Zur Theorie der ausgleichenden und flächentreuen Kartendarstellungen. Von N. Herz.

Legt man die X -Achse in der Abbildungsebene in die Richtung des Meridians, die Y -Achse in die Richtung des Parallels des Kartenmittelpunktes, so ist (siehe z. B. mein Lehrbuch der Landkartenprojektionen S. 225):

$$\begin{aligned} X &= A v + \alpha_1 u^2 + 2\beta_1 u v + \gamma_1 v^2 + G l_3 \\ Y &= p_0 u + m u v + \alpha_0 u^2 + 2\beta_0 u v + \gamma_0 v^2 + G l_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Dann erhält man für die Gaußschen Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned} E &= p_0^2 + 2p_0 m v + 4p_0 \alpha_0 u + 4p_0 \beta_0 v + G l_2 \\ F &= 2A \alpha_1 u + 2A \beta_1 v + p_0 m u + 2p_0 \beta_0 u + 2p_0 \gamma_0 v + G l_2 \\ G &= A^2 + 4A \beta_1 u + 4A \gamma_1 v + G l_2 \end{aligned}$$

und da für die Kugel

$$e = p^2 = (p_0 + m v)^2 \quad f = 0 \quad g = A^2$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} E/e &= 1 + 4u\alpha_0/p_0 + 4v\beta_0/p_0 + G l_2 \\ G/g &= 1 + 4u\beta_1/A + 4v\gamma_1/A + G l_2 \\ (EG - F^2)/(eg - f^2) &= 1 + 4u\alpha_0/p_0 + 4v\beta_0/p_0 + 4u\beta_1/A + 4v\gamma_1/A + G l_2. \end{aligned}$$

Wenn daher: $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$; $\alpha_1 = -p_0 m/2A$ gesetzt wird, so wird bis auf Glieder zweiter Ordnung:

$$E/e = 1 \quad G/g = 1 \quad F = 0 \quad (EG - F^2)/(eg - f^2) = 1.$$

Mit Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung sei nunmehr:

$$\begin{aligned} X &= A v - (p_0 m/2A) u^2 + a u^3 + 3b u^2 v + 3c u v^2 + d v^3 + G l_4 \\ Y &= p_0 u + m u v + m' u^2 + a' u^3 + 3b' u^2 v + 3c' u v^2 + d' v^3 + G l_4 \end{aligned} \quad (2)$$

so wird ebenso, wegen $e = (p_0 + m v + m' v^2)^2$, wobei

$$p_0 = A \cos \varphi_0 \quad m = -A \sin \varphi_0 \quad m' = -1/2 A \cos \varphi_0 \quad (3)$$

(φ_0 = geographische Breite des Kartenmittelpunktes) ist:

$$\begin{aligned} E/e &= 1 + 6u^2 a'/p_0 + 12uvb'/p_0 + 6v^2 c'/p_0 + u^2 m^2/A^2 + G l_3 \\ G/g &= 1 + 6u^2 b/A + 12uvc/A + 6v^2 d/A + u^2 m^2/A^2 + G l_3 \\ (EG - F^2)/(eg - f^2) &= 1 + 6u^2 a'/p_0 + 12uvb'/p_0 + 6v^2 c'/p_0 + u^2 m^2/A^2 + 6u^2 b/A + 12uvc/A + 6v^2 d/A + u^2 m^2/A^2 + G l_3 \\ F/\sqrt{EG} &= 3u^2 a/p_0 + 6uvb/p_0 + 3v^2 c/p_0 + uvm^2/p_0 + 2uvm'/A + 3u^2 b'/A + 6uv c'/A + 3v^2 d'/A + G l_3. \end{aligned}$$

Damit wird F^2 und ebenso $(E/e - 1)(G/g - 1)$ von der vierten Ordnung, folglich

$$\begin{aligned} E/e \cdot G/g &= E/e + G/g - 1 + G l_4 \\ (EG - F^2)/(eg - f^2) - 1 &= (E/e - 1) + (G/g - 1) + G l_4. \end{aligned} \quad (4)$$

$E/e - 1$ und $G/g - 1$ bestimmen die Längenänderungen, $(EG - F^2)/(eg - f^2) - 1$ die Flächenänderung. Es ist nun möglich:

I. $E/e - 1 = G/g - 1 = \kappa$ d. h. die Längenänderung¹⁾ nach den beiden Hauptrichtungen und damit nach allen Richtungen in demselben Punkte gleich zu machen; damit wird dann die Flächenänderung in diesem Punkte

$$(EG - F^2)/(eg - f^2) - 1 = 2\kappa$$

wobei κ von der zweiten Ordnung ist¹⁾; oder aber

II. $E/e - 1 = -(G/g - 1) = -\kappa$, d. h. die Längenänderungen nach den beiden Hauptrichtungen entgegengesetzt gleich von der zweiten Ordnung, in der einen Richtung eine Verlängerung, in der andern eine gleiche Verkürzung und

$$(EG - F^2)/(eg - f^2) - 1 = G l_4$$

also die Kartendarstellung flächentreu bis auf Glieder von der vierten Ordnung.

Aus den angeschriebenen Bedingungen folgt nun:

für I: gleiche Längenänderungen nach allen Richtungen:

$$A a' = b p_0 \quad A b' = c p_0 \quad A c' = d p_0 \quad (5a)$$

für II: Flächentreue:

$$\begin{aligned} A a' + b p_0 + 1/3 p_0 m^2/A &= 0 \\ A b' + c p_0 &= 0 \quad A c' + d p_0 = 0 \end{aligned} \quad (5b)$$

und dann für beide Fälle:

$$1/6 \kappa = u^2 b/A + 2uvc/A + v^2 d/A + 1/6 u^2 m^2/A^2. \quad (6)$$

Da in beiden Fällen zwischen den 8 Koeffizienten nur 3 Bedingungen bestehen, so könnten noch 5 Bedingungsgleichungen erfüllt werden; es ist daher noch möglich, zunächst die Glieder zweiter Ordnung in F zum Verschwinden zu bringen, sodaß F und damit $\cos \Theta$ (Θ = Winkel zwischen den Meridianen und Parallelen der Karte) nur um Größen dritter Ordnung von 1 verschieden sind. Hierzu muß (für beide Fälle) sein:

$$\begin{aligned} A a + b' p_0 &= 0 \quad A c + d' p_0 = 0 \\ A b + c' p_0 + 1/6 m^2 + 1/3 m' p_0 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Man kann hiernach die 8 Größen $a, b, c, d, a', b', c', d'$ durch zwei derselben ausdrücken, und es erweist sich, wie leicht zu ersehen, am vorteilhaftesten, sämtliche Größen durch b, c, d auszudrücken, wobei dann noch eine Bedingung zwischen b und d hinzutritt. Man erhält dann als Resultat:

$$\begin{aligned} \text{für I: } X &= Av - u^2 p_0 m/2A - u^3 c p_0^2/A^2 + 3u^2 vb + 3uv^2 c + v^3 d \\ Y &= p_0 u + uvm + uv^2 m' + u^3 b p_0/A + 3u^2 vc p_0/A + 3uv^2 d p_0/A - v^3 Ac/p_0 \end{aligned} \quad (8a)$$

$$A^2 b_1 + d p_0^2 + 1/3 A m' p_0 = 0 \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \text{für II: } X &= Av - u^2 p_0 m/2A + u^3 c p_0^2/A^2 + 3u^2 vb + 3uv^2 c + v^3 d \\ Y &= p_0 u + uvm + uv^2 m' + (b p_0/A + 1/3 m^2 p_0/A^2) u^3 - 3u^2 vc p_0/A + 3uv^2 d p_0/A - v^3 Ac/p_0 \end{aligned} \quad (8b)$$

$$A^2 b_1 - d p_0^2 + 1/3 A m' p_0 = 0 \quad (9b)$$

wobei noch

$$b + 1/6 m^2/A = b_1$$

gesetzt wurde. Dabei ist Fall I eine mehr ausgleichende Projektion: die Glieder zweiter Ordnung in den Längenänderungen zwar von Punkt zu Punkt verschieden, aber in jedem Punkte nach allen Richtungen gleich; in Fall II aber sind die Glieder zweiter Ordnung in den Längenänderungen nicht nur von Punkt zu Punkt, sondern auch in demselben Punkte nach den verschiedenen Richtungen verschieden, hingegen die Flächenänderung in allen Punkten bis auf Größen vierter Ordnung dieselbe; es soll also Fall I vorzugsweise als »ausgleichende«, Fall II als »flächentreue« Darstellung bezeichnet werden.

Nach der Form des Ausdruckes für die Verzerrung κ liegen die Punkte gleicher Verzerrungen in Kegelschnittslinien.

¹⁾ Die Änderungen sind eigentlich $\sqrt{E/e} = 1 + 1/2 \kappa$ $\sqrt{G/g} = 1 + 1/2 \kappa$ $\sqrt{(EG - F^2)/(eg - f^2)} = 1 + \kappa$.

Nimmt man daher eine Drehung des Achsensystems der u, v um den Winkel E in dem Sinne von der positiven Y -Achse gegen die positive X -Achse vor, so wird

$$v = \xi \cos E + \eta \sin E \quad u = \eta \cos E - \xi \sin E$$

und soll das neue ξ - η -Achsensystem auf die Hauptachsen der Kegelschnitte bezogen sein, so muß

$$\operatorname{tg} 2E = c/g \quad \cos 2E = \pm g/h \quad \sin 2E = \pm c/h \quad (10)$$

(mit Korrespondenz der Zeichen) sein, wenn

$$b_1 - d = 2g \quad g^2 + c^2 = h^2 \quad (10a)$$

gesetzt wird. Es wird dann:

$$+1/6 \kappa = \xi^2 N/A + \eta^2 M/A \quad (6a)$$

oder

$$\pm 1/6 \kappa = \xi^2 N/A - \eta^2 M/A.$$

Die Linien gleicher Verzerrung (Isostrophen) müssen also nicht notwendiger Weise Ellipsen, sondern können auch Hyperbeln sein.

a) Ellipsen. Setzt man noch

$$b_1 + d = 2k, \text{ so wird } M = k \pm h \quad N = k \mp h. \quad (11)$$

Nimmt man h stets positiv, wonach dann der Quadrant von E zu bestimmen ist, so muß auch k positiv und größer als h sein, was, da noch zwei von den drei Konstanten b, c, d willkürlich sind, stets zu erfüllen möglich ist. Soll dann die große Achse der Ellipse in die Richtung der ξ fallen, also $M > N$ sein, so sind die oberen Zeichen zu wählen. Es wird dann

$$1/6 \kappa = \xi^2 (k-h)/A + \eta^2 (k+h)/A \quad (12)$$

$$c = h \sin 2E \quad g = h \cos 2E.$$

Die Bedingung (9) wird jetzt mit Berücksichtigung von (3)

$$k(1 \pm \cos \varphi_0^2) + g(1 \mp \cos \varphi_0^2) = 1/6 A \cos \varphi_0^2 \quad (13)$$

wobei die oberen Zeichen für die ausgleichende, die unteren für die flächentreue Darstellung gelten.

Führt man das Achsenverhältnis

$$\epsilon = b/a = V(N/M) = V[(k-h)/(k+h)] \quad (14)$$

und den Wert $f = (1-\epsilon^2)/(1+\epsilon^2)$ (14a)

ein, so wird

$$h = kf \quad 1/6 \kappa = [\epsilon^2 \xi^2 + \eta^2] 2h/[A(1-\epsilon^2)]. \quad (15)$$

Ausgedrückt durch den Radiusvektor ϱ , der gegen die beiden Achsen um 45° geneigt ist, wird:

$$1/6 \kappa = \varrho^2 k/A. \quad (15a)$$

Zur Bestimmung von k dient die Gleichung (13), wobei $g = kf \cos 2E$ zu setzen ist; dieselbe wird demnach:

$$k[(1 \pm \cos \varphi_0^2) + f \cos 2E(1 \mp \cos \varphi_0^2)] = 1/6 A \cos \varphi_0^2 \quad (13a)$$

Die Formeln zur Berechnung einer derartigen Projektion bei gegebenem Achsenverhältnis ϵ und gegebener Neigung E der großen Ellipsenachse gegen die Meridiane für einen gegebenen Kartenmittelpunkt von der geographischen Breite φ_0 und eine durch den Halbmesser A gegebene Abbildungskugel werden demnach durch Einführung der Hilfsgrößen

$$\sigma = \sin \varphi_0^2/(1 + \cos \varphi_0^2) \quad \gamma = \cos \varphi_0^2/(1 + \cos \varphi_0^2) \quad (16a)$$

für ausgleichende Darstellungen:

$$k = 1/6 A \gamma / (1 + f \sigma \cos 2E) \quad (16b)$$

für flächentreue Darstellungen:

$$k = 1/6 A \gamma (\sigma + f \cos 2E)$$

$$h = kf \quad c = h \sin 2E \quad b_1 = k + g$$

$$g = h \cos 2E \quad d = k - g \quad (16c)$$

und dann (8a) für ausgleichende, (8b) für nahe flächentreue Darstellungen. Für ausgleichende Darstellungen ist k stets positiv, da $f \sigma \cos 2E$ stets kleiner als die Einheit bleibt; für nahe flächentreue Darstellungen kann, wenn E zwischen 45° und 135° liegt, ϵ sehr klein ist (sehr gestreckte Ellipsen) und ebenso σ (niedrige geographische Breiten), k negativ werden; für positive k ist, da κ mit k gleich bezeichnet ist, $G/g > 1$, $E/e < 1$, d. h. es finden Verlängerungen in der Richtung der v (Meridiane), Verkürzungen in der Richtung der u (Parallelkreise) statt; für negative k umgekehrt.

b) Hyperbeln. Für $\pm 1/6 \kappa = \xi^2 N/A - \eta^2 M/A$, wobei vorausgesetzt ist, daß die absoluten Werte von N und M positiv sind, wird wieder

$$\epsilon = b/a = V(N/M) = V[(k-h)/(k+h)] \quad (14)$$

wobei aber vorläufig wegen des Doppelzeichens bei κ noch nicht entschieden ist, ob die reelle oder die imaginäre Achse die größere ist, d. h., ob $\epsilon \geq 1$ ist. Behält man den Wert von f aus (14a) bei, so wird $h = kf$; für $\epsilon_1 > 1$ wäre aber

$$f = -(\epsilon_1^2 - 1)/(\epsilon_1^2 + 1) \quad (14b)$$

daher h und k ungleich bezeichnet, aber stets dem absoluten Werte nach $h < k$, sodaß auch für negative h der Wert von ϵ reell bleibt. Während die Gleichungen für die Bestimmung von h und k , daher auch der daraus abgeleiteten Konstanten (Gleichungen 16a, b, c) ungeändert bleiben, folgt jetzt der Wert für κ aus

$$\pm 1/6 \kappa = [\epsilon^2 \xi^2 - \eta^2] 2h/[A(1-\epsilon^2)] = -\varrho^2 h/A. \quad (15b)$$

Da nun f positiv oder negativ, aber stets kleiner als 1 ist, so wird für ausgleichende Darstellungen k stets positiv; h hingegen wird für $\epsilon < 1$ positiv, für $\epsilon > 1$ negativ.

Ist a die reelle Achse, in der Richtung der ξ (oberes Zeichen, $+1/6 \kappa$), so wird daher, wenn die reelle Achse die größere ist, h positiv, κ negativ; wenn die reelle Achse die kleinere ist, h negativ, κ positiv; E der Winkel zwischen der reellen Achse und dem Meridian.

Ist b die reelle Achse, in der Richtung der η (unteres Zeichen, $-1/6 \kappa$), so wird, wenn die reelle Achse die größere ist, h und κ negativ, wenn die reelle Achse die kleinere ist, h und κ positiv, $E+90^\circ$ der Winkel zwischen der reellen Achse und dem Meridian. Oder zusammengefaßt: h ist positiv oder negativ, je nachdem E der Winkel zwischen der größeren oder kleineren Hyperbelachse und dem Meridian ist, gleichgültig, ob die größere Achse die reelle oder die imaginäre ist.

Für ausgleichende Darstellungen würde hieraus folgen: Unter Zugrundelegung von hyperbolischen Isostrophen, für welche E der Winkel zwischen der größeren (reellen oder imaginären) Hyperbelachse und dem Meridian ist, wird κ positiv oder negativ, je nachdem die reelle Achse die größere oder kleinere ist; für positive κ finden nach allen Richtungen Verlängerungen, für negative κ nach allen Richtungen Verkürzungen gegenüber dem Kartenmittelpunkte statt. Für flächentreue Darstellungen werden für positive κ Verlängerungen in der Richtung des Meridians, für negative κ Verlängerungen in der Richtung der Parallelen stattfinden.

Der Vorgang für die Bestimmung der besten Karten-darstellung ist nun der, daß man ein System von konzentrischen elliptischen oder hyperbolischen Isostrophen von einem gewissen

ε über das darzustellende Gebiet (streng genommen auf dem Globus) legt; die kleinste Ellipse bzw. Hyperbel, welche das ganze Gebiet bei entsprechender Verschiebung und Drehung des Systems umspannt, gibt in dem unter 45° gegen die beiden Achsen geneigten Halbmesser ρ ein Maß für die Güte dieser Darstellung. Verschiedene Systeme für verschiedene Werte von ε geben für die zugehörigen ρ immer andere Werte, und dasjenige System, für welches ρ den absolut kleinsten Wert hat, gibt die beste Darstellung. Der für dieses System in der angegebenen Lage zwischen der maßgebenden Achse (große Ellipsenachse; reelle, bzw. größere Hyperbelachse) und dem Meridian eingeschlossene Winkel ist der zu verwendende Winkel E ; der Kartenpunkt, über welchen der Mittelpunkt des Kegelschnittsystems fällt, wird Kartenmittelpunkt. Die Gleichungen (15a), (15b), (15c) geben dann die Konstanten der Projektion, mit welchen dann nach (8a) bzw. (8b) die Kartenkoordinaten eines Punktes gerechnet werden.

Bisher wurden nur Ellipsen verwendet; für Gebiete, welche in der Mitte eine Einschnürung zeigen, wie z. B. Italien, Deutschland zwischen Erzgebirge und Mecklenburg, Dänemark quer über den Samsöbelt und Insel Fünen, Skandinavien zwischen Tronhjem und Hernösand, ganz besonders aber für zahlreiche kleinere Gebiete dieser Art, bieten Darstellungen mit hyperbolischen Isostrophen wesentliche Vorzüge (wie unmittelbar ersichtlich ist, kleinere Werte von ε) und zwar sowohl für möglichst nahe Ausgleichung bezüglich der Winkeltreue und gleichen Vergrößerung als auch für die Erfüllung der Forderung von möglichster Annäherung an Flächentreue.

Hilfstafeln für f mit dem Argumente ε und für σ und γ mit dem Argumente φ_0 können die Berechnung erleichtern, solche Hilfstafeln sind:

ε (f positiv)	$\log f$	ε (f negativ)	ε (f positiv)	$\log f$	ε (f negativ)
0.00	0.0000	∞	0.25	9.9457	4.00
.01	9.9999	100	.26	.9412	3.85
.02	.9997	50	.27	.9366	3.70
.03	.9992	33	.28	.9318	3.57
.04	.9986	25	.29	.9268	3.45
0.05	9.9978	20	0.30	9.9216	3.33
.06	.9969	16	.31	.9163	3.22
.07	.9958	14	.32	.9107	3.12
.08	.9945	12	.33	.9050	3.03
.09	.9930	11	.34	.8991	2.94
0.10	9.9913	10	0.35	9.8931	2.86
.11	.9895	9.1	.36	.8868	2.78
.12	.9875	8.3	.37	.8803	2.70
.13	.9853	7.7	.38	.8737	2.63
.14	.9830	7.1	.39	.8669	2.56
0.15	9.9805	6.6	0.40	9.8598	2.50
.16	.9778	6.2	.41	.8526	2.43
.17	.9749	5.9	.42	.8452	2.38
.18	.9718	5.6	.43	.8375	2.33
.19	.9686	5.3	.44	.8297	2.27
0.20	9.9652	5.0	0.45	9.8216	2.22
.21	.9617	4.8	.46	.8134	2.17
.22	.9579	4.5	.47	.8049	2.13
.23	.9540	4.3	.48	.7962	2.08
.24	.9499	4.2	.49	.7873	2.04
0.25	9.9457	4.0	0.50	9.7782	2.00

ε (f positiv)	$\log f$	ε (f negativ)	ε (f positiv)	f	ε (f negativ)
0.50	9.7782	2.000	0.75	+0.2800—	1.333
.51	.7688	1.961	.76	.2678	.316
.52	.7592	.923	.77	.2556	.299
.53	.7493	.887	.78	.2435	.282
.54	.7392	.852	.79	.2315	.266
0.55	9.7288	1.818	0.80	+0.2195—	1.250
.56	.7181	.786	.81	.2076	.235
.57	.7072	.755	.82	.1958	.220
.58	.6960	.724	.83	.1841	.205
.59	.6845	.695	.84	.1725	.190
0.60	9.6726	1.667	0.85	+0.1611—	1.176
.61	.6605	.639	.86	.1497	.163
.62	.6480	.613	.87	.1384	.149
.63	.6352	.587	.88	.1272	.136
.64	.6220	.562	.89	.1161	.124
0.65	9.6085	1.538	0.90	+0.1050—	1.111
.66	.5946	.515	.91	.0940	.099
.67	.5802	.493	.92	.0831	.087
.68	.5654	.471	.93	.0723	.075
.69	.5501	.449	.94	.0617	.064
0.70	9.5344	1.429	0.95	+0.0512—	1.052
.71	.5181	.409	.96	.0407	.042
.72	.5013	.389	.97	.0303	.031
.73	.4839	.370	.98	.0201	.020
.74	.4659	.351	0.99	.0100	.010
0.75	9.4472	1.333	1.00	0.0000	1.000

φ_0	σ	$\log \gamma$	φ_0	σ	$\log \gamma$
0°	0.0000	9.6990	20°	0.0621	9.6711
1	.0002	.6989	21	.0686	.6681
2	.0006	.6987	22	.0755	.6649
3	.0014	.6984	23	.0826	.6615
4	.0024	.6979	24	.0902	.6579
5	0.0038	9.6973	25	0.0981	9.6541
6	.0055	.6966	26	.1063	.6502
7	.0075	.6957	27	.1149	.6460
8	.0098	.6947	28	.1238	.6415
9	.0124	.6936	29	.1332	.6369
10	0.0153	9.6923	30	0.1429	9.6320
11	.0185	.6908	31	.1529	.6269
12	.0221	.6893	32	.1633	.6215
13	.0260	.6875	33	.1741	.6159
14	.0301	.6857	34	.1853	.6099
15	0.0347	9.6836	35	0.1969	9.6037
16	.0395	.6815	36	.2088	.5972
17	.0446	.6791	37	.2211	.5904
18	.0501	.6766	38	.2338	.5833
19	.0560	.6740	39	.2469	.5758
20	0.0621	9.6711	40	0.2604	9.5680

φ_0	0	$\log \sigma$ 20'	40'	0'	$\log \gamma$ 20'	40'
40°	9.4156	9.4232	9.4307	9.5680	9.5653	9.5625
41	.4381	.4455	.4528	.5598	.5569	.5541
42	.4601	.4673	.4743	.5512	.5482	.5452
43	.4814	.4885	.4955	.5422	.5391	.5359
44	.5024	.5093	.5161	.5327	.5295	.5262
45	9.5229	.5296	.5362	9.5229	.5195	.5160

φ_0	α'	$\log \sigma$ 20'	40'	α'	$\log \gamma$ bzw. γ 20'	40'
45°	9.5229	9.5296	9.5362	9.5229	9.5195	9.5160
46	.5428	.5494	.5559	.5125	.5090	.5054
47	.5624	.5688	.5751	.5017	.4980	.4942
48	.5814	.5877	.5939	.4903	.4864	.4824
49	.6001	.6062	.6123	.4784	.4743	.4702
50	9.6183	.6243	.6302	9.4659	.4616	.4573
51	.6361	.6419	.6477	.4528	.4483	.4438
52	.6535	.6592	.6648	.4391	.4344	.4296
53	.6705	.6760	.6816	.4247	.4197	.4147
54	.6870	.6925	.6979	.4096	.4043	.3990
55	9.7032	.7085	.7138	9.3937	.3882	.3826
56	.7190	.7241	.7293	.3770	.3712	.3653
57	.7344	.7394	.7444	.3594	.3533	.3472
58	.7493	.7543	.7591	.3409	.3346	.3281
59	.7639	.7687	.7735	.3215	.3148	.3080
60	9.7781	.7828	.7874	0.2000		
61	.7919	.7965	.8009	.1903		
62	.8054	.8097	.8141	.1806		
63	.8184	.8226	.8268	.1709		
64	.8310	.8351	.8392	.1612		
65	9.8432	.8472	.8511	0.1515		
66	.8550	.8588	.8626	.1419		
67	.8664	.8701	.8737	.1324		
68	.8773	.8809	.8844	.1231		

φ_0	α'	$\log \sigma$ 20'	40'	γ
68°	9.8773	9.8809	9.8844	0.1231
69	.8878	.8912	.8946	.1138
70	9.8979	.9012	.9044	0.1047
71	.9076	.9107	.9138	.0958
72	.9168	.9198	.9227	.0872
73	.9256	.9284	.9312	.0787
74	.9339	.9365	.9392	.0706
75	9.9417			0.0628
76	.9491			.0553
77	.9560			.0482
78	.9624			.0414
79	.9684			.0351
80	9.9738			0.0293
81	.9787			.0239
82	.9832			.0190
83	.9871			.0146
84	.9905			.0108
85	9.9934			0.0075
86	.9958			.0048
87	.9976			.0027
88	.9989			.0012
89	.9997			.0003
90	0.0000			0.0000

Wien, 1922 April 9.

N. Herz.

Zur Frage einer Atmosphäre des Sternenraumes. Von F. Wächter.

In der Zeitschrift »Sirius« habe ich in mehrfachen Publikationen¹⁾ darzulegen versucht, daß jene Einwände, welche man bisher gegen die Auffassung des Welt- oder Lichtäthers als eines allerdings sehr leichten, aber doch ponderablen Gases vorgebracht hat, nicht stichhaltig sind. Zugleich wies ich darauf hin, daß durch die Annahme eines ponderablen Äthers nicht nur die anormale Bewegung des Merkurperihels, die Ablenkung von Lichtstrahlen in der Nähe der Sonne und die Rotverschiebung der Spektrallinien in der denkbar einfachsten Weise — ohne Zuhilfenahme der Relativitätstheorie — erklärlich wären, sondern daß das Vorhandensein eines ponderablen Äthers auch für die Frage der Fixsternbewegungen von großer Bedeutung wäre.

Auch auf physikalischem und chemischem Gebiete²⁾ habe ich, teils auf Experimental-Untersuchungen gestützt, teils mit Hinweis auf die Erscheinung des »Hemmungspunktes« der Meteore das Vorhandensein eines ponderablen Äthers nachzuweisen mich bemüht. Da die Beantwortung der Frage: gibt es einen ponderablen Äther oder nicht?, sowohl für die Astronomie, wie auch für die Physik und Chemie unzweifelhaft von größter Tragweite wäre, so habe ich weiter versucht — nach Art der militär-ballistischen Berechnung des Luftwiderstandes — den Widerstand des Äthers gegen bewegte Weltkörper zu ermitteln. Da aber schon bei Artilleriegeschossen der Luftwiderstand nicht auf Grund theoretischer Voraussetzungen, sondern nur durch empirisch gefundene Zahlendaten ermittelt werden kann, so würde eine diesbezügliche, theoretische Berechnung des Ätherwiderstandes nur bei willkürlichen Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Äthers möglich sein und daher kein Vertrauen erweckendes Resultat ergeben.

Nur der umgekehrte Weg würde ein maßgebendes Resultat erlangen lassen, nämlich aus einem gegebenen Ätherwiderstand die Beschaffenheit des Äthers abzuleiten. Ein solcher Ätherwiderstand scheint mir einzig und allein in jenem Teil der Mondakzeleration gegeben zu sein, welcher durch die Veränderlichkeit der Exzentrizität der Erdbahn nicht erklärlich ist und für welchen man andere Umstände, nach *Delaunay* die Verlangsamung der Erdrotation, herangezogen hat. Ich habe diesbezüglich schon vor dem Weltkriege in mündlicher Besprechung mit *F. K. Ginzl* eine neuerliche Durchrechnung der Mondakzeleration mit Rücksichtnahme auf einen eventuellen Ätherwiderstand durch das Astron. Recheninstitut in Berlin angeregt.

Da diese Arbeit leider nicht in Angriff genommen werden konnte, gestatte ich mir hiermit neuerdings eine Untersuchung der Mondakzeleration behufs Beantwortung der Frage, ob die Annahme eines ponderablen Äthers statthaft ist oder nicht, lebhaft zu empfehlen. Ich selbst kann diese Frage aus dem Grunde, auf astronomischem Gebiete, nicht näher untersuchen, da diese Aufgabe in meiner Eigenschaft als Physiker über meine Kräfte geht. Wohl aber glaube ich in den eingangs zitierten Publikationen nachgewiesen zu haben, daß auf physikalischem und chemischem Gebiete die Annahme eines ponderablen Äthers keinem nachweisbaren Widerspruch begegnet.

Bei dem großen, allgemeinen Interesse, welches die moderne Relativitätstheorie an der Frage nach dem Vorhandensein eines ponderablen Äthers wachgerufen hat und in Anbetracht des Umstandes, daß die Beantwortung dieser Frage auf Grund astronomischer Beobachtungen ebenso große Wichtigkeit hat,

¹⁾ Sirius 1921 p. 71; 1922 p. 27, 41, 70 und 79.

²⁾ Die Naturwissenschaften 1921 p. 250. — Zeitschrift f. Anorg. Chemie 1922, Aprilheft. — Zeitschrift f. techn. Physik.