(kr)^n},$$

so daß der Ausdruck (17) im Nullpunkt nicht endlich bleibt. Um diese Singularität zu vermeiden, fügen wir zu u_1 noch die Funktion¹⁾

$$(17') \quad u_2 = \sum_0^\infty a_n e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} \frac{\zeta_n(kr)}{r} P_n(\cos \vartheta)$$

hinzu, so daß wir im ganzen für \mathfrak{P}_x erhalten:

$$(18) \quad \mathfrak{P}_x = u_1 + u_2 = \sum_0^\infty a_n e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} \frac{\eta_n(kr) + \zeta_n(kr)}{r} P_n(\cos \vartheta),$$

oder auch mit Rücksicht auf Formel (14) der zitierten Abhandlung:

$$(18') \quad \mathfrak{P}_x = 2 \sum_0^\infty a_n e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} \frac{\psi_n(kr)}{r} P_n(\cos \vartheta).$$

Dieser Ausdruck bleibt im Nullpunkte endlich, da für kleine Werte von kr :

$$\psi_n(kr) = \frac{(kr)^{n+1}}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}$$

und stellt demnach die gesuchte Lösung dar.

1) Ersetzt man in (17') die Variable ϑ durch $\pi - \vartheta'$, so ergibt der Vergleich mit (17) ohne weiteres (unter Benutzung der asymptotischen Formel (14) für ζ_n), daß die durch u_2 dargestellte Erregung für $r = \infty$ auf das Gebiet $\pi - \alpha < \vartheta < \pi$ beschränkt ist.

Es erübrigt jetzt noch zu zeigen, daß der Ausdruck (18') mit dem im vorigen Paragraphen erhaltenen (7''), wie schon in der Einleitung hervorgehoben, identisch ist. Dazu substituieren wir zunächst für α_n den unausgerechneten Wert aus (16), so daß wir statt (18') erhalten:

$$(18'') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= \int_0^{\alpha} \sin \vartheta_0 \, d\vartheta_0 \\ &\sum_0^{\infty} (2n+1) e^{i \frac{\pi}{2}(n+1)} \frac{\psi_n(kr)}{r} P_n(\cos \vartheta_0) P_n(\cos \vartheta). \end{aligned} \right.$$

Nun gilt andererseits nach dem Additionstheorem der Kugelfunktionen die Legendresche Formel:¹⁾

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) \, d\omega_0 = P_n(\cos \vartheta_0) P_n(\cos \vartheta),$$

wenn $\gamma, \omega, \vartheta, \omega_0, \vartheta_0$ dieselbe Bedeutung wie in § 1, Gleichung (6) haben; statt (18'') können wir demnach auch schreiben

$$\mathfrak{R}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0=0}^{\vartheta_0=\alpha} \sin \vartheta_0 \, d\vartheta_0 \int_{\omega_0=0}^{\omega_0=2\pi} d\omega_0 \sum_0^{\infty} (2n+1) e^{i \frac{\pi}{2}(n+1)} \frac{\psi_n(kr)}{r} P_n(\cos \gamma).$$

Schließlich ist aber die hier auftretende Summe bis auf den Faktor ik identisch mit der bekannten Entwicklung:

$$e^{ikr \cos \gamma} = \sum_0^{\infty} (2n+1) e^{i \frac{\pi}{2}n} \frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n(\cos \gamma),$$

so daß wir in Übereinstimmung mit (7'') für \mathfrak{R}_x den Ausdruck erhalten

$$\mathfrak{R}_x = \frac{ik}{2\pi} \int_{\vartheta_0=0}^{\vartheta_0=\alpha} \sin \vartheta_0 \, d\vartheta_0 \int_{\omega_0=0}^{\omega_0=2\pi} e^{ikr \cos \gamma} \, d\omega_0.$$

1) Vgl. z. B. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen 1. p. 313. Berlin 1878.

Ebenso wie der räumliche Fall soeben behandelt wurde, läßt sich der ebene erledigen. Als Lösung ergibt sich

$$(19) \quad \mathfrak{F}_z = \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin n \alpha}{n} e^{i n \frac{\pi}{2}} J_n(k \rho) \cos n \varphi,$$

wenn $J_n(k \rho)$ die gewöhnliche Besselsche Funktion n^{ter} Ordnung ist und der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß, wie bei allen \cos -Reihen, das erste Glied halb zu nehmen ist. Auch hier kann man den Ausdruck (19) entstanden denken durch Summation der beiden Reihen:

$$u_1 = \frac{1}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin n \alpha}{n} e^{i n \frac{\alpha}{2}} H_n^1(k \rho) \cos n \varphi,$$

$$u_2 = \frac{1}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin n \alpha}{n} e^{i n \frac{\pi}{2}} H_n^2(k \rho) \cos n \varphi,$$

von denen für große Werte von $k \rho$ die erste u_1 , eine auf den Winkel $-\alpha < \varphi < \alpha$ beschränkte Zylinderwelle darstellt, welche nach dem Nullpunkt hin fortschreitet, während u_2 eine Zylinderwelle darstellt, welche vom Nullpunkt wegeht und auf das Intervall $\pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha$ beschränkt ist. Daß (19) mit (12) identisch ist, folgt sofort, wenn man zunächst $\sin n \alpha / n$ ersetzt durch:

$$\int_0^{\alpha} \cos n \varphi_0 d\varphi_0,$$

so daß man statt (19) schreiben kann:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_z &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} d\varphi_0 \sum_0^{\infty} e^{i n \frac{\pi}{2}} J_n(k \rho) \cos n(\varphi + \varphi_0) \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} d\varphi_0 \sum_0^{\infty} e^{i n \frac{\pi}{2}} J_n(k \rho) \cos n(\varphi - \varphi_0), \end{aligned}$$

was dann mit Rücksicht auf die bekannte Entwicklungsformel

$$e^{i k \rho \cos \gamma} = \sum_0^{\infty} e^{i n \frac{\pi}{2}} J_n(k \rho) \cos n \gamma,$$

ohne weiteres in (12) übergeht. Daß (7) und (12) strenge Lösungen unserer Aufgabe sind, sieht man übrigens auch direkt ein, wenn man bedenkt, daß erstens die Integranden dieser beiden Ausdrücke Gleichung (1') ohne Vernachlässigungen genügen und sich zweitens im Unendlichen in der verlangten Art verhalten, wie noch näher in den beiden folgenden Paragraphen gezeigt wird.

§ 3. Diskussion der Verhältnisse in einem ebenen Bündel.

Da uns hauptsächlich die Lichterregung in der Nähe der Brennpunktlinie interessiert, werden wir die Formel (12) für \mathfrak{P}_z spezialisieren können für nicht zu große Werte von

$$k \rho = 2 \pi \frac{\rho}{\lambda} \quad (\lambda = \text{Wellenlänge}).$$

Wir beschränken uns vorderhand auf die Diskussion von \mathfrak{P}_z in Punkten der Achse des Bündels ($\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$) und erhalten dann vor der Brennpunktlinie ($\varphi = 0$), indem wir $\cos \varphi_0$ durch $1 - \varphi_0^2/2$ ersetzen, den Ausdruck:

$$(20) \quad \mathfrak{P}_z = \frac{e^{ik\rho}}{\pi} \int_{-a}^{+a} e^{-i \frac{k\rho}{2} \varphi_0^2} d\varphi_0 = \frac{2e^{ik\rho}}{\pi} \int_0^a e^{-i \frac{k\rho}{2} \varphi_0^2} d\varphi_0.$$

Das folgende Glied in der Entwicklung von $\cos \varphi_0$ ist $\varphi_0^4/24$, so daß die vorstehende Formel nur so lange Gültigkeit hat, als der Ausdruck

$$(21) \quad k \rho \frac{\alpha^4}{24} = \frac{\pi \alpha^4}{12} \frac{\rho}{\lambda}$$

nicht zu groß, beispielsweise klein gegen π ist. Diese Beschränkung ist praktisch belanglos, denn denken wir z. B. an eine Zylinderlinse mit einer Öffnung gleich dem zehnten Teil der Brennweite, so ist $\alpha = 1/20$, so daß der Ausdruck (21) erst gleich π wird, wenn

$$\frac{\rho}{\lambda} = \frac{12}{\alpha^4} = 1,92 \cdot 10^6,$$

d. h. in beinahe $2 \cdot 10^6$ Wellenlängen oder ungefähr 1 m Entfernung von der Brennpunktlinie.

In (20) führen wir noch die neue Variable

$$(22) \quad u = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \varphi_0$$

ein, wodurch diese Formel übergeht in

$$(23) \quad \mathfrak{P}_z = \frac{2\alpha}{\pi} e^{ik\rho} \frac{1}{s} \int_0^s e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du,$$

wenn noch zur Abkürzung

$$(24) \quad s = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \alpha = \sqrt{\frac{2\rho}{\lambda}} \alpha$$

gesetzt wird. Nach Formel (23) kann man nun unter Benutzung der Cornuschen Spirale das Verhalten von \mathfrak{P}_z geometrisch sofort überblicken. Zeichnet man nämlich die Spirale in einer komplexen Ebene mit horizontaler reeller und vertikaler imaginärer Achse (Fig. 2), so sind bekanntlich reeller bzw. imaginärer Teil des Integrals

$$\int_0^s e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du$$

die beiden rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes auf der Spirale, der um die auf derselben gemessenen Bogenlänge s vom Nullpunkt entfernt ist.

Will man also in einem Punkte, der im Abstände ρ vor der Brennlinie liegt, Amplitude und Phase kennen, so berechne man zunächst die zugehörige Größe s nach (24), die als Bogenlänge der Spirale z. B. zum Punkte P gehören möge. Formel (23) zeigt dann, daß die Amplitude von \mathfrak{P}_z abgesehen vom Faktor $2\alpha/\pi$ dem Quotienten $\overline{OP}/\widehat{OP}$ gleichkommt, wenn \overline{OP} die geradlinige und \widehat{OP} die auf der Spirale gemessene Entfernung der Punkte O und P bedeutet, während die *anomale* Phasenänderung gemessen wird durch den Winkel, den die Gerade OP mit der Geraden OS bildet, die O mit dem unteren Windungspunkt S der Spirale verbindet. Man sieht, wie Amplitude und Phase

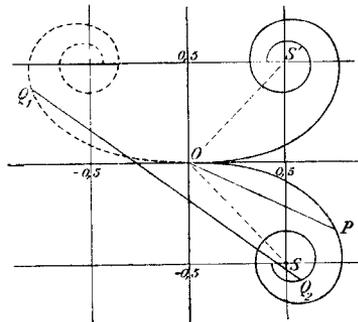


Fig. 2.

Man sieht, wie Amplitude und Phase

regelmäßige Schwankungen ausführen, welche bei Annäherung an die Brennlinie in Intensität zunehmen. In der Brennlinie selbst erreicht die Amplitude ihren Maximalwert, welcher bei dem hier gewählten Ansatz (23) $2\alpha/\pi$ beträgt; die Phase hat sich bis dorthin im ganzen um $\pi/4$ in anomaler Weise geändert. Hinter der Brennlinie ist $\varphi_0 = \pi$, so daß dort für \mathfrak{F}_z die Formel:

$$(23') \quad \mathfrak{F}_z = \frac{2\alpha}{\pi} e^{ik\rho} \frac{1}{s} \int_0^s e^{i\frac{\pi}{2}u^2} du$$

gilt. Für die Punkte auf der Achse hinter der Brennlinie gilt also dieselbe Konstruktion wie oben, aber jetzt ausgeführt an dem oberen Zweig der Spirale in Fig. 2. Die beiden von O aus nach den Windungspunkten S und S' gezogenen Geraden bilden den Winkel $\pi/2$ miteinander, welcher die totale anomale Phasenänderung, den sogenannten Phasensprung beim Durchgang durch eine Brennlinie darstellt. Gegen unsere letzte Behauptung kann man den Einwand erheben, daß die zugrunde gelegte Darstellung ihrer Ableitung nach keine Gültigkeit mehr beanspruchen kann für Punkte in großer Entfernung vor oder hinter der Brennlinie. Man kann sich indessen leicht überzeugen, daß auch die Ausrechnung der strengen Formel (12) für großes ρ wieder auf (20) bzw. (23) zurückführt. (Vgl. die analoge Rechnung in § 4.)

Auch die Werte von \mathfrak{F}_z außerhalb der Achse kann man aus Fig. 2 entnehmen. Ersetzt man nämlich, jetzt bei beliebigem φ die Größe $\cos(\varphi - \varphi_0)$ durch ihre Entwicklung

$$(25) \quad \cos(\varphi - \varphi_0) = \cos \varphi + \varphi_0 \sin \varphi - \varphi_0^2 \frac{\cos \varphi}{2} + \dots,$$

so erhält man zunächst

$$(26) \quad \mathfrak{F}_z = \frac{e^{ik\rho \cos \varphi}}{\pi} \int_{-a}^{+a} e^{-i\frac{k\rho}{2} \cos \varphi (\varphi_0^2 - 2\varphi_0 \operatorname{tg} \varphi)} d\varphi_0,$$

oder nach Multiplikation und Division mit

$$e^{i\frac{k\rho}{2} \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

die Formel:

$$(26') \quad \mathfrak{B}_z = \frac{1}{\pi} e^{i k \rho \cos \varphi (1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi)} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-i \frac{k \rho}{2} \cos \varphi (\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi)^2} d\varphi_0.$$

Führt man hier noch die neue Variable v ein durch den Ansatz:

$$v = \sqrt{\frac{k \rho \cos \varphi}{\pi}} (\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi),$$

so kommt statt (26')

$$(27) \quad \mathfrak{B}_z = \frac{2 \alpha}{\pi} e^{i k \rho \cos \varphi (1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi)} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} e^{-i \frac{\pi}{2} v^2} dv,$$

wo

$$(28) \quad s_2 = \sqrt{\frac{k \rho \cos \varphi}{\pi}} (\alpha - \operatorname{tg} \varphi) \quad \text{und} \quad s_1 = -\sqrt{\frac{k \rho \cos \varphi}{\pi}} (\alpha + \operatorname{tg} \varphi).$$

Setzt man jetzt die Spirale fort, wie in Fig. 2 durch die gestrichelte Kurve angedeutet und rechnet die Bogenlängen stets vom Nullpunkt ausgehend positiv auf dem ausgezogenen und negativ auf dem gestrichelten Teil der Spirale, so werden den obigen zu irgend einem Werte von ρ gehörigen Bogenlängen s_1 und s_2 zwei Punkte z. B. Q_1 und Q_2 entsprechen. Abgesehen vom Faktor

$$\frac{2 \alpha}{\pi} e^{i k \rho \cos \varphi (1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi)}$$

ist dann \mathfrak{B}_z dargestellt durch $\overline{Q_1 Q_2} / \widehat{Q_1 Q_2}$ (in derselben Bezeichnungsweise, wie oben angewandt wurde), während die anomale Phasenänderung wieder gemessen wird durch den Winkel, den die Gerade $Q_1 Q_2$ mit der Verbindungslinie OS von Nullpunkt und Windungspunkt macht. Besonders einfach wird noch das Verhalten von \mathfrak{B}_z in der Ebene, die durch die Brennpunktlinie senkrecht zur Achse des Bündels geht. Hier ist $\varphi = \pi/2$ oder $3(\pi/2)$, so daß man in (25) statt $\cos(\varphi - \varphi_0)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \sin \varphi_0 = \varphi_0$$

oder

$$\cos\left(3 \frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = -\sin \varphi_0 = -\varphi_0$$

substituieren kann. Für $\varphi = \pi/2$ erhält man dann:

$$(29) \quad \mathfrak{P}_z = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i k \varrho \varphi_0} d\varphi_0 = \frac{2}{\pi k \varrho} \sin k \varrho \alpha.$$

und für $\varphi = 3\pi/2$ denselben Wert, da hier

$$\mathfrak{P}_z = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-i k \varrho \varphi_0} d\varphi_0 = \frac{2}{\pi k \varrho} \sin k \varrho \alpha.$$

Die Diskussion von (12) für große Werte von $k \varrho$ erfolgt in der üblichen Weise¹⁾ und ergibt dann, daß innerhalb der geometrischen Begrenzung des Bündels \mathfrak{P}_z unendlich klein wird wie $(k \varrho)^{-1/2}$, während außerhalb dieser Begrenzung \mathfrak{P}_z sich verhält wie $(k \varrho)^{-1}$. Im Unendlichen ist also tatsächlich die Erregung auf die vorgeschriebenen Bereiche beschränkt. Schließlich erübrigt es noch von \mathfrak{P}_z aus den Übergang zu den Feldstärken selbst zu machen; dieses geschieht sofort auf Grund der Formeln (8) und (8'). Betrachten wir z. B. Wellen polarisiert in der Einfallsebene ($\mathfrak{S}_z = 0$), so ist nach (8) \mathfrak{E}_z bis auf den Faktor k^2 identisch mit \mathfrak{P}_z , die besprochene Konstruktion liefert also zugleich mit \mathfrak{P}_z auch \mathfrak{E}_z . Weiterhin erhält man für \mathfrak{S}_ϱ die strenge Formel:

$$(30) \quad \mathfrak{S}_\varrho = \frac{i k}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathfrak{P}_z = \frac{k^2}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i k \varrho \cos(\varphi - \varphi_0)} \sin(\varphi - \varphi_0) d\varphi_0,$$

oder ausgewertet

$$(30') \quad \mathfrak{S}_\varrho = \frac{2 k}{\pi \varrho} e^{i k \varrho \cos \alpha \cos \varphi} \sin(k \varrho \sin \alpha \sin \varphi).$$

Für \mathfrak{S}_φ endlich folgt zunächst strenge:

$$(31) \quad \mathfrak{S}_\varphi = -i k \frac{\partial}{\partial \varrho} \mathfrak{P}_z = \frac{k^2}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i k \varrho \cos(\varphi - \varphi_0)} \cos(\varphi - \varphi_0) d\varphi_0,$$

1) Vgl. für die Methode den nächsten § 4 oder auch P. Debye, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 10. p. 745. 1908, sowie Physik. Zeitschr. 9. p. 777. 1905.

was aber für nicht zu große Öffnung des Bündels (α klein) ersetzt werden kann durch

$$(31) \quad \mathfrak{S}_\varphi = \frac{k^2}{\pi} \cos \varphi \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i k \rho \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi_0,$$

so daß demnach \mathfrak{S}_φ bis auf den Faktor $\cos \varphi$ mit \mathfrak{E}_z identisch ist.

Definieren wir noch die Intensität an einer beliebigen Stelle durch den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der elektrischen Amplitude, so können wir die Intensitätsverteilung in der Einfallsebene durch Anwendung der oben besprochenen Konstruktion finden. In dieser Weise wurden die Kurven 1, 2, 3 der nebenstehenden Fig. 3 gezeichnet¹⁾, welche in einem be-

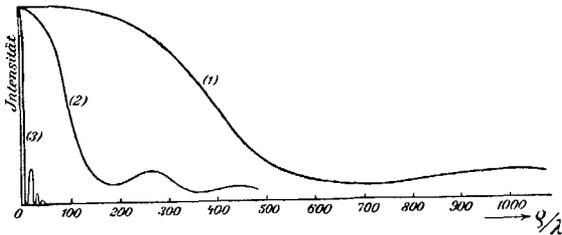


Fig. 3.

liebig gewählten Maßstab die Intensitäten auf den zu $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \pi/2$ gehörigen Radien darstellen für ein Bündel mit der Öffnung $2\alpha = 0,1$. Mit Hilfe derselben kann man sich nun leicht ein Bild von dem Aussehen des „Lichtgebirges“ in der Umgebung der Brennlinie machen.

Der zweite Fall von senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Wellen braucht keine weitere Diskussion, da nach (8') die zur Verwendung kommenden Formeln dieselben bleiben wie in eben besprochenem Fall. Auch kann man sich überzeugen, daß wenigstens für kleine Werte von α die durch $|\mathfrak{E}|^2$ definierte Intensitätsverteilung in beiden Fällen dieselbe ist.

1) Für die Cornusche Spirale wurde die Zeichnung benutzt aus R. W. Wood, Physical Optics, New-York 1905.

§ 4. Das räumliche Bündel.

Wir betrachten zunächst wieder irgend eine Komponente des Vektors \mathfrak{P} , z. B. \mathfrak{P}_x , welche dann durch (7') dargestellt wird und wollen zunächst diese Formel diskutieren für große Werte von $kr = 2\pi r/\lambda$. Wir führen dazu um die Richtung ϑ, ω , welche zum gerade betrachteten Aufpunkt gehört, neue Polarkoordinaten ϑ_1, ω_1 ein und können dann, wenn der Aufpunkt zunächst innerhalb der geometrischen Begrenzung des Bündels gedacht wird, die Integration (7) in zwei Teile zerlegen, so daß

$$(32) \quad \mathfrak{P}_x = \frac{ik}{2\pi} (J_1 + J_2).$$

Hierbei bedeutet J_1 das Integral $\int e^{ikr \cos \gamma} d\Omega$ erstreckt über ein Segment Öffnungswinkel $2(\alpha - \vartheta)$, dessen Mittellinie die Richtung ϑ, ω hat. (In Fig. 4 ist der Einfachheit halber $\omega = \pi/2$ angenommen worden), während J_2 über den Rest des nach der geometrischen Optik mit Licht erfüllten Kugelsegments zu erstrecken ist. Das erste Integral J_1 ist sofort ausgewertet, man erhält:

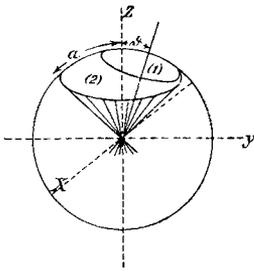


Fig. 4.

$$(33) \quad J_1 = 2\pi \int_0^{\alpha - \vartheta} e^{ikr \cos \vartheta_1} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 = \frac{2\pi}{ikr} (e^{ikr} - e^{ikr \cos(\alpha - \vartheta)}).$$

Das zweite Integral erfordert etwas mehr Überlegung; zunächst kann man schreiben:

$$(33') \quad J_2 = \int_{\vartheta_1 = \alpha - \vartheta}^{\vartheta_1 = \alpha + \vartheta} \int_{\omega_1 = -\omega_1^0}^{\omega_1 = +\omega_1^0} e^{ikr \cos \vartheta_1} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\omega_1,$$

wobei wir ω_1 von der Zeichenebene der Figur aus rechnen und ω_1^0 eine Funktion von ϑ_1 ist, die den Wert ω_1 angibt, gehörend zum Schnittpunkt der beiden Kreise $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta_1 = \text{const.}$ Bedenkt man noch, daß das Endresultat ganz von ω

unabhängig ist, so kann man zur Berechnung von ω_1^0 auch direkt den Fall der Fig. 4 zugrunde legen. Für den Kreis $\vartheta = \alpha$ gilt dann im neuen Koordinatensystem nach (6) die Formel:

$$\cos \alpha = \cos \vartheta_1 \cos(\alpha - \vartheta) + \sin \vartheta_1 \sin(\alpha - \vartheta) \cos \omega_1,$$

so daß wir das Azimut ω_1^0 des eben erwähnten Schnittpunktes finden aus der Formel:

$$(34) \quad \cos \omega_1^0 = \frac{\cos \alpha - \cos \vartheta_1 \cos(\alpha - \vartheta)}{\sin \vartheta_1 \sin(\alpha - \vartheta)}.$$

Statt (33') erhalten wir jetzt:

$$(35) \quad J_2 = 2 \int_{\vartheta_1 = \alpha - \vartheta}^{\vartheta_1 = \alpha + \vartheta} e^{i k r \cos \vartheta_1} \omega_1^0(\vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1$$

und hiervon wird die erste Näherung durch partielle Integration gefunden in der Form

$$(36) \quad J_2 = \frac{2}{-i k r} \left[\omega_1^0(\vartheta_1) e^{i k r \cos \vartheta_1} \right]_{\vartheta_1 = \alpha - \vartheta}^{\vartheta_1 = \alpha + \vartheta}$$

Nun ist, wie aus (34) folgt, oder auch sofort aus der Figur ersichtlich ist $\omega_1^0(\alpha - \vartheta) = \pi$ und $\omega_1^0(\alpha + \vartheta) = 0$, so daß

$$(36') \quad J_2 = \frac{2 \pi}{i k r} e^{i k r \cos(\alpha - \vartheta)}$$

und wir nach (32) für \mathfrak{F}_x erhalten

$$(37) \quad \mathfrak{F}_x = \frac{e^{i k r}}{r} \quad \text{für } 0 < \vartheta < \alpha,$$

wie es sein soll.

Liegt der Aufpunkt außerhalb der geometrischen Begrenzung des Bündels, so tritt in (32) nur das Integral J_2 auf. In diesem Falle ist indessen, wie aus der Fig. 4 ersichtlich, $\omega_1^0 = 0$, so daß man für J_2 in derselben Näherung wie in Formel (36) den Wert Null erhält. In großer Entfernung ist also die Erregung auf den vorgeschriebenen Bereich beschränkt. In scheinbarem Widerspruch mit (37) steht das aus (7') für

den Spezialfall $\vartheta = 0$ direkt für beliebige Werte von r folgende Resultat

$$(38) \quad \mathfrak{R}_x = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr \cos \alpha}}{r}.$$

Führt man indessen die Berechnung von J_2 um ein Glied weiter, wie in (36), so tritt in diesem Glied die Größe $d\omega_1^0/d\vartheta_1$ auf, welche um so größer wird (vgl. Fig. 4) je näher die nach dem Aufpunkt hingezogene Richtung mit der Achse $\vartheta = 0$ zusammenfällt. Für einen bestimmten Wert von kr kann also (37) nicht mehr als Näherung betrachtet werden in einem kleinen die Achse des Bündels umgebenden Winkelraum, dessen Öffnung übrigens um so kleiner wird, je größer kr ist. Für unendlich große Werte von kr ist also dennoch im Innern des Bündels überall (37) gültig, bis auf die eine singuläre Stelle $\vartheta = 0$. Befindet man sich hinter dem Brennpunkt auf der Achse, so ist $\vartheta = \pi$ und man erhält da hier $\gamma = \pi - \vartheta$ nach (7'):

$$(38') \quad \mathfrak{R}_x = - \left(\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{r} \right).$$

Für sehr große Werte von kr gilt analog und im selben Sinne wie (37)

$$(37') \quad \mathfrak{R}_x = - \frac{e^{-ikr}}{r} \quad \text{für} \quad \pi - \alpha < \vartheta < \pi.$$

Das auftretende Minuszeichen repräsentiert den „Phasensprung“ π .

Wir wollen jetzt noch einige Formeln angeben, die das Verhalten von \mathfrak{R}_x in der Umgebung des Brennpunktes charakterisieren. Dazu gehen wir von (7'') aus und integrieren zunächst nach ω_0 . Bekanntlich gilt die Formel:

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos u} du,$$

wenn $J(x)$ die gewöhnliche Besselsche Funktion nullter Ordnung bedeutet; statt (7'') können wir demnach auch schreiben:

$$(39) \quad \mathfrak{R}_x = i k \int_{\vartheta_0=0}^{\vartheta_0=\alpha} e^{ikr \cos \vartheta \cos \vartheta_0} J(kr \sin \vartheta \sin \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0.$$

Ein erster Weg zur Ausrechnung ergibt sich durch Reihenentwicklung der Besselschen Funktion; es ist nämlich

$$J(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \dots$$

durch Einsetzen dieser Reihe in (39) erhält man ohne weiteres die Näherungsformel

$$(40) \quad \mathfrak{R}_x = \frac{1}{r \cos \vartheta} \left\{ \Phi_1(\vartheta) - \frac{k^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{4} \Phi_2(\vartheta) + \dots \right\},$$

wobei $\Phi_1(\vartheta)$ und $\Phi_2(\vartheta)$ Abkürzungen sind für die Funktionen

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(\vartheta) = e^{i k r \cos \vartheta} - e^{i k r \cos \alpha \cos \vartheta}, \\ \Phi_2(\vartheta) = - e^{i k r \cos \vartheta} \left(\frac{2i}{k r \cos \vartheta} - \frac{2}{k^2 r^2 \cos^2 \vartheta} \right) \\ \quad + e^{i k r \cos \alpha \cos \vartheta} \left(\frac{2i}{k r \cos \alpha \cos \vartheta} - \frac{2}{k^2 r^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \vartheta} \right). \end{array} \right.$$

Ein zweiter Weg geht von der Entwicklung der Exponentialfunktion aus und liefert das Resultat:

$$(42) \quad \mathfrak{R}_x = i k \frac{e^{i k r \cos \vartheta}}{k^2 r^2 \sin^2 \vartheta} \left[\Psi_1(\vartheta) - i \frac{k r \cos \vartheta}{2} \Psi_2(\vartheta) + \dots \right],$$

wobei

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(\vartheta) = k r \alpha \sin \vartheta J_1(k r \alpha \sin \vartheta) \\ \text{und} \\ \Psi_2(\vartheta) = \frac{1}{k^2 r^2 \sin^2 \vartheta} [\{ (k r \alpha \sin \vartheta)^3 - 4 k r \alpha \sin \vartheta \} J_1(k r \alpha \sin \vartheta) \\ \quad + 2 (k r \alpha \sin \vartheta)^2 J(k r \alpha \sin \vartheta)] \end{array} \right.$$

wenigstens dann, wenn man in (39) mit Rücksicht auf die Kleinheit von α die Größen $\cos \vartheta_0$ bzw. $\sin \vartheta_0$ durch $1 - \vartheta_0^2/2$ bzw. ϑ_0 ersetzt. Die bei der Berechnung von Ψ_1 und Ψ_2 auftretenden Integrale mit Besselschen Funktionen lassen sich unter Benutzung der dieselben definierende Differentialgleichung leicht mittels partieller Integration bestimmen.

Die beiden Formeln (40) und (42) ergänzen sich gegenseitig, die erste ist empfehlenswert für Punkte, bei denen die Größe $k^2 r^2 \sin^2 \vartheta = k^2(x^2 + y^2)$ nicht zu groß ist, die zweite gilt für Punkte in der Umgebung der „Brennebene“ für die $k r \cos \vartheta = k z$ klein ist.

Es erübrigt jetzt noch den Übergang zu den Feldstärken zu machen; dieses geschieht auf Grund von (2) und (2') und zwar wird die Ausrechnung wohl am einfachsten, wenn man in x, y, z Koordinaten rechnet und bedenkt, daß der Exponent der Exponentialfunktion in (7') eine lineare Funktion dieser drei Koordinaten ist. Die Formeln (40) und (42) ergeben dann z. B. auf der Achse Erscheinungen analog zu denen auf der Achse des ebenen Bündels und in der Brennebene Beugungsringe, deren Intensitätsminima von der Intensität Null durch die Wurzeln der Besselschen Funktion definiert werden (vgl. (43)). Der Fall des natürlichen unpolarisierten Lichtes ergibt sich, wenn man den Vektor \mathfrak{B} Bewegungen nach allen Richtungen des Raumes beschreiben läßt, wobei diese Bewegungen langsam in bezug auf die Zeit einer Lichtschwingung und schnell in bezug auf die kleinsten möglichen Beobachtungszeiten erfolgen müssen.

§ 5. Verallgemeinerung für Bündel, welche nicht in einem einzelnen Punkt (bzw. einer einzelnen Linie) konvergieren.

Der z. B. bei nicht völlig korrigierten Linsen verwirklichte Fall solcher Bündel, welche geometrisch gesprochen in Brennflächen statt in einem Punkte konvergieren, kann auch durch Ausdrücke beschrieben werden, welche ganz analog wie (7) gebildet sind. Zur Erläuterung des Verfahrens möge noch der Wert von $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_s$ angegeben werden für ein ebenes Bündel, das in einer Brennlinie konvergiert, wobei der leichteren Übersicht wegen noch angenommen wird, daß letztere in bezug auf die Achse des Bündels symmetrisch ist. Die Form der Brennlinie wird aber sonst ganz beliebig gelassen. Für \mathfrak{B} gilt dann in größerer Entfernung vor der Brennlinie

$$(44) \quad \mathfrak{B} = \sqrt{\frac{2}{\pi k q'}} e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{i k (\varrho' + s)}$$

innerhalb des mit Licht erfüllten Winkelraumes. Hier bedeutet ϱ' den Abstand des gerade betrachteten Punktes vom zugehörigen, d. h. durch einen Lichtstrahl mit ihm verbundenen Punkte der Brennlinie, s ist die Bogenlänge der letzteren von ihrer auf der Achse gelegenen Spitze aus gemessen. Die Form

des Phasenfaktors¹⁾ $e^{i k (\rho' + s)}$ wird dadurch bedingt, daß die Linien $\rho' + s = \text{const.}$ als Evolventen der Brennnlinie die Linien konstanter Phase, d. h. im zweidimensionalen Fall die Wellenfläche bilden — alles natürlich vom Standpunkte der geometrischen Optik aus, den wir für unendlich entfernte Aufpunkte unbedenklich einnehmen dürfen.

In gleicher Weise wie in § 1 folgt jetzt für \mathfrak{B} die in der ganzen Ebene geltende Darstellung

$$(45) \quad \pi \mathfrak{B} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i k \rho' \cos(\varphi' - \varphi_0)} e^{i k s} d\varphi_0.$$

Die Größe φ_0 bedeutet hier den Winkel, den die Tangente in einem beliebigen Punkte der Brennnlinie mit der Achse macht, während ρ' und φ' Polarkoordinaten um diesen Punkt sind, wobei $\varphi' = 0$ die Parallele zur Achse des Bündels darstellt. Wegen des willkürlichen Zusammenhanges von s und φ_0 enthält unsere Formel noch eine völlig willkürliche Funktion, die einer beliebigen Form entweder der Brennnlinie oder der Wellenfläche in unendlicher Entfernung angepaßt werden kann. Daß überdies (45) eine strenge Lösung unserer Grundgleichung (1') darstellt, sieht man sofort, wenn man ρ' und φ' durch Cartesische Koordinaten um den jeweiligen Nullpunkt ersetzt, so daß

$$\rho' \cos(\varphi' - \varphi_0) = (x - \xi) \cos \varphi_0 + (y - \eta) \sin \varphi_0.$$

Die Größen ξ und η sind ebenso wie s Funktionen der Integrationsvariablen φ_0 ²⁾ und bedeuten die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes der Brennnlinie in einem festen Cartesischen Koordinatensystem x, y , dessen Nullpunkt mit der Spitze der Brennnlinie zusammenfallen mag. Die so statt (45) erhaltene Darstellung für \mathfrak{B} ist für die Diskussion am be-

1) Der Faktor $\sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i \frac{\pi}{4}}$ wurde nur hinzugefügt, um die Analogie mit den Formeln des § 1 ganz zu wahren; der Amplitudenfaktor $\rho^{-1/2}$ ist der für Zylinderwellen charakteristische.

2) Man kann ξ und η definieren durch die Formelu

$$\xi = \int_0^s \cos \varphi_0 ds \quad \text{und} \quad \eta = \int_0^s \sin \varphi_0 ds.$$

quemsten; sie gestattet wieder eine geometrische Interpretation mittels der Cornuschen Spirale, wenn noch die Größen $\xi(\varphi_0)$, $\eta(\varphi_0)$ und $s(\varphi_0)$ durch die ersten Glieder ihrer Entwicklungen nach φ_0 ersetzt werden.

Für räumliche Bündel erhält man eine zu (45) analoge Formel, welche indessen zwei beliebige Funktionen enthält und dementsprechend die Anpassung an vorgegebenen Brennpunkten gestattet. Weiteres zu den in diesem Paragraphen behandelten Fragen wird von anderer Seite näher ausgeführt werden.

München, Institut für theor. Physik.

(Eingegangen 9. Oktober 1909.)