**13. Die Beugung ebener Lichtwellen
bei beliebiger Lage der Einfallsebene gegenüber
der beugenden Kante;
von August Wiegrefe.**

Die hier in Angriff genommenen Probleme der mathematischen Beugungstheorie, die bei im Unendlichen gelegener Lichtquelle nur eine geradlinige beugende Kante enthalten, gehen in der Hauptsache dadurch über den augenblicklichen Stand der Theorie hinaus, daß in ihnen die Lage der Einfallsebene nicht mehr beschränkenden Bedingungen unterworfen ist. In allen bisherigen Arbeiten ist die Einfallsebene — soweit ebene Wellen in Frage kommen — senkrecht zur beugenden Kante angenommen. Für die bislang theoretisch allein behandelten geradlinigen Kanten ist das meines Wissens auch experimentell der einzig untersuchte Fall.

Für mich lag der Anlaß, meinerseits die Lage der Einfallsebene als beliebig vorauszusetzen, vor allem in methodischen Gesichtspunkten. Es mußte interessieren, inwieweit die elegante Carslaw-Sommerfeldsche Methode, neue Lösungen der Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ durch komplexe Integrale über bekannte Grundlösungen zu erhalten, zu brauchbaren Ergebnissen führt. Von den zahlreichen unter diesem Gesichtspunkte behandelten Fragen ließ sich eine Reihe von Problemen mit beliebiger Lage der Einfallsebene leicht erledigen: Vor allem die Beugung ebener Wellen durch eine alles reflektierende Halbebene, dann auch der entsprechende Fall für die schwarze und die absolut schwarze Halbebene, ferner für den Fresnelschen Doppelspiegel bei beliebiger Spiegelöffnung, und schließlich auch für einen Keil aus einer alles reflektierenden und einer schwarzen Halbebene. Von diesen Problemen braucht nur eins ausführlich behandelt zu werden, da sich dann die übrigen leicht durch einfache Verallgemeinerungen oder als Spezialfälle gewinnen lassen; wir wählen hier zur genaueren

Betrachtung als in gewisser Weise einfachstes Problem das der alles reflektierenden Halbebene.

§ 1. Koordinaten und Bedingungen.

Wir legen die beugende Kante der Halbebene mit unendlicher Leitfähigkeit in die z -Achse eines rechtwinkligen, rechtshändigen Systems, dessen positive z -Achse in die Ebene des Schirmes falle, so daß die y -Achse zur Normalen des Schirmes wird. Daneben führen wir noch räumliche Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$x = r \sin \psi \cos \varphi$; $y = r \sin \psi \sin \varphi$; $z = r \cos \psi$
 ein, wo $0 < \psi < \pi$ ist.

Charakterisieren wir das umgebende Medium durch die Konstante¹⁾

$$k = \sqrt{\varepsilon \mu} \cdot \frac{2\pi}{c \cdot \tau},$$

so haben wir bei einfarbigem Lichte von der Periode τ und stationärem Zustande für die komplexen Feldstärken $\mathcal{E}'$ und $\mathcal{H}'$ mit den Komponenten $X' Y' Z'$ und $A' B' C'$ die Differentialgleichungen zu erfüllen:

$$\Delta \mathcal{E}' + k^2 \mathcal{E}' = 0; \quad \text{div } \mathcal{E}' = 0; \quad \Delta \mathcal{H}' + k^2 \mathcal{H}' = 0; \quad \text{div } \mathcal{H}' = 0.$$

Das einfallende Licht soll in bekannter Weise aus ebenen, homogenen Wellen¹⁾ bestehen, deren Einfallsebene beliebig zur beugenden Kante der alles reflektierenden Halbebene liegt. Die Einfallsrichtung läßt sich durch $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ eindeutig festlegen, wobei φ_0 und ψ_0 in derselben Weise gerechnet werden sollen wie φ und ψ .

Da das zu behandelnde Problem durch die Einführung der beliebigen Lage der Einfallsebene dreidimensional ist, betrachten wir wie beim Fresnelschen Doppelspiegel mit einer punktförmigen Lichtquelle²⁾ zwei einfachere Fälle an Stelle des allgemeinen Polarisationszustandes:

a) $Y' = 0$. Alsdann führt

$$\begin{aligned} X' &= \frac{\partial u}{\partial x}; & Z' &= -\frac{\partial u}{\partial z}; \\ A' &= i \frac{c \cdot \tau}{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; & B' &= -i \frac{c \cdot \tau}{2\pi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ C' &= i \frac{c \cdot \tau}{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \end{aligned}$$

1) Vgl. z. B. A. Sommerfeld, Ann. Math. 47. p. 317–374. 1896.

2) A. Wiegrefe, Dissertation, Über einige mehrwertige Lösungen der Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und ihre Anwendung in der Beugungs-

das räumliche Wellenpotential u ein, das der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen muß.

b) $B' = 0$, was die Annahme

$$A' = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad C' = -\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$X' = -i \frac{c \cdot r}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad Y' = i \frac{c \cdot r}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right);$$

$$Z' = -i \frac{c \cdot r}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

hervorrufen, wo wieder alle Differentialgleichungen für $X' Y' Z' A' B' C'$ erfüllt sind, wenn u dieselbe Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ befriedigt.

Für u gelten nun insgesamt die folgenden Bedingungen:

1. u erfüllt bis auf die beugende Kante die Wellengleichung.

2. u und seine ersten und zweiten Differentialquotienten nach $x y z$ müssen überall bis auf die beugende Kante stetig sein und außerdem endlich, auch für $r = \infty$, da die Lichtquelle im Unendlichen liegen soll.

3. Für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ (d. h. auf dem alles reflektierenden Schirm) müssen die elektrischen Komponenten parallel dem Schirm verschwinden; also muß im Falle a) bzw. b) für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ gelten:

$$u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Für ein anderes φ dürfen diese Bedingungen nicht erfüllt sein.

4. Schließlich muß u samt seinen ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten nach x, y und z wegen des Vorhandenseins der einen beugenden Kante auf einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche eindeutig sein und daselbst solche Schattenwirkungen liefern, die den Gesetzen der geometrischen Optik nicht widersprechen. Sie müssen offenbar allein und ebenso von φ_0 abhängen wie im Spezialfalle $\psi_0 = \pi/2$.

§ 2. Aufstellung der Lösungen in Form komplexer Integrale.

Nach der Carslaw-Sommerfeldschen Methode geht man zur Gewinnung mehrwertiger Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$

theorie, Göttingen 1912, p. 52 (im folgenden als Diss. zitiert); oder A. Wiegrefe, Ann. d. Phys. 39. p. 459. 1912.

von den entsprechenden einwertigen Lösungen aus. Letztere ergeben sich dadurch, daß man sich aus dem betreffenden Problem die beugende Kante fortdenkt, also in unserem Falle ebene Wellen mit der Einfallsrichtung $\varphi_0 \psi_0$ in einem unendlich ausgedehnten Medium mit der Konstanten k betrachtet:

$$u_1 = e^{i k r [\sin \psi_0 \sin \psi \cos (\varphi - \varphi_0) + \cos \psi_0 \cos \psi]}.$$

Diese Grundlösung ist in ein komplexes Integral zu verwandeln unter dem Gesichtspunkte, daß die gesuchte mehrwertige Lösung in φ die Periode 4π haben muß, während sich die Verhältnisse für ψ nicht ändern dürfen. Eine derartige Mehrwertigkeit läßt sich an folgender Funktion anbringen:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0} e^{i k r [\sin \psi_0 \sin \psi \cos (\varphi - \alpha) + \cos \psi_0 \cos \psi]} \frac{d\alpha}{1 - e^{i(\alpha - \varphi_0)}}.$$

Gegenüber der ursprünglichen Form ist hierin zunächst für φ_0 die Integrationsvariable α gesetzt und dann φ_0 so mit α verbunden, daß φ_0 vorerst die Periode 2π behält und das ganze Integral dabei die Grundlösung darstellt. Logischer wäre es noch, φ auf gleiche Weise durch α zu ersetzen. Man kann in der Tat so verfahren; wir haben hier obige Form gewählt, um später direkter die Resultate der vorhandenen Arbeiten verwerten zu können.

Um aus diesem u_1 die gewünschte zweiwertige Funktion zu erhalten, müssen wir zunächst den geschlossenen Integrationsweg in einen nicht geschlossenen deformieren. Da nun die Exponentialfunktion unter dem Integral bei positivem Imaginärteil von $\sin \psi_0 \sin \psi \cos (\varphi - \alpha) + \cos \psi_0 \cos \psi$ stets endlich bleibt, für $\alpha = \infty$ wie für $r = \infty$ sogar stark gegen Null konvergiert, bei negativem Imaginärteil dagegen sowohl für $\alpha = \infty$ wie für $r = \infty$ unendlich groß wird, dürfen wir den Integrationsweg nur so verwandeln, daß er sich überall auf Gebiete mit der ersten Eigenschaft, „schraffierte Gebiete“, deformieren läßt, so daß besonders die Endpunkte auf schraffiertes Gebiet gelegt werden müssen. Diese Endpunkte werden wir außerdem zweckmäßig ins Unendliche der α -Ebene verschieben, da ihre Lage mit den von φ abhängigen schraffierten Gebieten wechselt, also auch von φ abhängen wird. Bei dieser Wahl der Endpunkte brauchen wir nämlich wegen des Verschwindens der Exponentialfunktion für $\alpha = \infty$ die eben genannte Abhängig-

keit von φ bei Differentiationen von u_1 nach x und y nicht zu berücksichtigen.

Das Vorzeichen des Imaginärteils von $\sin \psi_0 \sin \psi \cos(\varphi - \alpha) + \cos \psi_0 \cos \psi$ hängt nun nur von $\cos(\varphi - \alpha)$ ab, da $\cos \psi_0 \cos \psi$ reell und $\sin \psi_0 \sin \psi$ reell und überdies positiv ist. Daher haben wir hier ganz dieselben schraffierten Gebiete wie bei senkrechter Lage der Einfallsebene zur beugenden Kante. Wir erreichen also alle oben ausgesprochenen Anforderungen in bezug auf den Integrationsweg leicht, wenn wir ihn in die

Fig. 1.

bekannten Wege $V + W^1$) verwandeln (Fig. 1), wo V bzw. W von $\pm \omega + \varphi$ bis $\pm \omega \pm 2\pi$ geht, ohne die reelle Achse zu schneiden, während für ω gilt:

$$-\pi < \Re(\omega) < 0 \quad \text{und} \quad \Im(\omega) = +\infty > 0.$$

Aus diesem u_1 erhalten wir eine in der gewünschten Weise zweiwertige Funktion, indem wir im Nenner des Integranden statt $\alpha - \varphi_0$ einfach $(\alpha - \varphi_0)/2$ schreiben:

$$u_{(2)} = \frac{1}{2\pi \cdot 2} \int_{V+W} \frac{d\alpha}{1 - e^{\frac{i}{2}(\alpha - \varphi_0)}} e^{ikr [\sin \psi_0 \sin \psi \cos(\varphi - \alpha) + \cos \psi_0 \cos \psi]}.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist hinzugefügt, um noch

$$e^{ikr [\sin \psi_0 \sin \psi \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \psi_0 \cos \psi]}$$

als Residuum zu behalten. Wir behaupten nun, daß wir in

1) Diss. p. 16.

$$\begin{aligned}
 u_{(2)}(+\varphi) \mp u_{(2)}(-\varphi) &= \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{4\pi} \int_{V+W} \frac{d\alpha}{1 - e^{\frac{i}{2}(\alpha - \varphi_0)}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos(\alpha - \varphi)} \\
 &\mp \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{4\pi} \int_{V_-+W_-} \frac{d\alpha}{1 - e^{\frac{i}{2}(\alpha - \varphi_0)}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos(\alpha - \varphi)}
 \end{aligned}$$

die Lösung des Problems der alles reflektierenden Halbebene bei beliebiger Lage der Einfallsebene vor uns haben. V_- und W_- in $u_{(2)}(-\varphi)$ entstehen wie schon in früheren Fällen aus V und W durch Vertauschung von φ mit $-\varphi$, was geschehen muß, um die Integrationswege bei verändertem φ auf den damit auch geänderten schraffierten Bereichen zu halten.¹⁾

Der Nachweis, daß $u_{(2)}(+\varphi) \mp u_{(2)}(-\varphi)$ alle vier Bedingungen unseres Problems erfüllt, ist nun leicht erbracht:

1. Die aufgestellte Funktion ist eine Lösung der Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, da die Differentiation nur unter dem Integralzeichen vorgenommen zu werden braucht.

2. Die Wahl der Integrationswege sichert uns Stetigkeit und Endlichkeit außer in der beugenden Kante $r \sin \psi = 0$ und mit Ausnahme des Spezialfalles $\sin \psi_0 = 0$. Über letzteren siehe § 5. Für $r = +\infty$ speziell bleiben nur Residuen übrig, die $u_1(+\varphi) \mp u_1(-\varphi)$ liefern, von denen $u_1(+\varphi)$ für $-\pi + \varphi_0 < \varphi < +\pi + \varphi_0$ und $u_1(-\varphi)$ für $-\pi - \varphi_0 < \varphi < +\pi - \varphi_0$ gebraucht werden muß.

3. Unter der sofort zu beweisenden Annahme, daß die Funktionen unter den Integralen in φ die Periode 4π haben, ist dargetan, daß für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ — allgemein für $\varphi = 2h\pi$ — die Integrationswege V und V_- bzw. W und W_- identisch oder äquivalent werden. Das gilt dagegen nicht mehr für $\varphi = \pi$ oder irgend ein anderes φ . Außerdem werden aber für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2h\pi$ auch die Integrationselemente von $u(+\varphi)$ und $u(-\varphi)$ einander gleich, so daß zunächst der Fall a) erledigt ist. Da nun weiter $\frac{\partial u_1(+\varphi)}{\partial y} = -\frac{\partial u_1(-\varphi)}{\partial y}$ ist, so ist auch die Grenzbedingung im Falle b) erfüllt.

4. Durch die Substitution $\alpha - \varphi = \alpha'$ bzw. $\alpha + \varphi = \alpha''$

1) Diss. p. 47.

in $u_{(2)}(+\varphi)$ bzw. $u_{(2)}(-\varphi)$ erkennt man sofort die Richtigkeit der Behauptung, daß unsere Lösung in φ die Periode 4π besitzt. Das gleiche gilt daher auch für die Differentialquotienten von $u_{(2)}$. Die Schattenwirkungen sind schließlich dieselben wie im Spezialfalle $\psi_0 = \pi/2$, da sie nur von der Lage der Pole der Integrationselemente zu den Integrationswegen abhängen¹⁾ und beide durch die Einführung von $\cos \psi_0 \neq 0$ nicht berührt werden.

Zum Schluß setzen wir unsere Lösung noch in einer Form mit von φ unabhängigem, festem Integrationsweg ω bis $\omega + 2\pi$ hierher²⁾

$$\begin{aligned} & u_{(2)}(+\varphi) \mp u_{(2)}(-\varphi) \\ &= \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2\pi \cdot 2i} \int_{(\omega)}^{\omega+2\pi} \frac{\sin \frac{\zeta}{2} d\zeta}{\cos \frac{\zeta}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos \zeta} \\ & \mp \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2\pi \cdot 2i} \int_{(\omega)}^{\omega+2\pi} \frac{\sin \frac{\zeta}{2} d\zeta}{\cos \frac{\zeta}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos \zeta}. \end{aligned}$$

§ 3. Die Lösungen einiger weiterer Beugungsprobleme bei beliebiger Lage der Einfallsebene.

Aus der soeben gewonnenen Lösung für die Beugung um die alles reflektierende Halbebene lassen sich nun die Lösungen schon für den Spezialfall $\psi_0 = \pi/2$ behandelter Probleme ohne weiteres hinschreiben. So erhalten wir in bekannter Weise für die schwarze Halbebene:³⁾

$$u_{(n)} = \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2\pi n} \int_{V+W} \frac{d\alpha}{1 - e^{\frac{i}{n}(\alpha - \varphi_0)}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos(\alpha - \varphi)},$$

speziell für die absolut schwarze Halbebene:⁴⁾

$$u_{(\infty)} = - \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2\pi i} \int_{V+W} \frac{d\alpha}{\alpha - \varphi_0} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos(\alpha - \varphi)},$$

1) Diss. p. 21.

2) A. Sommerfeld, l. c. p. 343.

3) W. Voigt, *Komp. der theor. Phys.* II, p. 768, od. A. Wiegrefe, *Diss.* p. 13 u. 16.

4) Diss. p. 47 oder *Ann. d. Phys.* 39. p. 457. 1912.

ferner für einen Keil aus zwei alles reflektierenden Halbebenen von der beliebigen Winkelöffnung χ :¹⁾

$$\begin{aligned}
 & u_{\left(\frac{\chi}{\pi}\right)}(+\varphi) \mp u_{\left(\frac{\chi}{\pi}\right)}(-\varphi) \\
 &= \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2i\chi} \int_{(\omega)}^{(\omega+2\pi)} \frac{\sin \frac{\pi \zeta}{\chi} d\zeta}{\cos \frac{\pi \zeta}{\chi} - \cos \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0)} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos \zeta} \\
 &\mp \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2i\chi} \int_{(\omega)}^{(\omega+2\pi)} \frac{\sin \frac{\pi \zeta}{\chi} d\zeta}{\cos \frac{\pi \zeta}{\chi} - \cos \frac{\pi}{\chi}(\varphi + \varphi_0)} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos \zeta},
 \end{aligned}$$

oder in anderer Form:

$$\begin{aligned}
 & u_{\left(\frac{\chi}{\pi}\right)}(+\varphi) \mp u_{\left(\frac{\chi}{\pi}\right)}(-\varphi) \\
 &= \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2\chi} \int_{V+W} \frac{d\alpha}{1 - e^{\frac{i\pi}{\chi}(\alpha - \varphi_0)}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos(\alpha - \varphi)} \\
 &\mp \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2\chi} \int_{V+W} \frac{d\alpha}{1 - e^{\frac{i\pi}{\chi}(\alpha - \varphi_0)}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos(\alpha + \varphi)}.
 \end{aligned}$$

Schließlich läßt sich auch das bisher noch nicht im Spezialfall $\psi_0 = \pi/2$ gelöste Problem der Beugung durch einen Keil aus einer alles reflektierenden und einer schwarzen Halbebene erledigen:

$$\begin{aligned}
 & u_{(2n)}(+\varphi) \mp u_{(2n)}(-\varphi) \\
 &= \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2\pi \cdot 2n} \int_{V+W} \frac{d\alpha}{1 - e^{\frac{i}{2n}(\alpha - \varphi_0)}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos(\alpha - \varphi)} \\
 &\mp \frac{e^{ikr \cos \psi_0 \cos \psi}}{2\pi \cdot 2n} \int_{V+W} \frac{d\alpha}{1 - e^{\frac{i}{2n}(\alpha - \varphi_0)}} e^{ikr \sin \psi_0 \sin \psi \cos(\alpha + \varphi)}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist die alles reflektierende Halbebene nach $\varphi = 0$ gelegt, so daß $u = 0$ bzw. $\partial u / \partial y = 0$ im physikalischen Blatte allein für $\varphi = 0$ gilt, im angehängten Riemannschen Raume außerdem noch für $\varphi = \pm 2n\pi$. Der schwarze Schirm, der auch nicht eben zu sein braucht²⁾, kann beliebig gewählt werden.

1) Diss. p. 49 oder Ann. d. Phys. **39**. p. 458. 1912.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1899. p. 4.

n kann auch den Wert ∞ annehmen, was auf einen Keil aus einer alles reflektierenden und einer absolut schwarzen Halbebene hinführt.

§ 4. Umsetzung der komplexen Integrale in Annäherungen und Diskussion der Lösungen.

Für die Behandlung der erhaltenen komplexen Integrale ist es natürlich in allen Fällen von großem Vorteile, daß sich die Integrationsvariablen in den Integralen in ganz derselben Weise vorfinden wie im Spezialfalle $\psi_0 = \pi/2$. Der Faktor $e^{i k r \cos \psi \cos \psi_0}$ kommt ja für die Integration gar nicht in Frage und im Integrale steht nur an Stelle der Konstanten $k r$ der für die Integration auch als konstant zu behandelnde Ausdruck $k r \sin \psi \sin \psi_0$. Wir können somit alle früheren Annäherungen¹⁾ einfach übertragen, wenn wir in ihnen nur $k r \sin \psi \sin \psi_0$ für $k r$ schreiben und den Faktor $e^{i k r \cos \psi_0 \cos \psi}$ hinzufügen. Es ist daher bloß noch zu überlegen, wie sich dadurch, d. h. natürlich nur durch $k r \sin \psi \sin \psi_0$ statt $k r$, der Gültigkeitsbereich der drei Arten¹⁾ von Annäherungen, die wir stets aufstellten, ändert:

1. Die in der unmittelbaren Umgebung der beugenden Kante $r = 0$ verwendbaren, aber überall konvergierenden Reihen mit Besselschen Funktionen²⁾ waren Potenzreihen mit $k r$ als Reihenvariablen. Durch die Einführung von $k r \sin \psi_0 \sin \psi$ wird natürlich zunächst die beugende Kante durch $r \sin \psi = 0$ definiert statt durch $r = 0$. Der Faktor $\sin \psi_0$ wirkt dann auf eine Vergrößerung des Gültigkeitsbereichs dieser Annäherungen hin für alle $\psi_0 \geq \pi/2$. Den Spezialfall $\psi_0 = 0$ bzw. π , in dem alle Glieder bis auf das erste zu Null werden, wollen wir nachher noch besonders besprechen.

2. Für die direkte Umgebung der Schattengrenzen hat Hr. Sommerfeld im Falle des alles reflektierenden Schirms einen überall gültigen Ausdruck aufgestellt³⁾, der natürlich

1) A. Sommerfeld, Ann. Math. 47. p. 346, 359, 360—361. 1896; A. Wiegrefe, Diss. p. 17, 18, 24, 25, 30, 56, 57—59, 61 od. Ann. d. Phys. 39. p. 451, 462, 463—465, 466. 1912.

2) A. Sommerfeld, l. c. p. 346; A. Wiegrefe, Diss. p. 18, 56; Ann. d. Phys. l. c. p. 462.

3) A. Sommerfeld, l. c. p. 359; A. Wiegrefe, Diss. p. 17.

auch bei den hier eintretenden Änderungen seine Allgemeingültigkeit behält. Für den absolut schwarzen Schirm kommt eine in der ganzen Riemannschen Fläche konvergierende unendliche Integralreihe¹⁾ in Betracht, deren erstes Glied in der direkten, noch nicht genau umgrenzbaren Umgebung²⁾ der Schattengrenzen allein mit einer beliebigen Genauigkeit gebraucht werden kann. Da sich in dieser Reihe $k\tau$ hauptsächlich in der oberen Grenze von Integralen der Form

$$-V\sqrt{\frac{k\tau}{2}}|P| \int_{-\infty}^{-i\tau^2} \frac{e^{-t^2}}{t^h} dt$$

befindet, wo $P = \varphi - \varphi_0 - \pi$ bzw. $= \varphi - \varphi_0 + \pi$ den Winkelabstand von den Schattengrenzen $\varphi = \varphi_0 \pm \pi$ angibt und $h = 0, 2, 4 \dots$ ist, so kann P um so größer werden, je kleiner $\sin \psi_0$ in $k\tau \sin \psi \sin \psi_0$ ist, da es bei Gebrauch nur des ersten Gliedes im wesentlichen darauf ankommt, daß diese Integrale möglichst klein sind. Der Gültigkeitsbereich dieser Annäherungen vergrößert sich also. Und das um so mehr, als auch noch vor allen Integralen mit Ausnahme des ersten der Faktor $(k\tau \sin \psi_0 \sin \psi)^h$ zu stehen kommt, wo $h \geq 1$ ist. Im Falle $\sin \psi_0 = 0$ bleibt daher sogar nur das erste Glied übrig. Darauf kommen wir später noch zu sprechen.

Ganz ähnlich liegen nun die Verhältnisse für beliebiges n und für den Keil mit $n = \chi/\pi$. Auch hier ergibt sich eine Vergrößerung des Gültigkeitsbereichs der durch das erste Glied einer semikonvergenten Integralreihe dargestellten Annäherung³⁾ für die Umgebung der Schattengrenzen. Wie aber schon die Reihe selbst nicht mehr auf der ganzen Riemannschen Fläche gilt, fallen auch nicht für $\psi_0 = 0$ oder π alle Glieder der Reihe bis auf das erste fort, da hier auch die höheren Reihenglieder teilweise nicht den Faktor $k\tau \sin \psi_0 \sin \psi$ haben. Den Fall des Keils aus einer alles reflektierenden und einer schwarzen Halbebene haben wir natürlich in den obigen Auseinandersetzungen gleich mit erledigt.

1) Diss. p. 30; Ann. d. Phys., l. c. p. 451.

2) Diss. p. 33.

3) Diss. p. 57—59; Ann. d. Phys., l. c. p. 463—465.

3. In bestimmter, aber auch noch nicht formelmäßig festgelegter Entfernung von der beugenden Kante und den Schattengrenzen¹⁾ genügt in allen Problemen zur Darstellung der Lösungen das erste Glied einer semikonvergenten Reihe²⁾ nach Potenzen von $1/k r$, also in unserem Falle nach $1/k r \sin \psi \sin \psi_0$. Hier wird mithin das Gebiet vergrößert, in dem diese Annäherung nicht mehr gilt; im Falle $\sin \psi_0 = 0$ ist sogar die ganze Reihe unbrauchbar.

Sehen wir daher noch von dem Falle $\sin \psi_0 = 0$ ab, so können wir alles in allem auch in unseren verallgemeinerten Problemen in allen wichtigen Gebieten brauchbare Annäherungen verwenden.

Was nun die Änderung der Erscheinung durch die Einführung der beliebigen Lage der Einfallsebene angeht, so hängt auch sie wieder von dem Faktor $e^{i k r \cos \psi_0 \cos \psi} = e^{i k z \cos \psi_0}$ und von $k r \sin \psi \sin \psi_0$ ab. Der Faktor vor dem Integral veranlaßt die Entstehung eines periodischen Zustandes in der Richtung der beugenden Kante mit der Periode $z = \frac{2\pi}{k \cos \psi_0} = \frac{\lambda}{\cos \psi_0}$, die für $\sin \psi_0 = 0$ den Wert $\pm \lambda$ annimmt. Für $\psi_0 = \pi/2$ waren die Ebenen senkrecht zur z -Achse gleichwertig. Die Anwesenheit von $k r \sin \psi_0 \sin \psi$ in unseren Funktionen an Stelle von $k r$ weist auf eine Verzerrung des ganzen Bildes im Falle $\psi_0 = \pi/2$ hin. Bezeichnet l das stets positiv gerechnete Lot auf der z -Achse nach irgend einer Richtung hin, so steht jetzt $l \sin \psi_0$ für l , denn für $\psi_0 = \pi/2$ stellt r weiter nichts dar als das Lot l . Daher ist die Verzerrung eine Vergrößerung proportional mit $\sin \psi_0$.

Nun bestand die Erscheinung für $\psi_0 = \pi/2$ in der Hauptsache stets aus einer gedämpften Zylinderwelle $\sqrt{\frac{\lambda}{r}} e^{-i k r}$ neben der einfallenden ebenen Welle $e^{i k r \cos (\varphi - \varphi_0)}$. Die Achse des Zylinders war die beugende Kante. Statt dessen erhalten wir jetzt in allen Gebieten außerhalb der direkten Umgebung der

1) Diss. p. 26.

2) A. Sommerfeld, l. c. p. 360–361; A. Wiegrefe, Diss. p. 18, 24, 25, 56; Ann. d. Phys., l. c. p. 451, 462.

Schattengrenzen und der beugenden Kante neben der einfallenden Welle $e^{ikr[\sin\psi\sin\psi_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\cos\psi\cos\psi_0]}$ eine gedämpfte Welle

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\lambda}{r\sin\psi\sin\psi_0}} e^{+ikr\cos\psi\cos\psi_0} \cdot e^{-ikr\sin\psi\sin\psi_0} \\ = \sqrt{\frac{\lambda}{l\sin\psi_0}} e^{ikr\cos(\psi+\psi_0)} \end{aligned}$$

Die Dämpfung ist also eine geringere geworden, und zwar um so mehr, je näher $\sin\psi_0$ an Null liegt. Sodann erhalten wir wegen

$$r\cos(\psi+\psi_0) = z\cos\psi_0 - l\sin\psi_0$$

an Stelle der Zylinderwellen Kegelwellen mit der Spitze auf der z -Achse, die zugleich Kegelachse ist. In der z - l -Halbebene sind ja die Kurven gleicher Phase Gerade mit dem Richtungswinkel $\pi/2 - \psi_0$ für $\psi_0 < \pi/2$ bzw. $3\pi/2 - \psi_0$ für $\psi_0 > \pi/2$ (Fig. 2). Für $\psi_0 = \pi/2$ ist die Spitze des Kegels unendlich

Fig. 2.

weit entfernt und die Geraden gehen in Parallelen zur z -Achse über. Für $\psi_0 = 0$ oder π würde die ebene Kegelöffnung zu π , falls für diesen Fall die obige Formel noch Gültigkeit hätte. Die Geraden würden dann senkrecht zur beugenden Kante stehen. Aber auch bei beliebigem ψ_0 haben wir die obige Formel und damit die Fig. 2 noch einer Einschränkung zu unterwerfen; beide gelten nur in einem Abstände von der beugenden Kante, in deren Nähe noch andere Glieder Einfluß gewinnen. Dem ist in der Figur durch die gestrichelten

Parallelen zur z -Achse Rechnung getragen, zwischen denen die Zylinderwellen nicht mehr angenommen werden dürfen. Die Fortschrittingsrichtung der Wellen ist stets von der beugenden Kante abgekehrt.

§ 5. Streifender Einfall ebener Wellen in Beugungsproblemen.

Bislang hatten wir allein den Fall $\sin \psi_0 = 0$ aus unseren Betrachtungen ausschließen müssen. Wir wollen zeigen, daß wir auch ihn durch reelle Ausdrücke beherrschen. Setzt man etwa gleich im allgemeinsten Probleme, dem des Keils aus zwei alles reflektierenden Halbebenen, $\sin \psi_0 = 0$ ein, so erhält man:

$$u\left(\frac{\chi}{\pi}\right)(+\varphi) \mp u\left(\frac{\chi}{\pi}\right)(-\varphi) = \frac{e^{(\pm)ikr \cos \psi}}{2i\chi} \int_{(\omega)}^{(\omega+2\pi)} \frac{\sin \frac{\pi}{\chi} \zeta}{\cos \frac{\pi}{\chi} \zeta - \cos \frac{\pi}{\chi} (\varphi - \varphi_0)} d\zeta \\ \mp \frac{e^{(\pm)ikr \cos \psi}}{2i\chi} \int_{(\omega)}^{(\omega+2\pi)} \frac{\sin \frac{\pi}{\chi} \zeta}{\cos \frac{\pi}{\chi} \zeta - \cos \frac{\pi}{\chi} (\varphi + \varphi_0)} d\zeta.$$

Es stehen also unter den Integralen jetzt nur eindeutige Funktionen der Integrationsvariablen, so daß die Einteilung der ζ -Ebene in schraffierte und nichtschraffierte Gebiete überflüssig wird. Die Integrale selbst liefern so lediglich Residuen und zwar für jeden Pol $\zeta = \varphi \mp \varphi_0 + 2j\chi$, wo $j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, je ein Residuum $2i\chi$, wie man leicht an der Form der Integrale mit den Integrationswegen $V_{\pm} + W_{\pm}$ bestätigt, wenn man in die Geraden $\alpha = \pm \pi + \varphi \mp \varphi_0 + ia$ und die Schleife um den Pol φ_0 transformiert. Das Wellenpotential stellt sich also als eine Summe von Residuen dar:

$$\left[u\left(\frac{\chi}{\pi}\right)(+\varphi) \mp u\left(\frac{\chi}{\pi}\right)(-\varphi) \right]_{\sin \psi_0 = 0} = \left(\sum e^{ikz} \right) \mp \left(\sum e^{ikz} \right).$$

Ihre Anzahl richtet sich nach dem jeweiligen Werte von χ und ist bei irrationalem π/χ unendlich groß. Die Klammern um die Summen sollen andeuten, daß diese Residua nicht ohne weiteres in dieselben Gebieten fallen, also z. B.

nicht etwa im Falle a) stets Null erscheint. Die Gebiete für die einzelnen Residuen sind dieselben wie im Falle $\psi_0 = \pi/2$,¹⁾ also für $u(+\varphi)$ bzw. $u(-\varphi)$: $-\pi + \varphi_0 + 2j\chi < \varphi < +\pi + \varphi_0 + 2j\chi$ bzw. $-\pi - \varphi_0 + 2j\chi < \varphi < +\pi - \varphi_0 + 2j\chi$. Nun kann im Falle $\sin \psi_0 = 0$ die Richtung φ_0 noch beliebig gewählt werden. Und offenbar wird es für die Schattenverhältnisse z. B., die sich ja nach der Verteilung der Residuen richten, nicht gleichgültig sein, in welcher Ebene $\varphi_0 = \text{konst.}$ wir in die beugende Kante $\sin \psi_0 = 0$ hineingehen, da sich doch die Schirme in der Richtung der beugenden Kante nach Unendlich ausdehnen.

Stets aber ergibt sich nach obigem vor allem, daß das Wellenpotential, und damit auch die elektrischen und magnetischen Kraftkomponenten keine Beugungserscheinungen aufweisen. Das gilt, wie leicht zu überschauen, auch für die alles reflektierende und die schwarze Halbebene, wie auch für den Keil aus einer alles reflektierenden und einer schwarzen Halbebene.

Weiterhin ist das Wellenpotential nur von z abhängig, nicht mehr von x und y . Daher sind stets die Komponenten Z' und C' gleich Null, ferner im Falle a) noch A' , im Falle b) X' .

Um überblicken zu können, wie es im Falle a) mit X' und B' , im Falle b) mit Y' und A' steht, wollen wir kurz als Beispiel den alles reflektierenden Schirm mit $\psi_0 = 0$ und $\varphi_0 = \pi/2$ betrachten. Die hier nur in der Zahl von zweien vorhandenen Residuen e^{ikz}

$$u_{(2)}(+\varphi) \mp u_{(2)}(-\varphi) = (e^{ikz}) \mp (e^{ikz})$$

sind anzusetzen für $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ bzw. $-3\pi/2 < \varphi < \pi/2$, so daß im Falle a) im physikalischen Raume $0 < \varphi < 2\pi$ allein für $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ das Residuum e^{ikz} gilt und sonst im physikalischen Raume die Lichtbewegung Null ist. In diesem und nur diesem eben genannten Gebiete sind daher X' und B' von Null verschieden. Im Falle b) ist in demselben Gebiete e^{ikz} allein, für $0 < \varphi < \pi/2$ sind dagegen die beiden Residuen $e^{ikz} + e^{ikz}$ zu gebrauchen, während für $3\pi/2 < \varphi < 2\pi$ absoluter Schatten herrscht. Hier, in diesen ausgearteten Fällen, kommen

1) Diss. p. 56; Ann. d. Phys., l. c. p. 462.

also Schattengrenzen ohne Beugungserscheinungen vor. Natürlich ist das wiederum nur eine Folge der unendlichen Ausdehnung des Schirms in Richtung der einfallenden Welle, d. h. eine Folge einer Vereinfachung der Voraussetzungen in der Theorie. Die Tatsache, daß im Falle a) die Lichtbewegung über dem Schirm Null, im Falle b) gleich dem Doppelten des einfallenden Lichts ist, erklärt sich daraus, daß bei a) die elektrische Kraft wegen $Y' = 0$ parallel dem Schirm schwingt, auf dem Schirm aber Null sein muß, daß sie dagegen im Falle b) senkrecht zum Schirm steht, und daß die parallel dem Schirm schwingende magnetische Kraft von den Grenzbedingungen nicht direkt berührt wird. Damit dürfte auch der Fall $\sin \psi_0 = 0$ erledigt sein.

Ähnliche ausgeartete Probleme, wie das hier behandelte, kann man übrigens auch schon für $\psi_0 = \pi/2$ auffinden, wenn man $\varphi_0 = 0$ oder beim Doppelspiegel auch $\varphi_0 = \chi$, beim alles reflektierenden Schirm $\varphi_0 = 2\pi$ wählt. Hier ergeben sich, allerdings ausschließlich im Falle a), in dem die elektrische Kraft parallel zur beugenden Kante schwingt, teilweise keine Beugungserscheinungen. Stets sind sie jedoch bei den schwarzen Halbebenen vorhanden. Fehlen die Beugungserscheinungen, so ist hier aber immer überall im Raume die elektrische und magnetische Kraft identisch Null. Hier müssen nämlich auch die Residuen ganz fortfallen, weil der einfallenden Welle wegen $\varphi = 0$ wie quer dazu überall eine ganz gleiche reflektierte Welle entsprechen muß und für $\varphi = 0$ die im Falle a) doch allein parallel dem Schirm vorhandene elektrische Kraft verschwinden muß.

Im Falle b) besteht natürlich die Komponente X' lediglich aus gebeugten Wellen entsprechend der gegenseitigen Lage von elektrischer und magnetischer Kraft zur Fortpflanzungsrichtung.

Daß das Fortfallen auch der Residuen über einem alles reflektierenden Schirm bei streifendem Einfall von der Seite des Schirms her und das damit eventuell gänzliche Nullwerden aller Kraftkomponenten im Raume in der Tat nur von der unendlichen Ausdehnung des Schirmes herrührt, erkennt man leicht aus dem Falle $\psi_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = \pi$ beim alles reflektieren-

den Schirm (in $\varphi = 0$ gelegen), für den allein dieser Spezialfall Wichtigkeit hat. Da gibt es nämlich im Falle a) Beugungserscheinungen, und es fehlt das Residuum lediglich der Komponente A' . Im Falle b) dagegen treten keine Beugungserscheinungen ein, es ist $X' = 0$, und C' und Y' bestehen lediglich aus ebenen Wellen, die in der ganzen Riemannschen Fläche von $\varphi = -2\pi$ bis $\varphi = +2\pi$ anzusetzen sind. Hier gibt also der alles reflektierende Schirm im Falle b) für den physikalischen Raum gar keine Einwirkung auf die einfallende Welle, kann er doch auch weder auf eine magnetische Kraft noch auf eine zu ihm senkrechte elektrische Kraft Einfluß gewinnen. Im Falle a) dagegen vermag er zu wirken, da die einfallende Welle aber nicht schon von Unendlich her von ihm beeinflußt wird, erhalten wir nicht identisch Null.

Zusammenfassung und Schluß.

In der vorhergehenden Arbeit ist auf Grund neuer strenger Lösungen der Wellengleichung, die bei Anwendung derselben Methode noch für weitere Beugungsprobleme wichtig sein werden, z. B. für die Viertelebene, der Einfluß besprochen, den die Einführung der beliebig unsymmetrischen Lage der Einfallsebene ebener Wellen auf eine Reihe von Beugungsproblemen mit einer beugenden Kante ausübt. Im Anschluß daran sind noch zahlreiche Fälle betrachtet, in denen die strenge Sommerfeldsche Theorie wegen der unendlichen Leitfähigkeit der unendlich großen Schirme oder auch schon allein wegen der unendlichen Ausdehnung der Schirme keine Beugungserscheinungen trotz der Anwesenheit der beugenden Kante liefert.

Beobachtungen zu diesen Problemen, zu denen Hr. Geheimrat Voigt anregte und in liebenswürdigster Weise Platz im Institut zur Verfügung stellte — wofür ich ihm auch hier meinen besten Dank ausspreche — konnten leider bislang nicht ausgeführt werden, da ich zurzeit durch eine experimentelle chemische Arbeit in Anspruch genommen bin.

Göttingen, den 9. September 1913.

(Eingegangen 11. September 1913.)