VI. *Zur Lehre von den Polen eines Stabmagnetes; von Eduard Riecke.*

Die allgemein angenommene Lehre von den Polen eines Stabmagnetes geht aus von der naheliegenden Analogie, welche zwischen einem mit magnetischer Masse erfüllten Raume und den auf diese von dem Erdmagnete ausgeübten Kräften einerseits und zwischen einem mit ponderabler Masse erfüllten Raume und den auf diese von der Erde ausgeübten Gravitationskräften andererseits besteht. So wie man sich diese letzteren Kräfte vereinigt denken kann in dem Schwerpunkte des Körpers, so kann man sich auch die auf das nördliche und südliche Fluidum ausgeübten Parallelkräfte vereinigt denken in zwei Punkten, den Schwerpunkten des nördlichen und südlichen Fluidums. Dieser Analogie der erdmagnetischen Wirkungen mit den Wirkungen der Schwere stehen nun aber einige wesentliche Verschiedenheiten gegenüber, zu deren Betrachtung wir uns wenden wollen. Die Vertheilung der ponderablen Masse im Innern eines Körpers können wir meist als eine gleichmässige voraussetzen; die Lage des Gravitationscentrums hängt daher nur von der Gestalt des Körpers ab. Die Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten im Innern einer Magnetnadel ist eine ungleichförmige; die Lage der magnetischen Schwerpunkte hängt daher ab von dem Gesetze dieser Vertheilung. Nun können wir aber durch die Beobachtung der von einem Magnete ausgeübten Kräfte keine Kenntniss von der wahren Vertheilung des Magnetismus in seinem Innern gewinnen. Das einzige, was durch die beobachteten Wirkungen in eindeutiger Weise bestimmt wird, ist eine solche Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten an der Oberfläche des Magnetes, dass dieselbe jene unbekannte Vertheilung im Innern mit Bezug auf alle äusseren Wirkungen zu ersetzen im Stande ist. Diese Vertheilung ist die von Gauss sogenannte ideale Vertheilung des Magnetismus. Daraus ergibt sich,

dass wir ebenso wenig die wahren Schwerpunkte des im Innern eines Körpers vertheilten Magnetismus aus Beobachtungen zu bestimmen im Stande sind, sondern nur die Schwerpunkte jener Oberflächenbelegung, welche wir als ideale Schwerpunkte oder Pole bezeichnen werden.

Was nun den Vorthail anbetrifft, den uns die Einführung dieser magnetischen Schwerpunkte gewährt, so kann dieser in zwei verschiedenen Richtungen gesucht werden. Einmal können diese beiden Punkte als eine Charakteristik für die Art der Vertheilung des freien Magnetismus betrachtet werden, und insofern erscheint die Vergleichung ihrer Lage bei verschiedenartigen Magneten nicht ohne Interesse. Den weit grössern Vorthail wird man aber geneigt sein eben darin zu erblicken, dass man sich in diesen Polen die unendlich vielen parallelen Kräfte, welche auf die Elemente des magnetischen Körpers von einem fernen magnetischen Punkte ausgeübt werden, vereinigt denken, oder auch umgekehrt, dass man sich in denselben mit Bezug auf Fernwirkungen des Magnetes seinen ganzen freien nördlichen und südlichen Magnetismus concentrirt denken kann. Man sieht nun aber leicht, dass gerade in dem Falle, in welchem die genannten Eigenschaften den Polen in aller Strenge zukommen würden, ihre Einführung jede Bedeutung verliert; denn die Wirkung, welche eine Magnetnadel durch die parallelen vom Erdmagnetismus auf ihre Elemente ausgeübten Kräfte erleidet, hängt gar nicht allein ab von der Menge des in den Polen concentrirten freien Magnetismus, sondern von dem Producte aus diesem Magnetismus und der Entfernung der beiden Pole, d. h. von dem magnetischen Momente. Daraus ergibt sich, dass es gleichgültig ist, ob wir uns den freien Magnetismus in den Polen concentrirt denken, oder irgend welche anderen magnetische Massen in anderen Punkten der Axe; solange nur das Product aus dem Magnetismus und der Entfernung dieser Punkte gleich bleibt, ist auch die Wirkung des Erdmagnetismus dieselbe. Ganz dasselbe gilt aber auch von der Wirkung,

welche ein Magnet in die Ferne ausübt. Auch diese hängt nicht ab von der Menge des in den Polen concentrirten freien Magnetismus, sondern nur von dem magnetischen Momente. Auch hier also können wir der Axe des Magnetes eine willkürliche Länge ertheilen; solange nur das Product ihrer Länge mit dem in den Enden concentrirten Magnetismus gleichbleibt, ist auch die Wirkung dieselbe. Wenn man nun aber zu kleineren Entfernungen der aufeinander wirkenden Magnete herabsteigt, und auch für diese zunächst den freien Magnetismus in den Polen sich concentrirt denkt, so ergibt sich, dass die magnetische Wechselwirkung nun nicht mehr unabhängig ist von der Entfernung der Pole. Die Kenntniss dieser letzteren Punkte ist daher in der That nützlich, sobald es sich um Wirkungen der Magnete in kleineren Entfernungen handelt. Wenn man aber auch für diesen Fall die Analogie mit dem entsprechenden Gravitationsprobleme verfolgt, so ergibt sich, dass für kleinere Entfernungen die freien Magnetismen nicht mehr in den Schwerpunkten concentrirt werden dürfen, sondern in Punkten, welche um so mehr von den Schwerpunkten abweichen, je näher der Punkt, für welchen die Wirkung der Magnetnadel zu bestimmen ist, an die Oberfläche derselben heranrückt, Punkten, deren Lage sich ändert mit der Lage des äussern Punktes, sodass jedem äussern Punkte ein bestimmtes Paar von Concentrationspunkten in eindeutiger Weise entspricht. Da man nun diese letzteren Punkte nicht kennt, da überdies die Anwendung verschiedener Pole für verschiedene Entfernungen die Rechnungen nur verwickeln würde, so hilft man sich dadurch, dass man sagt: die Punkte, in welchen für kleinere Entfernungen die freien Magnetismen concentrirt werden können, werden über gewisse Räume ausgebreitet sein, in deren Mitte sich die magnetischen Schwerpunkte befinden. Diese letztere bestimmen also die Mittel-lage für alle jene unendlich vielen verschiedenen Punkte, und daher kann man an Stelle der variablen Concentrationspunkte die unveränderlichen Schwerpunkte ein für

allemaal substituieren. Diese Annahme ist aber nichts weiter als eine Vermuthung, welche erst einer weitem Prüfung bedarf. Der von den beiden magnetischen Schwerpunkten gebildete Elementarmagnet besitzt zunächst, wie sich aus der Definition des Schwerpunktes unmittelbar ergibt, dasselbe magnetische Moment wie die gegebene Magnetrudel. Zu dieser Eigenschaft würde nun der oben ausgesprochenen Vermuthung zufolge noch die zweite kommen, dass auch für kleinere Entfernungen die Wirkungen jenes Elementarmagnetes dieselben seien, wie die des entsprechenden wirklichen Magnetes. Diese letztere Eigenschaft würde indess nur mit einer gewissen Näherung erfüllt sein, über deren Grad a priori gar nichts zu bestimmen sein wird.

In einer frühern Arbeit¹⁾ habe ich nun gezeigt, dass man im Innern eines Magnetes zwei Punkte bestimmen kann, welche die beiden im Vorhergehenden angeführten Bedingungen ebenfalls erfüllen, und zwar nicht blos in genäherter Weise, wie dies bei den Schwerpunkten mit Bezug auf die zweite Bedingung der Fall ist, sondern in aller Strenge; vorausgesetzt ist dabei nur, dass die vierten Potenzen der Dimensionen der Magnete vernachlässigt werden können gegen die vierte Potenz der Entfernung ihrer Mittelpunkte. Ich werde diese neuen Punkte im Folgenden als äquivalente Pole von den Schwerpunkten oder Polen schlechtweg unterscheiden. Durch die Einführung dieser äquivalenten Pole verlieren die Schwerpunkte ihre Bedeutung nach der Richtung hin, welche wir im Vorhergehenden in zweiter Stelle ausführlicher besprochen haben, da sie eben derjenigen Bedingung, welche die Schwerpunkte nur mit einem unbekannten Grade von Annäherung erfüllen, in aller Strenge genügen. Es ergibt sich ferner, dass alle Methoden der experimentellen Polbestimmung, die sich der Natur der Sache nach auf Beobachtung der Nahewirkung eines Magnetes gründen, nicht zu der Kenntniss der Schwerpunkte, sondern zu der Kennt-

1) Pogg. Ann. CXLIX. p. 62. 1873.

niss der äquivalenten Pole führen, sodass also alle Angaben, welche sich auf die Lage der Magnetpole beziehen, in Wirklichkeit die äquivalenten Pole betreffen. Man wird somit zunächst die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen freien Magnetismus und die äquivalenten Pole, durch welche der Magnet in seinen Nahwirkungen ersetzt werden kann, als zwei wesentlich verschiedene Punktpaare im Innern desselben zu betrachten haben. Weiterhin kann man dann fragen, ob nicht in Wirklichkeit jene beiden verschiedenen Punktpaare so nahe zusammenliegen, dass sie praktisch als sich deckend betrachtet werden können. Die genauere Untersuchung dieser Frage bildet die Veranlassung des folgenden Aufsatzes. Der erste Abschnitt behandelt das Problem der Wechselwirkung zweier Magnetnadeln nach der Methode von Gauss, schreitet aber bis zu der vollständigen Darstellung der in der Entwicklung auftretenden Coëfficienten fort. Der zweite Abschnitt zeigt, dass die Einführung der äquivalenten Pole eine anschauliche Interpretation jener Coëfficienten zu geben vermag, und dass durch dieselbe das Problem der Wechselwirkung zweier Magnete in derselben Allgemeinheit gelöst wird, wie durch die Entwicklung von Gauss; derselbe enthält ausserdem die Formeln, durch welche die Distanz der äquivalenten Pole bestimmt wird, wenn die Vertheilung des Magnetismus im Innern einer Magnetnadel bekannt ist. Im dritten Abschnitte wird für eine Reihe von Magneten die Lage der Schwerpunkte und der äquivalenten Pole bestimmt; es ergibt sich, dass diese beiden Punktpaare im allgemeinen eine wesentlich verschiedene Lage im Innern des Magnetes besitzen und nur in ganz besonderen Fällen sich gegenseitig decken. Der vierte Abschnitt bespricht den eigenthümlichen Fall des Imaginärwerdens der äquivalenten Pole; der fünfte endlich die Anwendung der gefundenen Resultate auf die Theorie der Magnetometer.

I. Theorie der Gauss'schen Ablenkungsbeobachtungen. Die folgenden Betrachtungen schliessen

sich im wesentlichen an die von Gauss in seiner fundamentalen Abhandlung: *Intensitas vis magneticae ad mensuram absolutam revocata* gegebenen Entwicklungen an. Die Bezeichnungen sind nur insoweit verändert, als es der specielle Zweck der vorliegenden Untersuchung erfordert.

Die bewegliche Hilfsnadel sei an einem drehbaren verticalen Faden aufgehängt; der Anfangspunkt h eines rechtwinkligen Coordinatensystems x, y, z befinde sich im Innern der Nadel in der durch diesen Suspensionsfaden bestimmten Verticalen; die x -Axe desselben liege horizontal in der Richtung des magnetischen Meridians, die y -Axe sei gegen Osten, die z -Axe vertikal nach oben gerichtet. Das ganze Volumen der Nadel werde in unendlich kleine Elemente zerlegt, deren Coordinaten durch x, y, z , deren freier Magnetismus durch e bezeichnet werden möge. Ebenso seien X, Y, Z die Coordinaten irgend eines Elementes der fest aufgestellten ablenkenden Magnetnadel, E der in demselben enthaltene freie Magnetismus. Die Entfernung irgend zweier Elemente E und e werde bezeichnet durch r . Die magnetischen Axen der beiden Nadeln seien horizontal und in derselben Ebene, der xy -Ebene, gelegen. Die Coordinaten der Theilchen der beweglichen Nadel beziehen wir nun andererseits auf ein mit derselben fest verbundenes Coordinatensystem, dessen Mittelpunkt mit dem Punkte h , dessen erste Axe a mit ihrer magnetischen Axe zusammenfallen möge. Die zweite Axe b sei ebenso wie a horizontal und liege auf der rechten Seite von a , die Axe c gehe vertical nach oben. Im Innern der zweiten Magnetnadel nehmen wir in der Ebene xy einen Punkt h' welcher bestimmt wird durch seine Entfernung R von h , und durch den Winkel ψ , welchen die Linie hh' mit dem magnetischen Meridian einschliesst, die Coordinaten der Elemente der zweiten Magnetnadel sollen aber nicht bezogen werden auf diesen Punkt h' , sondern auf einen Punkt H , welchen wir als den magnetischen Mittelpunkt der Nadel bezeichnen werden, und dessen relative Coordinaten gegen den Punkt h' gleich α, β, σ sein mögen. Den Punkt H machen wir zum

Anfangspunkt eines mit der zweiten Nadel fest verbundenen Coordinatensystems A, B, C , dessen erste Axe mit ihrer magnetischen Axe zusammenfallen möge. Die zweite Axe B sei horizontal nach rechts, die Axe C vertical nach oben gerichtet. Der Winkel, welchen die magnetische Axe der beweglichen Hilfsnadel mit dem magnetischen Meridiane bildet, sei u , der Winkel der Axe der festliegenden Hauptnadel mit dem Meridiane sei U . Unter diesen Umständen ist:

$$x = a \cos u - b \sin u$$

$$y = a \sin u + b \cos u$$

$$z = c$$

$$X = R \cos \psi + a + A \cos U - B \sin U$$

$$Y = R \sin \psi + \beta + A \sin U + B \cos U$$

$$Z = C.$$

$$r^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2.$$

Das Potential der festliegenden auf die bewegliche Nadel ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\sum \frac{Ee}{r},$$

wo die Summe über sämtliche Combinationen der Elemente E und e auszudehnen ist. Setzen wir ferner:

$$m = \sum ea$$

und bezeichnen wir den Winkel, welchen die Torsionsruhelage des Suspensionsdrahtes mit dem magnetischen Meridiane bildet, durch N , so ist die Bedingung für das Gleichgewicht der Nadel:

$$-\frac{\partial}{\partial u} \sum \frac{Ee}{r} - Tm \sin u + \Theta(N - u) = 0,$$

wo T die Horizontalintensität des Erdmagnetismus. Die Entwicklung des Potentials nach Potenzen der Entfernung R ergibt sich am einfachsten, wenn man nach Gauss die Entfernung r dadurch bestimmt, dass man ihre Projectionen nach drei zueinander senkrechten Richtungen berechnet, von welchen die erste zusammenfällt mit der Richtung R , die zweite horizontal nach rechts, die dritte vertical nach oben gerichtet ist. Es wird unter diesen

Voraussetzungen die Entfernung r gegeben durch den Ausdruck:

$$r^2 = (R + k)^2 + l^2,$$

wo:

$$k = \alpha \cos \psi + \beta \sin \psi + A \cos (\psi - U) + B \sin (\psi - U) \\ - \alpha \cos (\psi - u) - b \sin (\psi - u),$$

$$l^2 = \left\{ \alpha \sin \psi - \beta \cos \psi + A \sin (\psi - U) - B \cos (\psi - U) \right\}^2 + (C - c)^2 \\ - \alpha \sin (\psi - u) + b \cos (\psi - u) \}^2 + (C - c)^2.$$

Durch Entwicklung von $\frac{1}{r}$ nach Potenzen von R ergibt sich dann, wenn man berücksichtigt, dass $\sum E = \sum e = 0$, die folgende Reihe für das Potential:

$$\sum \frac{Ee}{r} = \frac{1}{R^3} \sum Ee (k^2 - \frac{1}{2} l^2) - \frac{1}{R^4} \sum Ee (k^3 - \frac{3}{2} k l^2) \\ + \frac{1}{R^5} \sum Ee (k^4 - 3 k^2 l^2 + \frac{3}{8} l^4) - \frac{1}{R^6} \sum Ee (k^5 - 5 k^3 l^2 + \frac{15}{8} k l^4) \\ + \dots$$

Mit Vernachlässigung der höheren Potenzen wird somit das Potential dargestellt durch einen Ausdruck von der Form:

$$\sum \frac{Ee}{r} = \frac{F}{R^3} + \frac{F'}{R^4} + \frac{F''}{R^5} + \frac{F'''}{R^6}.$$

Setzen wir ferner:

$$-\frac{\partial F}{\partial u} = f, \quad -\frac{\partial F'}{\partial u} = f', \quad -\frac{\partial F''}{\partial u} = f'', \quad -\frac{\partial F'''}{\partial u} = f''',$$

so ergibt sich für das Drehungsmoment eine Reihe von ganz derselben Form:

$$\frac{f}{R^3} + \frac{f'}{R^4} + \frac{f''}{R^5} + \frac{f'''}{R^6},$$

und damit wird die Gleichgewichtsbedingung der beweglichen Nadel:

$$Tm \sin u + \Theta (u - N) = \frac{f}{R^3} + \frac{f'}{R^4} + \frac{f''}{R^5} + \frac{f'''}{R^6},$$

eine Gleichung, in welcher man an Stelle von $\Theta (u - N)$ auch setzen kann $\Theta \sin (u - N)$. An Stelle der Torsionsruhelage N kann nun in die Gleichung der Winkel u^0 eingeführt werden, welchen die Hilfsnadel ohne Einwirkung

der Hauptnadel mit dem magnetischen Meridian einschliesst. Für diesen Winkel ist:

$$o = Tm \sin u^0 + \Theta \sin (u^0 - N).$$

Es ist ferner:

$$\left\{ Tm \sin u + \Theta (u - N) \right\} \cos u^0 = Tm \sin u \cos u^0 + \Theta \sin (u - N) \cos u^0.$$

Subtrahiren wir von dieser Gleichung die mit $\cos u$ multiplicirte erste, so ergibt sich:

$$\left\{ Tm \sin u + \Theta (u - N) \right\} \cos u^0 = Tm \sin (u - u^0) + \Theta \sin (u - u^0) \cos N,$$

oder wenn wir $\cos u^0$ und $\cos N$ gleich 1 setzen:

$$Tm \sin u + \Theta (u - N) = (Tm + \Theta) \sin (u - u^0).$$

Durch Substitution dieses Werthes geht die Gleichgewichtsbedingung über in:

$$(Tm + \Theta) \sin (u - u^0) = \frac{f}{R^3} + \frac{f'}{R^4} + \frac{f''}{R^5} + \frac{f'''}{R^6}.$$

Ehe wir diese Gleichung weiter entwickeln, ist es nothwendig, die Natur der Coëfficienten f, f', f'', f''' etwas genauer zu untersuchen. Diese Coëfficienten hängen einerseits von der räumlichen Lage der beiden Magnete, andererseits von der Vertheilung des Magnetismus in ihrem Innern ab. Die durch den magnetischen Zustand der Nadeln bedingten Grössen haben die Form:

$$\Sigma E A^k B^a C^v \cdot \Sigma e a^{k'} b^{a'} c^{v'}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Vertheilung des Magnetismus in beiden Nadeln symmetrisch sei mit Bezug auf die Ebenen der Coordinatensysteme A, B, C und a, b, c , dass demnach die Anfangspunkte dieser Coordinatensysteme mit den magnetischen Mittelpunkten der beiden Nadeln zusammenfallen, so ergibt sich, dass von den in der Entwicklung überhaupt auftretenden Producten alle verschwinden mit Ausnahme der folgenden:

$$\Sigma E A = M, \Sigma e a = m,$$

$$\Sigma E A^3, \Sigma E A B^2, \Sigma E A C^2 \text{ und } \Sigma e a^3, \Sigma e a b^2, \Sigma e a c^2.$$

Daraus ergibt sich weiter, dass auch die Grössen $\cos (\psi - u)$ und $\sin (\psi - u)$, durch welche die Abhängigkeit der Coëffi-

cienten $f, f' \dots$ von dem Ablenkungswinkel u bestimmt wird, nur in den Combinationen:

$$\cos(\psi - u), \sin(\psi - u), \cos^3(\psi - u), \sin^3(\psi - u), \\ \cos^2(\psi - u) \sin(\psi - u), \cos(\psi - u) \sin^2(\psi - u)$$

auftreten können, ein Umstand, welcher die Möglichkeit einer sehr einfachen Transformation der Gleichgewichtsbedingung eröffnet. Führt man nämlich in den Coëfficienten f, f', f'', f''' den Winkel $u - u^0$ ein durch die Substitution: $\cos(\psi - u) = \cos(\psi - u^0) \cos(u - u^0) + \sin(\psi - u^0) \sin(u - u^0)$ $\sin(\psi - u) = \sin(\psi - u^0) \cos(u - u^0) - \cos(\psi - u^0) \sin(u - u^0)$, so können dieselben zerlegt werden in Ausdrücke von der Form:

$$f = f_0 \cos(u - u^0) + \chi \sin(u - u^0) \\ f' = f'_0 \cos(u - u^0) + \chi' \sin(u - u^0)$$

Hier entstehen die Factoren $f_0, f'_0 \dots$ aus den Coëfficienten $f, f' \dots$, wenn in diesen letzteren überall u ersetzt wird durch u^0 . Durch Substitution dieser Werthe ergibt sich:

$$(Tm + \Theta) \sin(u - u^0) = \cos(u - u^0) \left\{ \frac{f'_0}{R^3} + \frac{f''_0}{R^4} + \dots \right\} \\ + \sin(u - u^0) \left\{ \frac{\chi}{R^3} + \frac{\chi'}{R^4} + \dots \right\}.$$

Woraus mit demselben Grade der Annäherung:

$$\operatorname{tg}(u - u^0) = \frac{1}{R^3} \cdot \frac{f_0}{Tm + \Theta} + \frac{1}{R^4} \cdot \frac{f'_0}{Tm + \Theta} + \frac{1}{R^5} \cdot \frac{f''_0}{Tm + \Theta} \\ + \frac{1}{R^6} \cdot \frac{f'''_0}{Tm + \Theta} + \frac{1}{R^6} \cdot \frac{f_0}{Tm + \Theta} \cdot \frac{\chi}{Tm + \Theta}.$$

Die aus dem ersten Term der ursprünglichen Reihe hervorgehenden Coëfficienten haben die Werthe:

$$f^0 = Mm \left\{ 2 \cos(\psi - U) \sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u^0) \right\} \\ \chi = -Mm \left\{ 2 \cos(\psi - U) \cos(\psi - u^0) - \sin(\psi - U) \sin(\psi - u^0) \right\}$$

An Stelle der Ablenkung $u - u^0$, welche die Hülfsnadel von der Ruhelage erleidet, beobachten wir die beiden Ablenkungen nach entgegengesetzten Seiten, welche sich ergeben, wenn die Hauptnadel um den Punkt N um 180 Grade

gedreht wird. Dadurch wird der Winkel U um zwei Rechte vermehrt, und werden α und β verwandelt in $-\alpha$ und $-\beta$. Es ergibt sich, dass die Coëfficienten f_0 , f_0'' und χ bei dieser Vertauschung ihr Zeichen wechseln, während f_0' und f_0''' dieselben Werthe behalten. Bezeichnen wir den der neuen Stellung entsprechenden Werth von u mit u' , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(u' - u^0) = & -\frac{1}{R^3} \cdot \frac{f_0}{T_m + \Theta} + \frac{1}{R^4} \cdot \frac{f_0'}{T_m + \Theta} - \frac{1}{R^5} \cdot \frac{f_0''}{T_m + \Theta} \\ & + \frac{1}{R^6} \cdot \frac{f_0'''}{T_m + \Theta} + \frac{1}{R^6} \cdot \frac{f_0}{T_m + \Theta} \cdot \frac{\chi}{T_m + \Theta}. \end{aligned}$$

Somit durch Elimination von u^0 :

$$\operatorname{tg} \frac{u - u'}{2} = \frac{1}{R^3} \cdot \frac{f_0}{T_m + \Theta} + \frac{1}{R^5} \cdot \frac{f_0''}{T_m + \Theta}.$$

Woraus:

$$\frac{T}{M} \left(1 + \frac{\Theta}{m T} \right) R^3 \operatorname{tg} \frac{u - u'}{2} = \frac{f_0}{M m} + \frac{1}{R^2} \frac{f_0''}{M m}.$$

Nach den früheren Angaben ist:

$$\frac{f_0}{M m} = 2 \cos(\psi - U) \sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u^0)$$

oder, wenn u^0 ein sehr kleiner Winkel:

$$\frac{f_0}{M m} = 2 \cos(\psi - U) \sin \psi + \sin(\psi - U) \cos \psi.$$

Der erste der auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung stehenden Terme hängt somit nur ab von den beiden als gegeben zu betrachtenden Winkeln ψ und U . Der Coëfficient f_0' dagegen enthält noch gewisse von der Vertheilung des Magnetismus in den beiden Nadeln abhängende Molecularsummen; er wird daher als eine unbekannte, erst durch die Beobachtungen selbst zu ermittelnde Grösse zu betrachten sein. Es ergibt sich aber aus der obigen Gleichung, dass die Beobachtung der Ablenkungen für zwei verschiedene Entfernungen des Hauptstabes von der Hülfsnadel bei ungeänderten Werthen der Winkel U und ψ zur Bestimmung von $\frac{f_0''}{M m}$ genügt.

Die allgemeine Entwicklung des Coëfficienten f_0'' führt zu einem sehr complicirten Ausdrücke; wir werden

uns daher damit begnügen, die Rechnung für die sogenannten Hauptlagen der beiden Magnetnadeln vollständig durchzuführen, d. h. nur für den Fall, dass der Winkel U stets gleich einem Rechten ist, während ψ entweder gleich 90° oder gleich Null.

I. Hauptlage. $U = 90^\circ$, $\psi = 90^\circ$.

$$\frac{f_0}{Mm} = 2.$$

$$\frac{f_0''}{Mm} = 4 \cdot \frac{\Sigma EA^3 - \frac{3}{2} \Sigma EAB^2 - \frac{3}{2} \Sigma EAC^2}{M} \\ - 6 \cdot \frac{\Sigma ea^3 - 4 \Sigma eab^2 + \Sigma eac^2}{m} \\ - 6 (\alpha^2 - 2 \beta^2).$$

II. Hauptlage $U = 90^\circ$, $\psi = 0^\circ$.

$$\frac{f_0}{Mm} = -1.$$

$$\frac{f_0''}{Mm} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\Sigma EA^3 - 4 \Sigma EAB^2 + \Sigma EAC^2}{M} \\ - 6 \cdot \frac{\Sigma ea^3 - \frac{3}{2} \Sigma eab^2 - \frac{3}{2} \Sigma eac^2}{m} \\ + \frac{15}{2} \cdot \frac{\Sigma eab^2 - \Sigma eac^2}{m} - 6 (\alpha^2 - \frac{3}{4} \beta^2).$$

Es ergibt sich aus diesen Formeln, dass die Ablenkungen bei der zweiten Hauptlage unter sonst gleichen Umständen nach den entgegengesetzten Richtungen erfolgen werden, wie bei der ersten. Wir erhalten daher für die beiden Hauptlagen die Gleichungen:

I. Hauptlage.

$$\frac{T}{M} \left(1 + \frac{\Theta}{mT} \right) R^3 \operatorname{tg} \frac{u-u'}{2} = 2 + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{f_0''}{Mm}.$$

II. Hauptlage.

$$\frac{T}{M} \left(1 + \frac{\Theta}{mT} \right) R^3 \operatorname{tg} \frac{u'-u}{2} = 1 - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{f_0''}{Mm},$$

und zwar gelten diese Gleichungen für alle diejenigen Entfernungen R , bei welchen die vierte Potenz der Dimensionen der Magnetnadeln vernachlässigt werden kann gegen die vierte Potenz ihrer Entfernung, für Entfernungen, welche wir kurz als Gauss'sche Entfernungen bezeichnen können.

II. Bestimmung der äquivalenten Pole mit Hülfe der Gauss'schen Gleichungen. Wenn wir an Stelle der beiden im Vorhergehenden betrachteten Magnetnadeln ein System von je zwei Polen substituiren, welche auf ihren magnetischen Axen symmetrisch gegen die Drehungspunkte h und h' gelegen sind, so können wir für ein solches System die im Vorhergehenden ausgeführten Entwicklungen natürlich ganz in derselben Weise wiederholen. Bezeichnen wir durch μ den in den Polen der drehbaren Nadel concentrirten Magnetismus, durch $2l$ die Entfernung der beiden Pole, und haben M und $2L$ dieselbe Bedeutung für die zweite Nadel, so ergeben sich für die beiden Hauptlagen die folgenden Gleichungen:

I. Hauptlage.

$$\frac{T}{2LM} \left(1 + \frac{\Theta}{2\mu l T} \right) R^3 \cdot \operatorname{tg} \frac{u-u'}{2} = 2 + \frac{1}{R^2} (4L^2 - 6\lambda^2).$$

II. Hauptlage.

$$\frac{T}{2ML} \left(1 + \frac{\Theta}{2\mu l T} \right) R^3 \operatorname{tg} \frac{u'-u}{2} = 1 - \frac{1}{R^2} (\frac{3}{2}L^2 - 6\lambda^2).$$

Man sieht leicht, dass diese beiden Gleichungen mit den allgemeinen Gleichungen des vorhergehenden Abschnittes für alle der Gauss'schen Bedingung genügenden Entfernungen R identisch sind, wenn wir setzen; bei der ersten Hauptlage:

$$M = 2ML, \quad m = 2\mu\lambda, \quad \frac{f''}{Mm} = 4L^2 - 6\lambda^2,$$

bei der zweiten Hauptlage:

$$M = 2ML, \quad m = 2\mu\lambda, \quad \frac{f''}{Mm} = \frac{3}{2}L^2 - 6\lambda^2.$$

Unserer Untersuchung lag die Annahme zu Grunde, dass der Drehungspunkt h der Hilfsnadel eine unveränderliche Lage besitze, während die Hauptnadel an beliebige andere Stellen des Raumes versetzt werden konnte. Für den Ausdruck des in den obigen Formeln liegenden Re-

sultates ist es bequemer, das Verhältniss umzukehren, den Ort und die Stellung des Hauptmagnetes als unveränderlich zu betrachten, und die Hülfsnadel zu verschieben; dabei werden wesentlich solche Verschiebungen zu betrachten sein, bei welchen der Mittelpunkt h der Hülfsnadel auf einem und demselben, durch den Punkt h' der Hauptnadel gezogenen Radiusvector verbleibt. Dieser zunächst ganz willkürlich angenommene Punkt, um welchen die Hauptnadel beim Umlegen gedreht wird, wird in der Regel mit ihrem geometrischen Mittelpunkte zusammenfallen, und in diesem Falle bezeichnen dann die Coordinaten α und β die Verschiebungen des magnetischen Mittelpunktes H der Nadel gegen ihren geometrischen Mittelpunkt h' ; α repräsentirt die Verschiebung in der Richtung der magnetischen Axe, β die in einer zu der letztern senkrechten Richtung. Nach diesen Bemerkungen können wir nun den in den vorhergehenden Formeln liegenden Satz in folgender Weise aussprechen:

Wenn man von einem im Innern der Hauptnadel willkürlich angenommenen Punkt aus einen Radius Vector zieht, so kann die Hauptnadel in ihrer Wirkung auf die Hülfsnadel durch ein und dasselbe System magnetischer Pole ersetzt werden für alle Verschiebungen der Hülfsnadel, bei welchen ihr Mittelpunkt auf jenem Radius Vector verbleibt; dagegen ändert sich die Lage der äquivalenten Pole mit der Richtung des Radius Vectors.

Das magnetische Moment des von den äquivalenten Polen gebildeten Elementarmagnetes ist gleich dem magnetischen Momente der Hauptnadel. Wenn man ferner die übrigens in der Natur der Sache wenig begründete Bedingung hinzufügt, dass die äquivalenten Pole in der Richtung der magnetischen Axe symmetrisch zu jenem willkürlich angenommenen Punkte h' liegen sollen, so ergeben sich für die Entfernung derselben von dem Punkte h' die Formeln:

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. Hauptlage.} \\ L^2 = \frac{\Sigma EA^3 - \frac{3}{2} \Sigma EAB^2 - \frac{3}{2} \Sigma EAC^2}{M} - 6(\alpha^2 - 2\beta^2). \\ \text{II. Hauptlage.} \\ L^2 = \frac{\Sigma EA^3 - 4 \Sigma EAB^2 + \Sigma EAC^2}{M} - 6(\alpha^2 - \frac{3}{4}\beta^2). \end{array} \right.$$

Gleichzeitig kann nun auch die Hülfsnadel durch ein System ihr zugehöriger äquivalenter Pole ersetzt werden. Auch hier ist das magnetische Moment des von den äquivalenten Polen gebildeten Elementarmagnetes gleich dem Momente der Hülfsnadel, während gleichzeitig die Entfernung der Pole von dem Mittelpunkte der Nadel durch die Gleichungen bestimmt wird:

$$\text{I. Hauptlage.} \quad \lambda^2 = \frac{\Sigma ea^3 - 4 \Sigma eab^2 + \Sigma eac^2}{m}.$$

II. Hauptlage.

$$\lambda^2 = \frac{\Sigma ea^3 - \frac{3}{2} \Sigma eab^2 - \frac{3}{2} \Sigma eac^2}{m} - \frac{\frac{3}{2} \Sigma eab^2 - \Sigma eac^2}{m}.$$

Es möge nun zunächst die Annahme gemacht werden, dass der Punkt K' , von welchem aus die Radien Vektoren gezogen werden, zusammenfalle mit dem magnetischen Mittelpunkte H der Hauptnadel, in diesem Falle verschwinden die Grössen α und β , durch welche die relative Lage der Punkte K' und H bestimmt wird, und die Formeln für die Poldistanz der Hauptnadel werden identisch mit denjenigen, welche ich in der erwähnten frühern Arbeit durch die Betrachtung der Wirkung einer Magnetsnadel auf einen magnetischen Punkt abgeleitet hatte.

Die Poldistanz der Hülfsnadel wird in der ersten Hauptlage durch dieselbe Formel bestimmt wie die Poldistanz der Hauptnadel in der zweiten Hauptlage, was sich dadurch erklärt, dass die Bedeutung der Hauptlagen sich für die Hülfsnadel wenigstens nahezu umkehrt. In den Formeln für die Poldistanz der Hülfsnadel bei der zweiten Hauptlage und die Poldistanz der Hauptnadel bei der ersten Hauptlage tritt eine kleine Differenz auf, welche eben damit zusammenhängen dürfte, dass das Verhalten der beiden Nadeln kein vollkommen reciprokes ist.

Dagegen ergibt sich bei beiden Nadeln eine von der Richtung des Radius Vectors vollkommen unabhängige für alle Gauss'schen Entfernungen gleiche Lage der äquivalenten Pole, wenn:

$$\Sigma EAB^2 = \Sigma EAC^2 \quad \text{und} \quad \Sigma eab^2 = \Sigma eac^2,$$

eine Bedingung, welche erfüllt sein dürfte, wenn die beiden Nadeln die Gestalt von Rotationskörpern haben, welche in der Richtung der Axe magnetisirt sind.

Es möge nun zweitens der Fall betrachtet werden, dass der Punkt h' , von welchem aus die Radien Vektoren gezogen werden, nicht zusammenfällt mit dem magnetischen Mittelpunkt der Nadel. Von allgemeinen Gesichtspunkten aus erscheint es auch in diesem Falle am natürlichsten, die äquivalenten Pole symmetrisch zu nehmen gegen den magnetischen Mittelpunkt, nicht wie dies bei den im Vorhergehenden aufgestellten Formeln der Fall ist, symmetrisch gegen den Punkt h' . Bezeichnen wir die Distanz dieser gegen den magnetischen Mittelpunkt symmetrischen Pole durch $2L_0$, so ergeben sich für dieselben die nämlichen Formeln wie in dem vorhergehenden Falle, in welchem α und β gleich Null waren, d. h. es wird in der ersten Hauptlage:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0^2 = \frac{\Sigma EA^3 - \frac{3}{2} \Sigma EAB^2 - \frac{3}{2} \Sigma EAC^2}{M}, \\ \text{in der zweiten Hauptlage:} \\ L_0^2 = \frac{\Sigma EA^3 - 4 \Sigma EAB^2 + \Sigma EAC^2}{M}. \end{array} \right.$$

Bei den im vorhergehenden Abschnitte enthaltenen Betrachtungen gewann aber der Punkt h' eine besondere Bedeutung dadurch, dass er derjenige Punkt war, um welchen die Hauptnadel beim Umlegen gedreht wurde. Bei den Nadeln, welche für praktische Zwecke, etwa bei Magnetometern, in der Regel zur Anwendung kommen, fällt dieser Drehungspunkt zusammen mit dem geometrischen Mittelpunkt der Nadel, und in diesem für die praktische Anwendung besonders wichtigen Falle erscheint es

daher zweckmässig, die äquivalenten Pole zu beziehen auf den geometrischen Mittelpunkt der Nadel und nicht auf ihren magnetischen. Die Distanz dieser gegen den geometrischen Mittelpunkt der Nadel symmetrisch liegenden Pole wird dann durch die zuerst gegebenen Formeln (I) bestimmt. Zwischen den Distanzen $2L$ und $2L_0$ der beiden Polpaare, von welchen das erste gegen den geometrischen, das zweite gegen den magnetischen Mittelpunkt symmetrisch liegt, findet die Beziehung statt: bei der ersten Hauptlage:

$$L^2 = L_0^2 - 6(\alpha^2 - 2\beta^2),$$

in der zweiten Hauptlage:

$$L^2 = L_0^2 - 6(\alpha^3 - \frac{3}{4}\beta^2),$$

wo α und β die Verschiebungen des magnetischen Mittelpunktes gegen den geometrischen in der Richtung der Axe und senkrecht dazu bezeichnen.

Aus den Gauss'schen Ablenkungsbeobachtungen ergibt sich zunächst die Poldistanz L ; will man aus dieser die Distanz L_0 der gegen den magnetischen Mittelpunkt symmetrischen Pole finden, so ist dazu die Kenntniss der Verschiebungen α und β nothwendig. Die Bestimmung derselben ergibt sich durch die Betrachtung der Coëfficienten f' und f''' in unserer allgemeinen Entwicklung. Sind α und β gleich Null, so verschwinden auch diese Coëfficienten, d. h. es ist dann $u - u^0$ gerade entgegengesetzt mit $u' - u^0$, wenn wir zunächst absehen von dem zweiten Gliede mit R^{-6} , welches für $\alpha = \beta = 0$ nicht verschwindet und auch bei der Umkehr der Hauptnadel sein Zeichen nicht wechselt. Wird also die letztere um ihren magnetischen Mittelpunkt um 180° gedreht, so geht die Ablenkung der Hülfsnadel in die entgegengesetzte über, wodurch ein einfaches Mittel zur Bestimmung des magnetischen Mittelpunktes der Hauptnadel gegeben ist. Was das störende Glied mit R^{-6} anbelangt, so kann dasselbe durch Beobachtung in symmetrischen Stellungen zu beiden Seiten der Hülfsnadel eliminirt werden, wobei ψ um zwei

Rechte vermehrt wird, während R , U , α und β ungeändert bleiben.

Petruschewski hat einige andere Methoden zur Bestimmung der Pole eines Magnetstabes in Anwendung gebracht, auf deren Theorie genauer einzugehen, nicht nothwendig erscheint. Es leuchtet ein, dass auch die von ihm bestimmten Pole äquivalente Pole sind, welche a priori mit den Schwerpunkten des nördlichen und südlichen freien Magnetismus ebenso wenig identificirt werden dürfen, wie die nach der Methode der Gauss'schen Ablenkungen bestimmten äquivalenten Pole. Aus den vorhergehenden Entwicklungen dürfte sich ergeben, dass die von Petruschewski bestimmten Punkte identisch sind mit den gegen den magnetischen Mittelpunkt symmetrischen Polen, deren Entfernung von dem letztern durch die Gleichungen (II) bestimmt wird.

III. Äquivalente Pole und magnetische Schwerpunkte. Der Unterschied dieser beiden Punktpaare, welcher bereits in der Einleitung eingehend betrachtet worden ist, kann kurz dahin ausgesprochen werden, dass die Einführung der magnetischen Schwerpunkte auf der Forderung der Erhaltung des freien Magnetismus beruht, die Einführung der äquivalenten Pole auf der Forderung der Erhaltung des magnetischen Momentes. Denn wenn wir gesehen haben, dass auch der durch die magnetischen Schwerpunkte gebildete Elementarmagnet dasselbe magnetische Moment besitzt, wie die ganze Magnethadel, so erscheint diese Eigenschaft gewissermassen als eine zufällige, insofern die Schwerpunkte nur als Vertreter von gewissen anderen unbekannten Punkten eingeführt sind, welchen natürlich ein anderes Moment entsprechen würde. Wir haben nun bereits in der Einleitung die Frage aufgeworfen, ob nicht am Ende die äquivalenten Pole, welche die den Schwerpunkten vermuthungsweise zugeschriebenen Eigenschaften in aller Strenge erfüllen, so nahe mit den letzteren zusammenfallen, dass man den von theoretischem Standpunkte immerhin festzuhaltenden Unterschied der

beiden Punktpaare praktisch doch vernachlässigen kann. Die Entscheidung dieser Frage kann natürlich nur dadurch gegeben werden, dass man in speciellen Fällen die Lage der beiden Punktpaare im Innern des Magnetes wirklich ermittelt. Was die Schwerpunkte des freien Magnetismus anbelangt, so kann man dieselben auf experimentellem Wege überhaupt nicht ermitteln, denn aus allen Beobachtungen von Nahewirkungen einer Magnetnadel ergibt sich immer nur die Lage der äquivalenten Pole, und diese für die Schwerpunkte zu nehmen, würde man nur dann berechtigt sein, wenn auf irgend einem andern Wege das Zusammenfallen der beiden Punktpaare bereits nachgewiesen sein würde. Die Bestimmung der Schwerpunkte ist also nur möglich, wenn man die Vertheilung des Magnetismus im Innern oder die ideale Vertheilung an der Oberfläche eines Magnetes kennt, eine Kenntniss, welche für das Ellipsoid durch die Poisson'sche Theorie gegeben, bei Stäben von cylindrischem oder rechteckigem Querschnitte wenigstens bis zu einem gewissen Grade auf dem Wege der Beobachtung erreicht ist.

Am einfachsten gestalten sich die Verhältnisse bei einem Linearmagnete. Bezeichnen wir das magnetische Moment bezogen auf die Längeneinheit der Axe durch α , so wird α durch eine Function des Abstandes x von der Mitte der Axe gegeben sein. Der freie Magnetismus auf einem Elemente dx der Axe ist $e = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot dx$, der freie Magnetismus in den Endpunkten der Axe beziehungsweise gleich α_n oder $-\alpha_n$, wenn durch α_n das magnetische Moment der Längeneinheit für das Ende der Axe bezeichnet wird. Der Abstand der äquivalenten Pole von dem Mittelpunkte der Axe ist gegeben durch die Formel:

$$L^2 = \frac{\sum e x^3}{\sum e x},$$

der Abstand der Schwerpunkte durch:

$$L = \frac{\sum e x}{\sum e}.$$

Durch Substitution des für e gegebenen Werthes erhalten wir:

$$L^2 = \frac{\alpha_n \alpha^3 - \int \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot x^3 dx}{\alpha_n \alpha - \int \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot x dx}, \quad L = \frac{\alpha_n \alpha - \int \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot x dx}{\alpha_0},$$

wo durch α_0 das magnetische Moment der Längeneinheit in der Mitte der Axe bezeichnet ist.

In den folgenden Tabellen sind nun für einige der Berechnung leicht zugängliche Fälle die Abstände der äquivalenten Pole und der Schwerpunkte von der Mitte der magnetischen Axe zusammengestellt.

Linearmagnete.

Magnetisches Moment für die Längeneinheit der Axe α	Halber Abstand	
	der Pole L	der Schwer- punkte L
$\alpha = \alpha_0 - \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{a} \cdot x$	$a \cdot \sqrt{\frac{3\alpha_n + \alpha_0}{2(\alpha_n + \alpha_0)}}$	$a \frac{\alpha_n + \alpha_0}{2\alpha_0}$
$\alpha = \alpha_0 = \alpha_n$	a	a
$\alpha = \alpha_0 - (\alpha_0 - \alpha_n) \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} - 2}{e^{\lambda a} + e^{-\lambda a} - 2}$ $a = 250, \quad \alpha_0 = 0,5055, \quad \alpha_n = 0,0651$ $\lambda = 0,003661$	$0,825 \cdot a$	$0,717 \cdot a$

Gleichförmig magnetisirte Ellipsoide; die magnetische Axe fällt zusammen mit der Hauptaxe a .

Gleichung des Ellipsoides	L^2	L
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	I. Hauptlage: $\frac{3}{5} \left(a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2} \right)$	$\frac{2}{3} a$
	II. Hauptlage: $\frac{3}{5} \left(a^2 - \frac{4b^2 - c^2}{3} \right)$	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$	$\frac{3}{5} (a^2 - b^2)$	$\frac{2}{3} a$

Specielle Rotationsellipsoide.

Verhältniss der Axen	L	I
$b = 0,509 \cdot a$	$\frac{2}{3} a$	$\frac{2}{3} a$
$b = 0$	$0,77 \cdot a$	$\frac{2}{3} a$
$b = a$	0	$\frac{2}{3} a$

Dass die Abweichung der Lage der äquivalenten Pole von der Lage der Schwerpunkte des freien Magnetismus in den meisten Fällen eine sehr erhebliche, dass es also vollkommen gerechtfertigt ist, diese beiden Punktpaare als wesentlich verschiedene zu betrachten, dürfte aus diesen Zusammenstellungen unzweideutig hervorgehen. Von besonderem Interesse dürfte die Betrachtung des dritten der untersuchten Linearmagnete sein. Die der Berechnung zu Grunde gelegten numerischen Werthe geben die Vertheilung der magnetischen Momente längs der Axe eines Magnetstabes von quadratischem Querschnitte, für welchen van Rees diese Vertheilung auf experimentellem Wege ermittelt und durch die Formel:

$$m = a - b \left(\mu^x + \mu^{-x} \right)$$

dargestellt hatte. Die Zusammenstellung der von ihm beobachteten und berechneten Werthe findet sich in Wiedemann's Galvanismus p. 453 § 396. Die bei diesem Linearmagnete erhaltenen Werthe der Distanz der äquivalenten Pole und der Entfernung der Schwerpunkte entsprechen somit den Verhältnissen, wie sie bei Magnetnadeln von der meist angewandten Form vorliegen. In der That ist das bei Magnetnadeln angenommene Verhältniss der Pol-distanz zu der ganzen Stablänge gleich 0,85 der letztern in naher Uebereinstimmung mit dem für die Distanz der äquivalenten Pole berechneten Werthe. Dagegen beträgt nach der Rechnung der Abstand der Schwerpunkte des freien Magnetismus nur 0,7 der Stablänge, und auch hierfür liegt eine Reihe anderweitiger Bestätigungen vor, wenn man bemerkt, dass die auf derselben Seite des „Galvanismus“.

§ 395 gegebenen Verhältnisse des Polabstandes zu der Stablänge sich auf die Distanz der Schwerpunkte und nicht auf die Distanz der äquivalenten Pole beziehen.

IV. Imaginäre Pole. Aus den im Vorhergehenden mitgetheilten Formeln ergibt sich, dass der Abstand der äquivalenten Pole in gewissen Fällen auch imaginär werden kann. Dann ist also die anschauliche Interpretation, welche sich für die Gauss'schen Coëfficienten durch Einführung der äquivalenten Pole ergibt, nicht mehr in Wirklichkeit ausführbar. Dagegen übersieht man leicht, dass auch mit imaginären Polen die Berechnung der Nahewirkung eines Magnetes ebenso durchgeführt werden kann wie mit reellen. Ein Imaginärwerden der äquivalenten Pole kann in drei verschiedenen Fällen eintreten. Erstens kann dasselbe bedingt sein durch die Gestalt des Magnetes; beispielsweise ergibt sich bei einem abgeplatteten Rotationsellipsoide, welches in der Richtung der Rotationsaxe magnetisirt ist, eine imaginäre Poldistanz; ein solches Ellipsoid kann also nicht mehr für alle Gauss'schen Entfernungen durch ein und dasselbe Paar äquivalenter Pole ersetzt werden. Zweitens kann der imaginäre Werth der Poldistanz bedingt sein durch Anomalien der Magnetisirung. Wenn z. B. bei einem Linearmagnet das magnetische Moment der Längeneinheit gleichmässig von dem der Mitte entsprechenden Werthe α_0 bis zu einem negativen Werthe $-\alpha_n$ am Ende der Axe herabsinkt, so wird die Poldistanz:

$$L = a \cdot \sqrt{\frac{\alpha_0 - 3\alpha_n}{2(\alpha_0 - \alpha_n)}},$$

somit L imaginär, wenn $3\alpha_n > \alpha_0 > \alpha_n$.

Drittens kann ein imaginärer Werth von L dadurch bedingt sein, dass der magnetische Mittelpunkt des Stabes eine von dem geometrischen sehr abweichende Lage besitzt. In diesem Falle kann die Distanz der gegen den magnetischen Mittelpunkt symmetrischen Pole reell sein. Bezeichnen wir dieselbe wie früher durch $2L_0$, und nehmen

wir an, dass der magnetische Mittelpunkt gegen den geometrischen nur in der Richtung der Axe um die Grösse α verschoben, eine Verschiebung in der dazu senkrechten Richtung aber nicht vorhanden sei, so ergibt sich zur Bestimmung der Distanz der gegen den geometrischen Mittelpunkt symmetrischen Pole die Formel:

$$L^2 = L_0^2 - 6 \alpha^2.$$

Es wird also L imaginär, wenn $L_0^2 < 6 \alpha^2$.

Mit Bezug auf diese Ergebnisse ist es nicht ohne Interesse, dass eine von mir früher mitgetheilte Bestimmung der Poldistanz eines Stahlspiegels von elliptischer Form (grosse Axe = 53,5 mm, kleine Axe = 41,5 mm), welcher in der Richtung der grossen Axe magnetisirt worden war, in der That zu einem imaginären Werthe der Poldistanz geführt hat. Ueberdies trat dieser imaginäre Werth nur auf für die erste Hauptstellung, während in der zweiten Hauptstellung reelle Pole erhalten wurden. Bei den damals ausgeführten Rechnungen waren indess zwei Vernachlässigungen gemacht, welche auf das Resultat möglicherweise von Einfluss sein konnten; einmal war die Poldistanz λ der Hülfsnadel vernachlässigt worden, sodann war bei den in der ersten Hauptstellung gemachten Beobachtungen ein kleiner Verticalabstand zwischen den Mittelpunkten der beiden Magnete vorhanden, welcher durch die zur Polbestimmung getroffene Einrichtung bedingt war. Der äussere Durchmesser des ringförmigen Magnetes, dessen Ablenkungen beobachtet wurden, betrug 25 mm, der innere 21 mm, die Poldistanz 2λ desselben konnte also jedenfalls nicht mehr als 23 mm betragen, ferner war der erwähnte Verticalabstand zwischen den Mittelpunkten der beiden Magnete gleich 12 mm.

In der folgenden Tabelle sind die Ablenkungen $\frac{1}{2}(u - u')$ zusammengestellt mit den entsprechenden Entfernungen R , wie dieselben in fünf verschiedenen Beobachtungsreihen gemessen worden waren:

I. Hauptstellung.

R	399,33	299,91	240,01
$\frac{u-u'}{2}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2^0 10,47' \\ 2^0 10,26' \\ 2^0 11,12' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5^0 7,43' \\ 5^0 6,67' \\ 5^0 8,61' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 9^0 53,72' \\ 9^0 50,81' \\ 9^0 54,97' \end{array} \right.$

II. Hauptstellung.

R	300,00	240,00	200,00
$\frac{u-u'}{2}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2^0 33,08' \\ 2^0 33,52' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4^0 57,52' \\ 4^0 57,77' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 8^0 29,45' \\ 8^0 30,63' \end{array} \right.$

Hieraus ergaben sich mit Berücksichtigung der erwähnten Correctionen die folgenden Poldistanzen.

I. Hauptstellung.

R	399,93—299,91	299,91—240,01
L	$\left\{ \begin{array}{l} 14,3 \cdot \sqrt{-1} \\ 17,3 \cdot \sqrt{-1} \\ 17,9 \cdot \sqrt{-1} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 8,0 \cdot \sqrt{-1} \\ 16,2 \cdot \sqrt{-1} \\ 14,2 \cdot \sqrt{-1} \end{array} \right.$

II. Hauptstellung.

R	300—240	240—200
L	$\left\{ \begin{array}{l} 28,7 \\ 32,2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 28,1 \\ 25,6 \end{array} \right.$

V. Anwendung auf die Theorie der Magnetometer. Bei jedem Magnetometer müssen die Dimensionen der Stäbe und die Entfernungen ihrer Mittelpunkte so gewählt werden, dass in der Reihenentwicklung des Potentials die vierten Potenzen jener Dimensionen vernachlässigt werden können gegen die vierten Potenzen der Entfernung. Welche Bestimmungen sich hieraus für die Construction der Magnetometer ergeben, kann in vollkommen sicherer Weise nur festgestellt werden, wenn jene zu vernachlässigenden Glieder ihrem Inhalte nach wirklich bekannt sind. Wollte man das Drehungsmoment zweier Magnete aufeinander bis zu jenen Gliedern in allgemeiner Weise entwickeln, so würde man auf sehr complicirte Ausdrücke geführt werden, mit deren Kenntniss überdiess nichts gewonnen wäre, da sie von der un-

bekannten Vertheilung des Magnetismus in Innern des Stabes abhängig sind. Man kann nun den Magnet ersetzen durch die äquivalenten Pole und für diese die Entwicklung bis zu den Gliedern mit der siebenten Potenz der Entfernung durchführen. Die so erhaltenen Glieder mit der siebenten Potenz der Entfernung werden allerdings mit denen der allgemeinen Entwicklung nicht mehr ganz identisch, aber doch insoweit übereinstimmend sein, dass sie bei der Fehlerrechnung an Stelle jener gesetzt werden können.

Es fragt sich nun zunächst, welches der Fehler ist, den wir bei Vernachlässigung der Glieder mit R^{-7} begehen. Zu diesem Zwecke schreiben wir mit einer leicht zu übersehenden Aenderung der Bezeichnung die früher aufgestellte Gleichung in folgender Weise:

$$\varepsilon \frac{T}{M} \left(1 + \frac{\Theta}{mT} \right) R^3 \operatorname{tg} \varphi = 1 + \frac{k}{R^2} + \frac{k'}{R^4},$$

wo ε einen numerischen Factor bezeichnet, der in der ersten Hauptlage gleich $\frac{1}{2}$, in der zweiten gleich 1 ist. Sind R_1 , φ_1 und R_2 , φ_2 zwei zusammengehörende Werthpaare von R und φ , so ergibt sich:

$$\frac{R_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1}{R_2^3 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{1 + \frac{k}{R_1^2} + \frac{k'}{R_1^4}}{1 + \frac{k}{R_2^2} + \frac{k'}{R_2^4}}.$$

Setzen wir:

$$\frac{R_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1}{R_2^3 \operatorname{tg} \varphi_2} = 1 + \alpha,$$

so wird:

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}} = k + \frac{k'}{R_1^2} + \frac{k' - k^2}{R_2^2}.$$

Der auf der linken Seite der letztern Gleichung stehende Ausdruck ist es aber, den wir bei der gewöhnlichen Rechnung, bei welcher nur die Glieder mit R^{-5} noch berücksichtigt werden, an Stelle von k substituiren.

Wenn wir demnach diese Substitution ausführen in der Gleichung:

$$\varepsilon \frac{T}{M} \left(1 + \frac{\Theta}{mT} \right) R_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1 = 1 + \frac{k}{R_1^2},$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf den vorhergehenden

Werth von $\frac{a}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}}$:

$$\varepsilon \frac{T}{M} \left(1 + \frac{\Theta}{mT} \right) R_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1 = 1 + \frac{k}{R_1^2} + \frac{k'}{R_1^4} + \frac{k' - k^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

Der Fehler, welchen wir bei Vernachlässigung der Glieder mit R^{-7} begehen, ist somit gleich:

$$\frac{k' - k^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

Die Werthe, welche sich durch Einführung der äquivalenten Pole für die Coefficienten k und k' ergeben, sind:

$$\text{I. Hauptstellung. } k = 2L^2 - 3\lambda^2,$$

$$k' = 3L^4 - 15L^2\lambda^2 + \frac{15}{8}\lambda^4.$$

$$\text{II. Hauptstellung. } k = -\frac{3}{2}L^2 + 6\lambda^2,$$

$$k' = \frac{15}{8}L^4 - \frac{45}{2}L^2\lambda^2 + 15\lambda^4.$$

Was nun die Regeln anbelangt, welche sich aus den vorhergehenden Betrachtungen für die Construction der Magnetometer ableiten lassen, so scheint von vornherein die Verfolgung zweier verschiedener Principien möglich; man kann die Einrichtung so treffen, dass das erste Correctionsglied $\frac{k}{R_1^2}$ verschwindet, oder so, dass das Fehlerglied $\frac{k' - k^2}{R_1^2 R_2^2}$ gleich Null wird.

Für den ersten Fall ergeben sich die folgenden Verhältnisse:

$$\text{I. Hauptstellung. } \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot L,$$

$$k' = -\frac{37}{6}L^4.$$

$$\text{II. Hauptstellung. } \lambda = \frac{1}{2}L,$$

$$k' = -\frac{45}{8}L^4.$$

Im zweiten Falle dagegen ergibt sich, dass die zu lösende quadratische Gleichung $k' - k^2 = 0$ unter allen Umständen auf einen imaginären Werth des Verhältnisses $\frac{k}{L}$ führt, sodass also die Einrichtung einer solchen zweiten Art von Magnetometern mit verschwindendem Fehlergliede nicht möglich ist.

Schliesslich mögen für einige wirklich ausgeführte Magnetometereinrichtungen die numerischen Werthe der im Vorhergehenden besprochenen Grössen noch mitgetheilt werden.

Verhältnisse des Magnetometers	Hauptstellung	Correctionsglied		Fehler $\frac{k' - k^2}{R_1^2 R_2^2}$
		$\frac{k}{R_1^2}$	$\frac{k'}{R_1^4}$	
$L = 65$ $R_1 = 600,39$ $\lambda = 42$ $R_1 = 800,455$ (Weber: Bestimmung der rechtwinkligen Componenten der erdmagnetischen Kraft in Göttingen. Abh. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen.)	I	0,0088	— 0,0004	— 0,0003
$L = 200$ $R_1 = 1500$ $\lambda = 100$ $R_2 = 2000$ (Magnetometer des Göttinger Observatoriums.)	II	—	— 0,0009	— 0,0005
$L = 42$ $R_1 = 300$ $\lambda = 17$ $R_2 = 400$ (Weber's transportables Magnetometer.)	I	0,0296	0,0002	— 0,0004
$L = \lambda = 47$ $R_1 = 450,19$ $R_2 = 600,26$ (Transportables Magnetometer von Meyerstein.)	I	— 0,0109	— 0,0012	— 0,0007