XI. Untersuchungen über den Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten; von C. Brodmann.

(Nach seiner gleichnamigen Dissertation ¹⁾ für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

Die innere Reibung von Flüssigkeiten ist bisher wesentlich nach zwei von einander im Princip verschiedenen Methoden untersucht worden.

Die älteste und am häufigsten zur Anwendung gebrachte von den beiden ist die Ausflussmethode, nach welcher exacte Bestimmungen zuerst von Poiseuille gegeben sind.

Aus der Flüssigkeitsmenge, welche unter gegebenen Umständen in bestimmter Zeit durch eine Röhre strömt, wird hierbei auf die innere Reibung der Flüssigkeit geschlossen.

Geht man von den hydrodynamischen Differentialgleichungen für zähe Flüssigkeiten aus, so gelangt man unter Annahme cylindrischer Gestalt der Ausflussröhre zu Formeln, welche wenigstens für nicht zu kurze und zu weite Röhren den Resultaten der Beobachtung entsprechen.

Andererseits hat man Beobachtungen in der Weise angestellt, dass man entweder Hohlkörper, welche mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt waren, oder Scheiben, welche in dieselben eintauchten, drehende Schwingungen ausführen liess. Aus dem Decrement der Schwingungen und der Schwingungsdauer suchte man dann zu einem Maass der Zähigkeit zu gelangen.

Hier ist vor Allem die Methode der schwingenden Kugel zu erwähnen, welche theoretisch von Helmholtz, experimentell von Piotrowsky behandelt ist.

Ferner gehören hierher die Methoden der schwingenden Scheiben, nach welchen Coulomb, O. E. Meyer und Andere Untersuchungen angestellt haben.

Bei allen diesen Methoden ist eine strenge Herleitung der

1) C. Brodmann, Untersuchungen über den Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1891.

Formeln aus den Differentialgleichungen nicht möglich. Entweder werden, wie bei der Helmholtz'schen Untersuchung, die Glieder zweiter Ordnung der Differentialgleichungen vernachlässigt, oder man geht überhaupt nicht auf die Differentialgleichungen zurück, sondern baut die Theorie auf Annahmen über den kinematischen Charakter der Bewegung auf.

Trotz aller Vernachlässigungen aber führen diese Entwicklungen auf sehr complicirte Ausdrücke für die Reibungsconstante, und es ist zu bemerken, dass die schliesslichen Resultate weder unter einander, noch mit den Poiseuille'schen Werthen gut übereinstimmen.

So erscheint es denn wünschenswerth, die in Rede stehende Constante nach andern Methoden neu zu bestimmen, um so zur Aufklärung der vorhandenen Widersprüche beizutragen.

Es erscheint ferner eine Untersuchung über die Frage angezeigt, ob denn in der That die Reibungsconstante in den hydrodynamischen Differentialgleichungen als eine wirkliche Constante anzusehen ist, oder ob sie noch von der Geschwindigkeit abhängt.

Eine solche Abhängigkeit ist thatsächlich vermuthet worden.

Die Methoden, welche zur Untersuchung angewandt wurden, sind theoretisch nicht neu.

Die erste besteht darin, dass man die zu untersuchende Flüssigkeit in den Zwischenraum zwischen zwei concentrischen Kugeln bringt. Wird dann die äussere derselben in gleichmässige Rotation um ihren verticalen Durchmesser versetzt, so resultirt in Folge der Zähigkeit ein Drehmoment auf die innere Kugel. Kann man dieses messen, so kann man daraus die Grösse der Reibungsconstante bestimmen.

Die zweite Methode ist experimentell der ersten sehr ähnlich. Bei ihr befindet sich die Flüssigkeit zwischen zwei coaxialen Kreiscylindern, von denen wieder der äussere gleichförmig um seine Axe rotirt, während das auf den innern ausgeübte Moment gemessen wird.

Die erste Methode ist theoretisch im wesentlichen von Kirchhoff in dessen Mechanik ¹⁾ behandelt worden. Experi-

1) Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. Vorlesung 26.

mentell ist sie dann von Elie ¹⁾ versuchsweise zur Bestimmung des Reibungscoefficienten von Wasser angewandt worden. Er glaubte aus seinen Versuchen auf jene erwähnte Inconstanz des fraglichen Coefficienten schliessen zu sollen, hat indessen die Untersuchung nicht zu Ende geführt, weil es ihm nicht gelang, die Rotation der äusseren Kugel gleichmässig genug zu machen.

Die zweite Methode ist zuerst von Margules ²⁾ entwickelt und zu Beobachtungen empfohlen worden. Auch nach ihr sind exacte Messungen bisher nicht angestellt.

Couette ³⁾ hat eine Reihe von Beobachtungen nach derselben beschrieben, doch ist die ganze Versuchsanordnung bei ihm für eine absolute Bestimmung der Reibungsconstante wenig geeignet.

Die Anregung zu der nachstehenden Untersuchung gab mir Hr. Prof. Voigt zu Göttingen, dem ich an dieser Stelle für sein warmes Interesse und seine freundliche Unterstützung meinen besten Dank ausspreche. Der gleiche Dank gebührt Hrn. Prof. K. Schering zu Darmstadt, in dessen Institut der grössere Theil der Beobachtungen angestellt wurde.

Was nun die zur Berechnung der späteren Beobachtungen nothwendigen Formeln anlangt, so ist zunächst im Falle der concentrischen Kugeln das Drehmoment, welches die innere Kugel erfährt, gegeben durch

$$(1) \quad \mu = 8 a \pi k,$$

wo k den Reibungscoefficienten bedeutet. a ist eine Constante, welche sich verschieden ausdrückt, je nach dem Verhalten der Flüssigkeit an den Wandungen. Nimmt man an, die Flüssigkeit hafte an ihnen, so findet sich

$$(1') \quad a = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3}},$$

1) M. B. Elie, Variation du Coefficient de Viscosité avec la Vitesse. Journal de Physique S. II, T. I, p. 224. 1882.

2) Margules, Ueber die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit. Wiener Berichte II. Abth., Bd. 83. p. 588. 1881.

3) Couette, Journal de Physique S. II, T. IX, p. 414. 1890. Annales de Chimie et Phys. S. VI, Bd. 21. p. 433. 1890.

wo σ_0 die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, mit der die äussere Kugel rotirt, R_1 den Radius der innern, R_0 den der äussern Kugel bezeichnet. Diese Formeln stimmen mit denen überein, welche Kirchhoff l. c. angibt.¹⁾

Die innere Kugel denken wir uns bifilar aufgehängt. Es bezeichne

m die gesammte am Bifilar hängende Masse, vermindert um die Masse der durch die innere Kugel verdrängten Flüssigkeit,

p, q den oberen und unteren halben Abstand der Bifilardrähte, l die Länge des Bifilars,

g die Beschleunigung der Schwere,

γ den Torsionscoefficienten des Bifilardrahtes, bezogen auf die Längeneinheit,

φ den Ablenkungswinkel der inneren Kugel aus ihrer Gleichgewichtslage,

dann ist

$$\mu = \frac{m p q g}{l} \sin \varphi + \frac{2 \gamma}{l} \cdot \varphi$$

oder. wenn wir den Ablenkungswinkel so klein nehmen, dass wir $\sin \varphi = \varphi$ setzen können:

$$\mu = \left(\frac{m p q g}{l} + \frac{2 \gamma}{l} \right) \cdot \varphi.$$

Nehmen wir für α seinen Werth aus Formel (1'), so erhalten wir

$$(2) \quad k = \frac{1}{8 \pi \cdot \sigma_0} \left\{ \left(\frac{m p q g}{l} + \frac{2 \gamma}{l} \right) \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3} \right) \right\} \varphi.$$

Zu bemerken ist hierbei, dass diese Formeln aus den Differentialgleichungen für reibende Flüssigkeiten, welche bekanntlich die Gestalt haben:

$$-\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{k}{\varepsilon} \Delta u.$$

sich nur dann ableiten, wenn man die Glieder 2. Ordnung $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ etc. gegen die übrigen vernachlässigt. Bei den coaxia-

1) Vgl. auch des Verf. Dissertation, p. 5 ff.

len Cylindern erhält man ähnliche Formeln, welche sich aber im Gegensatz zu dem eben Angeführten streng aus den Differentialgleichungen herleiten lassen, sobald man unendlich lange Cylinder ins Auge fasst. Man findet hier für das Drehmoment, welches ein Abschnitt von der Höhe h des innern Cylinders erfährt, den Werth

$$(3) \quad \mu = 4 \pi a k h.$$

a bestimmt sich wieder verschieden, je nachdem man Haften oder Gleiten an der Wand annimmt.

Setzt man Gleiten voraus und sind innere und äussere Wandfläche gleichartig, so wird

$$(4) \quad a = \frac{\lambda \sigma_0}{2 k \left(\frac{1}{r_0^3} + \frac{1}{r_1^3} \right) + \lambda \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)}$$

wo σ_0 seine frühere Bedeutung hat, während r_1 den Radius des inneren, r_0 den des äussern Cylinders bezeichnet; λ ist der Gleitungscoefficient.

Haftet dagegen die Flüssigkeit innen und aussen, so wird

$$(5) \quad a = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}}$$

Diese Formeln setzen, um streng gültig zu sein, unendlich lange Cylinder voraus. Indess lassen sich dieselben durch geeignete Combination von Beobachtungen auf den Fall endlicher Cylinder anwendbar machen. Nimmt man für a seinen einfachsten Werth, so findet man aus zwei Beobachtungen, welche bei gleicher Drehgeschwindigkeit und gleichem Abstand der Bodenflächen der Cylinder, aber bei den Wassershöhen h_1 und h_2 angestellt sind.

$$(6) \quad \mu_1 - \mu_2 = \frac{4 \pi (h_1 - h_2) \sigma_0 k}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}}.$$

Hier ist der Einfluss der Bodenflächen eliminirt.¹⁾ Der Innencylinder sei wieder bifilar aufgehängt. Die Bezeichnung sei der oben erklärten analog, nur dass mit m jetzt die an dem

1) S. Brodmann, l. c. p. 21 ff.

Biflar hängende Masse ohne Abzug gemeint sein soll. ε sei die Dichte der Flüssigkeit, φ_1 und φ_2 seien die den Wasserrhöhen h_1 und h_2 entsprechenden Ablenkungswinkel, σ_0 werde ersetzt durch die Umdrehungszeit $t = \frac{2\pi}{\sigma_0}$. Dann wird

$$(7) \begin{cases} k = \left\{ \left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) - r_1^2 \frac{\pi \varepsilon p q g}{l} (h_1 \varphi_1 - h_2 \varphi_2) \right\} \cdot T, \text{ wo} \\ T = \frac{t \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)}{8\pi^2 (h_1 - h_2)} \end{cases}$$

Wir wollen noch die entsprechenden Formeln für den Fall ableiten, dass a nach der Gleichung (4) zu bestimmen ist.

Dabei empfiehlt es sich mit Rücksicht auf die spätere Anwendung in folgender Weise vorzugehen: Wir denken uns aus den Beobachtungen die Grösse k nach Formel (7) berechnet. Ist dann die dieser Formel zu Grunde liegende Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an der Wand nicht stichhaltig, so wird sich dies darin äussern, dass der Werth für k keine Constante im eigentlichen Sinne ist, dass derselbe vielmehr variirt, sobald die Radien der Cylinder, mit denen man beobachtet, anders gewählt werden.

Wir nehmen an, man habe mit zwei verschiedenen innern Cylindern beobachtet.

Nennen wir k_1 und k_2 die Werthe, welche man nach Formel (7) aus diesen Versuchen berechnet hat, ferner $\mathfrak{k}$ die eigentliche Reibungsconstante und setzen wir

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 \text{ für den ersten Cylinder} &= \nu_1, \\ \mu_1 - \mu_2 \text{ für den zweiten Cylinder} &= \nu_2, \\ h_1 - h_2 \text{ für den ersten} &= H_1, \\ h_1 - h_2 \text{ für den zweiten} &= H_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} &= d_{10}^2 & \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_0^2} &= d_{20}^2 \\ \frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r} &= d_{10}^3 & \frac{1}{r_2^3} + \frac{1}{r} &= d_{20}^3 \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{8\pi^2 H_1 k_1}{d_{10}^2 t} = \frac{8\pi^2 H_1 \mathfrak{k} \cdot \lambda}{(2\mathfrak{k} \cdot d_{10}^3 + \lambda d_{10}^2) t} \\ \nu_2 &= \frac{8\pi^2 H_2 k_2}{d_{20}^2 t} = \frac{8\pi^2 H_2 \mathfrak{k} \cdot \lambda}{(2\mathfrak{k} \cdot d_{20}^3 + \lambda d_{20}^2) t} \end{aligned}$$

Dies gibt für f und $\frac{f}{\lambda}$ zwei lineare Gleichungen, aus denen sich berechnet:

$$(9) \quad \begin{cases} f = \frac{k_1 k_2 (d_{10}^2 d_{20}^3 - d_{20}^2 d_{10}^3)}{d_{20}^3 d_{10}^2 k_2 - d_{10}^3 d_{20}^2 k_1} \\ \lambda = \frac{2 k_1 k_2 (d_{10}^2 d_{20}^3 - d_{10}^3 d_{20}^2)}{(k_1 - k_2) d_{10}^2 d_{20}^2} \end{cases}$$

Um die im Vorstehenden theoretisch behandelten Methoden anwenden zu können, ist es vor allen Dingen nothwendig, einen Motor zu finden, mittels dessen man das äussere Gefäss in gleichmässige Rotation versetzen kann.

Bei den hier zu beschreibenden Versuchen kam ein *phonisches Rad* nach De la Cour zur Anwendung.

Um die Drehgeschwindigkeit des äusseren Gefässes variiren zu können, trieb man mit dem phonischen Rad zunächst eine hölzerne Rolle, welche Schnurläufe von verschiedenem Radius trug. Diese Rolle ihrerseits trieb dann das Gefäss. Dabei geschah die Uebertragung der Bewegung entweder durch Schnüre, oder durch eine dünne Kette.

Die Messung der Dauer einer Umdrehung geschah mit Hülfe eines als Chronograph fungirenden Morseapparates. Der Strom des letztern wurde von Secunde zu Secunde durch das Pendel einer Wanduhr geschlossen, und er schloss sich ferner, sobald das rotirende Gefäss eine bestimmte Stellung erreichte, indem dann ein mit dem Gefäss fest verbundener Platindrath durch eine Quecksilberkuppe streifte.

Der Chronograph wurde etwa eine Minute lang in Gang gehalten, und während dieser Zeit der Ablenkungswinkel des innern Körpers gemessen. Dann wurde mittels eines Glasmaassstabes die Lage zweier zu Anfang und zu Ende des erhaltenen Papierstreifens gelegener Marken zu den benachbarten Secundenmarken bestimmt und die dazwischen liegenden Secunden und Umdrehungen ausgezählt.

Die *Messung des Ablenkungswinkels* des innern Körpers geschah durch Ablesung mit Spiegel und Scala.

Der innere Körper war in allen Fällen bifilar aufgehängt. Bei den Kugeln war es wichtig, dem ganzen Bifilar kleine Hebungen und Senkungen ertheilen zu können und in allen

Fällen war es wünschenswerth, das untere Ende des Bifilars gegen verticale Verschiebungen in Folge von Temperaturänderungen möglichst zu schützen.

Um beide Zwecke zu erreichen war das obere Bifilarende in folgender Weise befestigt: die Messingbacken, welche die Drähte hielten, sassen an dem einen Ende eines um eine horizontale Axe drehbaren Hebels. Das dem Bifilar abgewandte Ende des Hebels war mit einem Gewicht beschwert, dessen Drehmoment grösser war, als das der grössten an das Bifilar zu hängenden Masse. Von dem Ende des Hebels, an welchem das Bifilar hing, führte ein Draht nach unten, wo er mit Hülfe einer Schraube angezogen werden konnte. Die Länge dieses Drahtes war so gewählt, dass der Hebel etwa horizontal stand. Anziehen oder Nachlassen der Schraube gab dann Senkung oder Hebung des Bifilars.¹⁾

Ausserdem war, wenn der erwähnte Draht aus demselben Material bestand, wie die Bifilardrähte, eine Höhenänderung des unteren Bifilarrandes in Folge von Temperaturschwankungen fast ganz ausgeschlossen. Denn wenn das Bifilar sich verlängerte, so verlängerte sich auch der Draht und da die Länge beider nahe gleich war, so muss das untere Ende des Bifilars fast genau in der alten Höhe verharren.

Zur Anwendung kamen in allen Fällen Messingdrähte, deren Durchmesser je nach der Schwere der Belastung von 0,1 mm bis 0,2 mm variirte.

Das *Drehmoment des Bifilars* wurde durch die Beobachtung von Schwingungsdauern in folgender Weise gemessen.

An das Bifilar wurde das Gestell eines zur Bestimmung der absoluten Horizontalintensität des Erdmagnetismus gebrauchten Magnetometer angehängt.

Dasselbe trug in der üblichen Weise Zapfen zum Aufsetzen von Zusatzgewichten, und zwar waren zwei Paar solcher Zapfen vorhanden. Der Magnet war durch einen Kupferstab ersetzt.

1) Die hier beschriebene Art der Befestigung des obern Bifilarendes ist einer im Königsberger physikalischen Institut gebräuchlichen nachgebildet, deren Kenntniss ich einer mündlichen Mittheilung des Hrn. Prof. Voigt zu Göttingen verdanke.

Aus den Schwingungszeiten, die man ohne Gewichte und mit den Gewichten in den beiden verschiedenen Stellungen beobachtet, kann man dann das Moment des Biflars in bekannter Weise finden. Die erreichte Genauigkeit war eine sehr befriedigende.

Die Bestimmung der Radien der Kugeln und Cylinder geschah durch Wägung in Luft und Wasser. Bei den Cylindern wurde dann noch die Höhe mit dem Kathetometer gemessen.

Hohlkugel und Hohlcyylinder wurden erst leer, dann mit Wasser gefüllt gewogen.

Die Kugeln waren aus Messing gefertigt und alle mit der Flüssigkeit in Berührung kommende Flächen waren vergoldet.

Die Hohlkugel von 3,0022 cm Radius war längs eines horizontalen grössten Kreises durchschnitten; die obere Halbkugel war ihrerseits noch einmal durch einen verticalen Schnitt in zwei Quadranten getheilt.

Sämmtliche Theile stiessen mit breiten Rändern aneinander und wurden durch Schrauben, welche diese Ränder aneinanderpressten, befestigt.

Die beiden oberen Quadranten umschlossen eine axiale cylindrische Oeffnung von 0,61 cm Durchmesser.

Unten sass die Kugel auf einer Stahlaxe auf, die in einer cylindrischen und einer konischen Führung lief. Sie endete in einer Spitze, die auf dem Kopf einer Schraube ruhte.

Auf die Axe wurde eine Messingrolle zur Aufnahme des treibenden Fadens gesteckt. Diese trug gleichzeitig den erwähnten Platinstift für den Quecksilbercontact.

Die innern Kugeln, deren drei von 1,5046, 2,0045 und 2,5024 cm Radius vorhanden waren, trugen in der Verlängerung eines Durchmessers einen Messingdraht von 0,26 cm Durchmesser, welcher durch die obere Oeffnung in der Hohlkugel hindurchgeführt und an den untern Messingbacken des Biflars befestigt werden konnte.

Die Einfüllung der Flüssigkeit in den Apparat geschah in folgender Weise: Nachdem die obere Hälfte der Hohlkugel entfernt war, wurde soviel Wasser in die untere gegossen, dass nach Eintauchen der innern Kugel dieses bis zum Rand der untern Hälfte stand.

So wurde das Anhängen von Luftblasen an der untern Hälfte der innern Kugel vermieden.

Dann wurden die beiden oberen Quadranten aufgeschraubt, die Fugen mit Klebwachs gedichtet und nun mit einer Pipette durch die obere Oeffnung der Hohlkugel soviel Wasser nachgefüllt, bis die ganze Kugel und auch der Canal am oberen Ende derselben voll waren.

Es kam dabei leicht vor, dass die Bildung einer Luftblase in dem erwähnten Canal ein Ueberfliessen des Wassers verursachte, ehe die Kugel ganz gefüllt war.

Um hieraus etwa entspringende Irrthümer zu vermeiden, war aus den Dimensionen der Kugeln die zur Füllung nothwendige Wassermenge berechnet, so dass controlirt werden konnte, ob die Kugel thatsächlich bis oben gefüllt sei.

War die Füllung vollendet, so galt es, die beiden Kugeln concentrisch zu stellen.

Diese Einstellung wurde in der Weise erreicht, dass man nach dem Augenmaass die äussere Kugel mit ihrem Gestell so lange verschob, bis der Trägerdraht der innern Kugel in der Mitte des Canales der Hohlkugel erschien.

Dieser Draht trug in passender Höhe eine Marke, welche genau auf den oberen Rand des Canals durch Heben oder Senken des Biflars eingestellt wurde. Die Marke war so angebracht, dass dann die Centren beider Kugeln gleiche Höhe hatten.

Bei den ersten Vorversuchen stellte es sich heraus, dass die so beschriebene Anordnung nicht gestattete, die Grösse der Drehgeschwindigkeit unbegrenzt wachsen zu lassen.

Während nämlich bei kleinen Geschwindigkeiten die innere Kugel sich thatsächlich nur um eine Verticalaxe drehte und sich bei einem bestimmten Ablenkungswinkel einstellte, resp. hier um eine Ruhelage regelmässige kleine Schwankungen ausführte, trat bei schnellerem Drehen ein „konisches Pendeln“ der Kugel und des ganzen Biflars ein, so dass die erstere aus der concentrischen Stellung mit der Hohlkugel hinaus und nach dem Rande zu gedrängt wurde.

Die Beobachtungen wurden daher auf kleinere Geschwindigkeiten beschränkt.

Uebrigens änderte das Pendeln die Ablenkung nicht merk-

lich, so lange der Trägerdraht noch von der Canalwand frei war, und nur das Auf- und Niederschwanken der Scala und die etwas unruhigere Einstellung zeigt an, dass es eingetreten sei.

Die Kugeln waren vor Beginn der Beobachtungen sorgfältig mit Kalilauge und Alkohol vom Fett befreit. Das angewandte Wasser war destillirtes und war unmittelbar vor den Versuchen frisch ausgekocht.

Als Temperatur der untersuchten Flüssigkeit musste die der umgebenden Luft angenommen werden, da sich ein Thermometer in die Hohlkugel nicht einführen liess.

Ausser den ausführlichen Beobachtungen mit Wasser wurde in genau der nämlichen Weise eine kurze Reihe von Versuchen mit Alkohol angestellt.

Der innere Cylinder war, wie die innere Kugel bifilar aufgehängt. Doch war die Suspension diesmal etwas anders angeordnet, als bei den Kugeln.

Es wurde einfach ein einziger Draht mit seinen beiden Enden in die auch bei den Kugeln benutzten oberen Messingbacken geklemmt und unten über eine leicht in Spitzen bewegliche Rolle von etwa zwei Centimeter Durchmesser geführt. Eine Gabel wurde durch die Axe dieser Rolle getragen und an dieser Gabel hing der innere Cylinder.

Wie die coaxiale Justirung der beiden Cylinder erreicht wurde, soll hier nicht näher auseinandergesetzt werden. Es wird in dieser Beziehung auf die Dissertation des Verfassers (p. 39) verwiesen.

Es standen ein Hohlcyylinder und drei innere Cylinder zur Verfügung, welche, wie die Kugeln, aus Messing gefertigt und vergoldet waren.

Der Hohlcyylinder hatte einen Radius von 2,8985 cm. Der Abstand zwischen seinem oberen Rand und der Grundfläche betrug 17,10 cm.

Die Radien und Höhen der drei innern Cylinder hatten folgende Werthe

$$\begin{array}{ll} r_1 = 1,4281 \text{ cm} & h_1 = 14,321 \text{ cm} \\ r_2 = 1,9079 \text{ cm} & h_2 = 14,321 \text{ cm} \\ r_3 = 2,4026 \text{ cm.} & h_3 = 14,315 \text{ cm.} \end{array}$$

Zur Bestimmung der Höhen, bis zu welchen die Flüssig-

keit am innern Cylinder emporreicht, wurden verschiedene Methoden zur Anwendung gebracht.¹⁾ Am zweckmässigsten erwies sich schliesslich die des Auswägens der verwandten Flüssigkeitsmenge. Kennt man durch die Wägung deren Volumen, kennt man ferner den Bodenabstand der beiden Cylinder und deren Radien, so lässt sich die Höhe berechnen.

Ueber die Reinigung der Cylinder von Fett und über die Behandlung speciell des zur Beobachtung verwandten Wassers gilt das nämliche, was oben bei den Kugeln hierüber gesagt wurde.

In Betreff der die Resultate der Beobachtungen mit den Kugeln enthaltenden ausführlichen Tabellen sei wieder auf die Originalabhandlung verwiesen. Nur ein Satz möge als Beispiel hier Platz finden. Als innere Kugel wurde die kleinste vorhandene verwandt. A bedeutet den Scalenabstand, u den Ausdruck $\frac{\mu}{\varphi}$, n den auf Winkel reducirten einseitigen Ausschlag in mm, ϑ die mittlere Temperatur während der Beobachtungsreihe, k ist berechnet nach Formel (2). Dann war

$A = 2290$		$\log u = 3,14680$		$\vartheta = 19,7$	
n	t	nt	σ_0	μ	k
15,8	3,19	50,5	1,97	4,82	0,0250
20,7	2,61	54,1	2,40	6,32	0,0269
30,4	1,94	59,0	3,24	9,31	0,0293
31,3	1,91	59,7	3,30	9,59	0,0296
39,1	1,61	63,0	3,90	12,0	0,0313
41,0	1,55	63,7	4,05	12,5	0,0316
51,4	1,32	67,5	4,78	15,7	0,0337
52,2	1,30	67,8	4,84	16,0	0,0337
67,7	1,08	72,9	5,83	20,7	0,0362
77,0	0,98	75,2	6,43	23,6	0,0374
89,0	0,88	78,2	7,14	27,2	0,0388
101,3	0,80	80,5	7,87	31,0	0,0402.

Die Formel, welche wir früher für μ aufgestellt haben zeigt, dass das Product $\varphi \cdot t$, also auch das Product $n \cdot t$ von der Drehgeschwindigkeit unabhängig sein soll. Diese Unabhängigkeit würde sich in derselben Weise aus den Formeln ergeben haben, wenn wir kein Haften, sondern ein Gleiten der Flüssigkeit an der Wand angenommen hätten.

Sehen wir nun hierauf die Columnne $n \cdot t$ des vorstehenden Beobachtungssatzes durch, so zeigt sich ein höchst eigen-

1) S. Brodmann, l. c. p. 40 ff.

thümliches Resultat: die von der Theorie geforderte Constanz des Productes $n \cdot t$ ist thatsächlich auch nicht angenähert vorhanden. $n \cdot t$ zeigt vielmehr ein starkes Wachsen mit wachsender Drehgeschwindigkeit.

Dieses Resultat hat sich ausnahmslos in allen überhaupt angestellten Versuchsreihen wiederholt, gleichgültig, welche Kugel als innere verwandt, oder wie gering auch die Drehgeschwindigkeit gewählt wurde (t wurde in einzelnen Sätzen bis nahe 21'' gesteigert).

Um die Beobachtungen für ein und dieselbe Kugel sämmtlich mit einander vergleichbar zu machen, wurde dann σ_0 und μ berechnet, und die Curve $\mu = f(\sigma_0)$ construirt.

Man sieht aus der Figur, dass diese Curven, welche theoretisch gerade Linien durch den Anfangspunkt darstellen sollten, in Wahrheit eine ganz andere Gestalt haben, und dass namentlich für kleine Werthe σ die Curven sich durchaus nicht in ihrer Gestalt einer Geraden nähern.

Bei dieser Inconstanz von $n \cdot t$ oder $\frac{\mu}{\sigma_0}$ kann natürlich auch k keinen constanten Werth bekommen. Es wächst vielmehr ebenfalls stark mit wachsender Geschwindigkeit.

Die Frage ist nun, woraus sich dieser Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung erklären lässt.

Dass zufällige Beobachtungsfehler die Ursache sein sollten ist unwahrscheinlich, schon des regelmässigen Verlaufes der

Curve $\mu = f(\sigma_0)$ wegen. Es wurde ferner direct versucht, ob Fehler in der concentrischen Justirung beider Kugeln einen merkbaren Einfluss hätten. Aber weder seitliche, noch verticale Excentricität zeigten einen solchen. In allen Fällen war nur eine grössere Unruhe der Einstellung, keine Aenderung des Ausschlages zu bemerken.

Temperaturveränderungen können ebenfalls nicht als Grund der Erscheinung angesprochen werden. Dieselbe blieb unverändert in ihrem allgemeinen Charakter, ob während der Dauer einer Beobachtungsreihe die Temperatur stieg oder fiel.

Auch der Verdacht, als handle es sich um Verunreinigungen, welche sich allmählich dem Wasser beigemischt und so seine Zähigkeit erhöht hätten, wurde durch passende Anordnung einer Beobachtungsreihe als grundlos nachgewiesen.

Die beobachtete Erscheinung kann ferner nicht darauf zurückgeführt werden, dass die Fäden des Bifilars etwa nicht gleichmässig gespannt gewesen seien.

Abgesehen von der Regelmässigkeit, mit welcher die Erscheinung bei den verschiedenen Bifilaren, mit denen beobachtet wurde, wiederkehrte, zeigt eine einfache Ueberlegung, dass, falls diese Erklärung zutreffend wäre, die Curve $\mu = f(\sigma_0)$ der Axe des σ_0 ihre concave Seite zuwenden müsste, während im Gegentheil ihre convexe Seite sich jener Axe zukehrt.

Endlich könnte man noch denken, die Reibung, welche der Trägerdraht der innern Kugel in dem mit Flüssigkeit gefüllten Canal der Hohlkugel erleidet, hätte die Erscheinung bedingt.

Aber einerseits hätte das dieser Reibung entspringende Drehmoment seinerseits der Drehgeschwindigkeit proportional sein müssen, könnte also mit der Abweichung des Gesamtmomentes von dieser Proportionalität nichts zu thun haben, und andererseits zeigt Rechnung und Beobachtung gleichmässig, dass der in Rede stehende Einfluss unmerklich war.

Durch Beobachtungsfehler erscheint hiernach der Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung nicht erklärlich.

Unsere Versuche bestätigen also das Resultat, welches Elie aus seinen Beobachtungen geschlossen hatte; die Methode der concentrischen Kugeln ergiebt keine constanten, sondern mit der Drehgeschwindigkeit wachsende Werthe für den Reibungscoefficienten k .

Daraus, dass die für gleiche Geschwindigkeit und verschiedene Kugeln gefundenen Werthe k nicht übereinstimmen, dürften wir unter diesen Umständen kaum berechtigt sein, weitere Schlüsse zu ziehen.

Beweisen nun unsere Versuche in der That, dass der in unseren Differentialgleichungen eingeführte Coefficient k von der Geschwindigkeit abhängt, oder mit anderen Worten, dass jene Differentialgleichungen, physikalisch betrachtet, falsch sind?

Elie schliesst in dem citirten Aufsatz in der That so. Es scheint mir aber, als sei der Schluss kein zwingender. Denn, wie wir in der theoretischen Entwicklung wiederholt betonten, sind die Formeln für die Kugelmethode nur unter gewissen Vernachlässigungen abzuleiten gewesen, und es erscheint die Frage berechtigt, ob denn nicht vielleicht die Inexactheit der Behandlung an dem Widerspruch zwischen Theorie und Experiment Schuld sei.

Die Wahrscheinlichkeit dieser Erklärung muss sehr vergrössert werden, wenn man sieht, wie bei dem ganz ähnlichen Experiment mit den Cylindern, welches exacte Herleitung der Formeln gestattet, die Widersprüche zwischen Theorie und Beobachtung fortfallen.

Auch für die mit den Cylindern erhaltenen Resultate soll hier nur ein kurzer Auszug aus den ausführlichen Tabellen der Originalabhandlung gegeben werden.

Vorher sind jedoch noch folgende Punkte hervorzuheben. Die Theorie, wie wir sie vorher auseinandergesetzt haben, nimmt an, es lägen zwei Beobachtungen bei der nämlichen Drehgeschwindigkeit und dem nämlichen Bodenabstand beider Cylinder, aber verschiedenen Wasserhöhen vor. Nun sind genau gleiche Werthe der Drehgeschwindigkeit bei zwei verschiedenen Beobachtungen kaum erreichbar. Deswegen sind bei zusammengehörigen Sätzen die Scalenausschläge des einen Satzes durch lineare Interpolation auf diejenigen Geschwindigkeiten corrigirt worden, bei denen die Beobachtungen des andern Satzes erhalten waren. Diese Correction erreichte übrigens niemals einen irgendwie erheblichen Betrag.

Zweitens ändert sich auch der Bodenabstand der Cylinder etwas von Satz zu Satz. Die Ursache hiervon ist der wech-

selnde Auftrieb, den der innere Cylinder erfährt und die hierdurch bedingte Dehnung oder Verkürzung der elastischen Bifilardrähte.

Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, wurde unter gewissen vereinfachenden Annahmen eine Correctionsrechnung durchgeführt, auf deren Einzelheiten hier nicht eingegangen werden soll. Sie sind in der Originalabhandlung ausführlich erörtert. Die Verbesserung, die so an den Werth für k anzubringen ist, wird in der Tabelle durch δk bezeichnet, während k_0 den unverbesserten Werth dieses Coefficienten bedeutet. Endlich ist zu erwähnen, dass der Constanthaltung der Temperatur der Flüssigkeit während der Beobachtung besondere Sorgfalt gewidmet wurde.

Es stand ein Blechgefäß in der Gestalt eines Hohlzylinders zur Verfügung, in welches der rotirende Cylinder eingesetzt wurde, und welches denselben möglichst eng einschloss, ohne natürlich seine Drehung zu hindern. Dieses Blechgefäß wurde mit Wasser von 15° gefüllt. Die Beobachtungen wurden dann erst begonnen, wenn auch die zu untersuchende Flüssigkeit diese Temperatur angenommen hatte und während der Beobachtung wurde nöthigen Falls durch Zugießen von kaltem Wasser oder durch Anwärmen mittelst eines Bunsenbrenners dafür gesorgt, dass die Temperatur des Wassers in dem Blechgefäß sich nicht wesentlich änderte.

So gelang es, die Temperaturschwankungen des untersuchten Wassers innerhalb enger Grenzen, etwa $0,4^\circ$, zu halten.

Zunächst wollen wir drei Sätze aus den Beobachtungen mit Wasser hier anführen, welche je einem der drei innern Cylinder entsprechen.

1. Kleinster Cylinder.

t	k_0	δk	k
13,039	0,01133	+ 0,00003	0,01136
6,987	0,01148	+ 0,00003	0,01151
4,743	0,01162	+ 0,00004	0,01166
3,574	0,01124	+ 0,00004	0,01128
2,923	0,01161	+ 0,00005	0,01166
$h_1 = 11,909$	$h_2 = 5,137$	$\vartheta_1 = 15,3$	$\vartheta_2 = 14,85$

2. Mittlerer Cylinder.

t	k_0	δk	k
13,008	0,01075	+ 0,00006	0,01081
6,916	0,01092	+ 0,00007	0,01099
4,703	0,01088	+ 0,00008	0,01096
3,553	0,01095	+ 0,00008	0,01103
2,889	0,01092	+ 0,00009	0,01101
$h_1 = 11,417$	$h_2 = 7,288$	$\vartheta_1 = 15,15$	$\vartheta_2 = 14,95.$

3. Grösster Cylinder.

t	k_0	δk	k
13,051	0,00977	+ 0,00002	0,00979
6,922	0,01004	+ 0,00002	0,01006
4,708	0,01006	+ 0,00002	0,01008
3,554	0,01019	+ 0,00002	0,01021
2,906	0,00989	+ 0,00003	0,00992
$h_1 = 11,205$	$h_2 = 7,641$	$\vartheta_1 = 15,07$	$\vartheta_2 = 14,90.$

Sehen wir diese Werthe von k durch, so fällt uns sofort der grosse Unterschied auf, den hier die Resultate gegen die bei den Kugeln erhaltenen zeigen:

k ist merklich von der Drehgeschwindigkeit unabhängig.

Die Schwankungen, die sein Werth zeigt, halten sich innerhalb enger Grenzen, so lange wir bei ein und demselben Cylinder bleiben und ein Fortschritt in einem bestimmten Sinne ist nicht zu bemerken.

Noch überzeugender, als der hier mitgetheilte kurze Auszug beweisen das die Originaltabellen.

Unter Benutzung der sämtlichen Beobachtungen, insoweit sie als definitive anzusehen sind, berechnen sich für die den einzelnen Cylinder entsprechenden Mittelwerthe von k , sowie für die wahrscheinlichen Fehler dieser Mittelwerthe, wie sie sich unmittelbar aus den Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom Mittel ergeben, folgende Werthe:

1. für den kleinsten Cylinder

$$k_1 = 0,011317 \pm 0,000028;$$

2. für den mittleren Cylinder

$$k_2 = 0,011143 \pm 0,000038;$$

3. für den grössten Cylinder

$$k_3 = 0,010485 \pm 0,000049.$$

An diesen Werthen ist der folgende Umstand zu beachten: k nimmt ständig ab vom kleinsten bis zum grössten Cylinder, und zwar liegt der Betrag dieser Abnahme weit über den wahrscheinlichen Fehlern der Mittel.

Wir müssen uns fragen, ob vielleicht ein constanter Fehler die Beobachtungen mit den verschiedenen Cylindern verschieden beeinflusst haben kann, sodass dadurch sich die bemerkten Abweichungen erklären lassen.

Ein solch constanter Fehler könnte in der Bestimmung der Cylinderradien gesucht werden.

Um über die Wahrscheinlichkeit einer solchen Deutung ein Urtheil zu gewinnen, müssen wir den Einfluss untersuchen, den ein Fehler in der Bestimmung von r auf den schliesslichen Werth von k hat.

Es fragt sich vor Allem, wie genau die Bestimmung der r gewesen ist.

Nehmen wir an, die Wägungen seien auf 0,1 g genau ausgeführt, die Höhen der Cylinder auf 0,01 cm genau gemessen, so erhält man für die wahrscheinlichen Fehler der r folgende Werthe:

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= 0,00093 & \delta r_2 &= 0,00089 \\ \delta r_3 &= 0,00096 & \delta r_0 &= 0,00091. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Werthe für $\frac{\partial k}{\partial r}$ und δr , sowie unter Berücksichtigung der von den Fehlern der Radien unabhängigen sonstigen Unsicherheit des Werthes k , wie sie sich in den oben aus den Abweichungen vom Mittel berechneten wahrscheinlichen Fehlern dieser Grösse ausspricht, findet man für dieselben in den Beobachtungen mit den drei Cylindern folgende, nun auch die Fehler der Radien mit enthaltenden wahrscheinlichen Fehler:

1. für den kleinsten Cylinder

$$k_1 = 0,011317 \pm 0,000034;$$

2. für den mittleren Cylinder

$$k_2 = 0,011143 \pm 0,000043;$$

3. für den grössten Cylinder

$$k_3 = 0,010485 \pm 0,000058.$$

Dabei betragen die Differenzen der Werthe k für die einzelnen Cylinder:

$$k_1 - k_2 = 0,000174 \quad k_1 - k_3 = 0,000832.$$

Wie man sieht, ist die Differenz der Werthe k bedeutend grösser, namentlich wenn man die Beobachtungen des kleinsten und grössten Cylinders combinirt, als die Summe der wahrscheinlichen Fehler. Wir müssen daraus schliessen, dass die Unsicherheit in der Bestimmung der Radien nicht hinreicht, die Abweichung der drei erhaltenen Werthe für k zu erklären.

Die Annahme einer Aenderung des bifilaren Drehmomentes ist ebenfalls ausgeschlossen. Denn es wurde bei den Beobachtungen unter den Cylindern abgewechselt und ein Satz des kleinsten Cylinders eröffnete und schloss die ganze Reihe.

Endlich ist auch die Erklärung abzulehnen, als handle es sich um Fehler in der Massenbestimmung der Cylinder.

So bleibt denn nur die Annahme eines Gleitens der Flüssigkeit an der Wand übrig und es ist jetzt die Aufgabe, den Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus unsern Beobachtungen zu ermitteln.

Wir haben früher schon die Formeln entwickelt, welche für diesen Fall uns gestatten, aus den oben angegebenen Werthen der Grösse k für die einzelnen Cylinder den Werth der beiden absoluten Constanten f und λ zu finden.

Es empfiehlt sich mehr, diesen Weg einzuschlagen, als die fraglichen Grössen aus den directen Beobachtungen zu berechnen.

Denn, wie gleich gezeigt werden soll, bekommen Fehler in der Bestimmung des Ablenkungswinkels des innern Cylinders ein unverhältnissmässig grosses Gewicht, so bald man unter der allgemeineren Annahme f berechnet, und noch in erhöhtem Maasse gilt dies von λ .

In den Mittelwerthen für k dagegen, wie wir sie oben angegeben haben, kann man mit einiger Sicherheit annehmen, dass die Fehler der Bestimmung des Ablenkungswinkels sich wenigstens zum grössten Theil ausgeglichen haben.

Die Genauigkeit, mit welcher so f und λ zu berechnen sind, bleibt allerdings noch immer weit hinter derjenigen,

mit der unsere Methode gestatten würde, k zu finden, falls die Flüssigkeit an der Wand fest haftete.

So erhalten wir:

1. aus den Beobachtungen mit dem kleinsten und mittleren Cylinder

$$\mathfrak{k}_2 = 0,01265 \pm 0,00049 \quad \lambda_{12} = 0,2220 \pm 0,0692;$$

2. aus den Beobachtungen mit dem kleinsten und grössten Cylinder

$$\mathfrak{k}_{13} = 0,01228 \pm 0,00011 \quad \lambda_{13} = 0,3001 \pm 0,0251.$$

Alle Werthe gelten für eine Temperatur von 15° Celsius und die Einheiten sind, wie in der ganzen Arbeit Centimeter, Gramm, Secunde.

Man sieht aus dem Vorstehenden, wie beträchtlich in $\mathfrak{k}$ und λ die wahrscheinlichen Fehler vergrössert sind gegen die der Werthe k .

Es liegt dies daran, dass in unserem Fall die Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial k}$ und $\frac{\partial \lambda}{\partial k}$, besonders die letzteren, äusserst beträchtliche Werthe annehmen. Da ein Fehler in der Bestimmung des Ablenkungswinkels in demselben Verhältniss in k eingeht, so beeinflussen derartige Fehler, wie oben schon betont ist, die Grössen $\mathfrak{k}$ und λ sehr viel bedeutender, als die Werthe von k .

Vergleichen wir die Differenz $\mathfrak{k}_{12} - \mathfrak{k}_{13}$ und $\lambda_{12} - \lambda_{13}$ mit den wahrscheinlichen Fehlern der $\mathfrak{k}$ und λ , so zeigt sich, dass dieselbe kleiner ist, als die Summe der wahrscheinlichen Fehler. Sie erklärt sich daher befriedigend aus den unvermeidlichen Unsicherheiten der Beobachtung.

Wir gehen nun zu einer Vergleichung unserer Resultate mit denen früherer Beobachter über.

Was zunächst die nach der Ausflussmethode bestimmten Werthe k anlangt, so ist zu bemerken, dass dieselben etwas kleiner sind, als der Werth, den wir gefunden haben.

Berechnet man aus der von Helmholtz ¹⁾ nach Poiseuille

1) Helmholtz und Piotrowski: Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. Wien. Ber. Bd. 40. p. 607. 1860.

gegebenen Formel die Werthe von k für die Temperaturen 14° , 15° und 16° , so findet man:

$$k_{14} = 0,01174 \quad k_{15} = 0,01143 \quad k_{16} = 0,01114.$$

Der Werth für 15° unterscheidet sich von dem unsern um etwas weniger als 7 Proc. des letztern.

Dagegen sind die meisten der nach andern Methoden bestimmten Werthe k noch grösser als der unsrige.

So findet Helmholtz aus den Beobachtungen von Piotrowski in unsern Einheiten

$$k = 0,01402 \text{ bei } 24,5^{\circ}.$$

O. E. Meyer¹⁾ berechnet aus Beobachtungen mit oscillirender Scheibe $k = 0,0132$ für $15,5^{\circ}$ Celsius.

Es erscheint hier der Erwähnung werth, dass der Betrag von k_1 , wie wir ihn unter Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an den Wandungen aus den Beobachtungen mit dem kleinsten Cylinder gefolgert haben, fast genau mit dem Poiseuille'schen Werthe übereinstimmt.

Für den Coefficienten λ der Gleitung liegen sehr wenige ältere Angaben vor.

Helmholtz war der erste, der aus den Piotrowski'schen Beobachtungen den Schluss zog, dass bei der Bewegung von Wasser an vergoldeten Flächen ein Haften der Flüssigkeit an der Wand nicht anzunehmen sei.

Wie aber der Werth k , der aus jenen Beobachtungen folgt, grösser ist, als alle sonst gefundenen Werthe dieses Coefficienten, so übersteigt auch der Betrag der Gleitung denjenigen, den wir gefunden haben, bedeutend.

Zur Vergleichung bedient man sich hier bequem der Helmholtz'schen Grösse $A = \frac{k}{\lambda}$.

Aus unsern Werthen für k und λ folgt

$$A = 0,0409 \text{ cm,}$$

während Helmholtz giebt:

$$A = 0,2353 \text{ cm.}$$

1) O. E. Meyer, Crelle's Journal Bd. 59. p. 229. 1861. Pogg. Ann. Bd. 113. p. 55. 193. 1861.

Dagegen stimmt unser Werth merkwürdig gut mit demjenigen, den Helmholtz aus einer Beobachtung von Girard folgert.

Girard fand die Ausflusszeit von $\frac{1}{4}$ Liter Wasser von 0°,5 durch eine Kupferröhre von 1,83 mm Durchmesser und 1790 mm Länge zu 624,5 Secunden, wenn der Druck gleich dem einer Wasserhöhe von 100 mm war.

Helmholtz berechnet hieraus für λ den Werth

$$\lambda = 0,03984 \text{ cm.}$$

In einer neueren Arbeit¹⁾ wird die Gleitung von Wasser auch an Metall bestritten. Der Verfasser weist darauf hin, dass bei engen Röhren die Wassermenge, welche unter sonst gleichen Umständen ausfliesst, sehr beträchtlich grösser sein muss, wenn Gleiten stattfindet, als wenn die Flüssigkeit an den Wandungen haftet. Er stellt dann Beobachtungen mit engen Glasröhren an, die er später inwendig versilbert und weist nach, dass die Ausflussmenge sich nicht verändert hat.

Somit zeigt er, dass Wasser sich an Glas und Metall nicht verschieden verhält. Für Wasser an Glas ergeben aber Poiseuille's Beobachtungen unzweifelhaft ein Haften.

Indess ist doch hier wohl die Frage berechtigt, ob sich denn die Verhältnisse, die innerhalb solcher Röhren herrschen ohne Weiteres mit denen vergleichen lassen, die an der Wand unserer Cylinder vorliegen.

Einmal ist das Metall, an dem die Flüssigkeit sich bewegt in beiden Fällen verschieden.

Zweitens aber erscheint es doch sehr fraglich, ob der Silberüberzug in den Röhren eine der polirten Goldoberfläche unserer Cylinder entsprechende Glätte und Gleichmässigkeit besessen hat. Es ist sogar wahrscheinlich, dass dies nicht der Fall war. Denn erfahrungsgemäss ist bei der Versilberung von Glas auf nassem Wege die freie Silberoberfläche ursprünglich vollkommen matt und wird erst durch Poliren blank und glänzend.

Wir müssen ferner an dieser Stelle kurz auf die oben erwähnte Arbeit von Couette eingehen, in welcher nach der

1) Dampier-Wetham: On the alleged Slipping etc. Lond. Proceedings Vol. 48. p. 225. 1890.

hier geschilderten Methode die innere Reibung von Wasser und von Luft untersucht ist.

Wie schon bemerkt, eignen sich seine Messungen zur Berechnung absoluter Werthe für die Reibungsconstante nicht besonders.

Einmal war die Bestimmung des Drehmomentes, welches der innere Cylinder erfuhr, eine sehr rohe: es wurde durch das Gewicht bestimmt, welches nothwendig war um an bekanntem Hebelarm wirkend den Cylinder in seiner Ruhelage festzuhalten.

Allerdings ist dieser Nachtheil dadurch wieder ausgeglichen, dass die Radien der beiden Cylinder sehr gross, ihre Differenz sehr klein genommen wurde (es war $r_1 = 14,393$ cm, $r_0 = 14,640$ cm) wodurch das Drehmoment einen sehr beträchtlichen Werth erhält. Andererseits bedingt aber eine derartige Anordnung einen neuen, von Couette selbst hervorgehobenen Mangel: es erhalten kleine Fehler in der coaxialen Justirung der beiden Cylinder einen grossen Einfluss auf das Resultat. Die von Couette für excentrische Stellung entwickelte Näherungsformel zeigt, dass die Zunahme des Gesamtmomentes, ein und dieselbe absolute Excentricität beider Cylinder vorausgesetzt, indirect proportional ist dem Quadrat der Differenz der Cylinderradien, direct proportional dem Quadrate einer der Radien.

Ferner dürfte die Art, wie ein Einfluss von Bodenflächen vermieden wurde, theoretisch nicht ohne Bedenken sein und endlich wurde auf die bei der Couette'schen Versuchsanordnung nothwendig eintretende Reibung zwischen festen Theilen gar keine Rücksicht genommen.

Danach kann es kaum überraschen, wenn Couette einen bedeutend grösseren Werth für die Reibungsconstante erhält: er rechnet, da ihm nur ein Paar Cylinder zur Verfügung steht, von vornherein unter Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an der Wand und findet $k = 0,01255$ für $16^{\circ},5$, also einen noch etwas grösseren Werth, als ihn unsere Beobachtungen unter Annahme des Gleitens liefern.

Die Arbeit will aber auch gar keine absolute Bestimmung der Reibungsconstanten geben. Es handelt sich in ihr viel-

mehr um Untersuchung der Reynolds'schen Erscheinungen in anderer Form.

Reynolds¹⁾ hat bekanntlich für den Ausfluss von Wasser durch Röhren gezeigt, dass innerhalb ein und derselben Röhre je nach der Geschwindigkeit der Flüssigkeit zwei vollständig verschiedene Formen der Bewegung herrschen können.

Bei kleiner Geschwindigkeit ist die Bewegung „linear“, dann tritt bei einer, vom Durchmesser der Röhre und der Zähigkeit der Flüssigkeit abhängigen „kritischen“ Geschwindigkeit ein unstetiger Uebergang in eine andere „wellige“ Form der Bewegung ein. Dieses selbe Verhalten hat Couette bei seinem Cylinder gefunden. Bei kleinen Geschwindigkeiten war das Moment der Drehgeschwindigkeit proportional. Bei einer Geschwindigkeit von 55 Drehungen in der Minute trat unstetiges Wachsen des Momentes ein und für weiter gesteigerte Geschwindigkeiten war das Drehmoment der Geschwindigkeit nicht mehr proportional.

Die Differenz der Cylinderradien erreichte bei unseren Beobachtungen sehr viel beträchtlichere Werthe als bei Couette. Die Drehgeschwindigkeit stieg bei uns ferner bis auf 40 Drehungen in der Minute. Obwohl man nun nach Analogie der Reynolds'schen Versuche erwarten sollte, dass die kritische Geschwindigkeit mit zunehmender Differenz der Cylinderradien abnähme, konnte bei unseren Versuchen eine Erscheinung, wie sie Couette beobachtet hat, nicht wahrgenommen werden.

Ausser mit Wasser wurden noch Beobachtungen mit Alkohol, Glycerin und Olivenöl angestellt.

Diese Beobachtungen können insofern noch nicht den Anspruch auf abschliessende Bedeutung erheben, als es nicht möglich war, bei ihnen die Werthe der Cylinderradien so zu variiren, dass die Frage ob Gleiten oder Haften anzunehmen ist, sich sicher beantworten liesse. Doch ist ein grösserer Betrag der Gleitung bei Alkohol durch die Piotrowski'schen Beobachtungen unwahrscheinlich gemacht und noch weniger dürfte man geneigt sein, bei Glycerin und Olivenöl, welche schon dem äusseren Augenschein nach den Wandungen

1) O. Reynolds: An experimental Investigation etc. Lond. Proceedings No. 224, Vol. 35.

viel fester anhängen als Wasser oder Alkohol, der Gleitung einen nennenswerthen Betrag zuzuschreiben.

Damit stimmt gut überein, dass der relative Werth, den frühere Beobachter nach der Ausflussmethode für Alkohol im Vergleich mit Wasser gefunden haben, fast genau den nämlichen Werth für den Coefficienten k für Alkohol ergibt, den man als Mittelwerth aus unseren Beobachtungen berechnet.

Setzt man den Reibungscoefficienten von Wasser gleich 100 so wird für Alkohol der Werth 119,5 angegeben. Legen wir nun für k und Wasser unsern Werth $k = 0,01228$ zu Grunde, so folgt für Alkohol $k = 0,01467$, während das Mittel aus unseren Beobachtungen $k = 0,01459$ gibt.

Für Glycerin und Olivenöl habe ich keine Werthe zum Vergleiche gefunden. Meine Beobachtungen geben im Mittel

1. für Glycerin $k = 2,3395$

2. für Olivenöl $k = 0,9890$.

Bemerkenswerth erscheint besonders, dass auch für die beiden letztgenannten zähen Flüssigkeiten unsere Beobachtungen eine Unabhängigkeit des Reibungscoefficienten von der Geschwindigkeit ergeben.

Werfen wir zum Schluss einen Rückblick auf die gewonnenen Resultate, so können wir dieselben in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Die Beobachtungen mit den concentrischen Kugeln bestätigen das von Elie gefundene Resultat, demzufolge die Versuche, nach der Kirchhoff'schen Formel berechnet, für k Werthe liefern, die zunehmen mit wachsender Drehgeschwindigkeit.

2. Dieses Verhalten ist indess auf das erwähnte Problem beschränkt. Die Cylindermethode, die im Gegensatz zu der erstgenannten, einer exacten theoretischen Behandlung zugänglich ist, liefert für k constante Werthe.

3. Hiernach scheint sich die Ansicht von Margules zu bestätigen, nach der die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in den Differentialgleichungen, d. h. also der Producte aus den Geschwindigkeiten und ihren Differentialquotienten nach den Coordinaten unter Umständen auch für geringe Geschwindigkeiten zu Resultaten führen kann, die mit der Beobachtung in unvereinbarem Widerspruch stehen.

4. Der nach der Cylindermethode gefundene Werth des Reibungscoefficienten ist dem Poiseuille'schen Werthe näher als die meisten der nach andern Methoden gefundenen. Die Beobachtungen bestätigen das von Helmholtz gefundene Resultat, dem zufolge Wasser an vergoldeten Flächen nicht haftet, sondern gleitet.

5. Auch für sehr zähe Flüssigkeiten ist die Methode der Cylinder gut brauchbar und liefert mit der Theorie übereinstimmend, constante Werthe für den Reibungscoefficienten.

Darmstadt, Physikal. Inst., im November 1891.