Über eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

Von

ERIK HOLMGREN in Upsala.

Es sei eine partielle Differentialgleichung der Form

$$(1) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

vorgelegt, wo $f(x, y, u, v, w)$ innerhalb eines gewissen Gebietes eine reguläre analytische Funktion der fünf Argumente ist.

In dem Falle wo f eine lineare Funktion von $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ ist, hat Herr Picard bewiesen, daß alle Integrale dieser Gleichung, welche nebst ihren Ableitungen der zwei ersten Ordnungen stetig sind, auch analytisch sind*). Der Zweck dieser Note ist zu zeigen, daß die Methode von Herrn Picard bei geeigneter Handhabung auch in dem allgemeinen Falle der Gleichung (1) ausreicht um den analytischen Charakter der Lösungen darzulegen, wenigstens von solchen, die nebst den Ableitungen der drei ersten Ordnungen stetig sind. (Fehlen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ in (1) so ist keine Voraussetzung von den dritten Ableitungen nötig).

Es ist dies übrigens zuerst von Herrn Lütkemeyer gezeigt worden und in seiner Dissertation enthalten**), die zum Teil am Anfang des Jahres 1901,

*) Journal de l'école polytechnique 1899, Comptes rendus 1900. Siehe auch: Paraf, Thèse, Paris 1892.

**) Göttingen 1902. Siehe auch einen Aufsatz von mir (Sv. Vet. Ofversigt, Bd. 58 S. 59.) Die Gleichungen (1) gehören — allerdings als sehr einfache Fälle — zu den Gleichungen, für welche Hilbert in seinem Pariser Vortrag (1900) die Frage nach dem analytischen Charakter der Lösungen aufgestellt hat. (Vgl. auch Encyclopädie Bd. II S. 535.)

Die Anwendung des Satzes des Textes in dem Fall, wo $f = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, führt leicht nach bekannten Sätzen der Differentialgeometrie zu dem von Hilbert (l. c.) ausgesprochenen Satze daß „alle Flächen positiver konstanter Krümmung analytisch sind“ (wenigstens wenn sie stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung haben).

wie dem Verf. bekannt war, dem Herrn Prof. Hilbert — der die Anregung zur Erledigung dieser Frage gegeben hat — vorgelegt wurde*).

Es sei U eine Lösung von (1), die in einem gewissen Gebiete G diese letztgenannten Bedingungen erfüllt. In diesem sei O ein beliebiger Punkt. Wir verlegen den Koordinatenanfangspunkt der xy -Ebene in O . Es seien $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ die Werte von U , $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ in O . Nach der Annahme dürfen wir voraussetzen, daß die Funktion $f(x, y, u, v, w)$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von $x, y, u - \bar{U}, v - \bar{V}, w - \bar{W}$ sich entwickeln läßt. Diese konvergiere, wenn $|x|, |y| < a$, $|u - \bar{U}|, |v - \bar{V}|, |w - \bar{W}| < b$. Wir konstruieren aus O als Mittelpunkt einen Kreis Γ , dessen Radius R so klein ist daß innerhalb und auf der Peripherie (γ) die Ungleichungen $|x|, |y| < a$, $|U - \bar{U}|, \left| \frac{\partial U}{\partial x} - \bar{V} \right|, \left| \frac{\partial U}{\partial y} - \bar{W} \right| < b$ (und zwei andere unten genannte Bedingungen) erfüllt sind. Auf γ nimmt die Funktion Werte an, welche eine stetige Funktion des Bogens mit stetigen Ableitungen der drei ersten Ordnungen definieren. Nach dem Verfahren von Herrn Picard wollen wir jetzt ein Integral bilden, welches regulär und analytisch ist und auf γ diese Werte annimmt. Nachher zeigen wir, daß dieses Integral in Γ mit U zusammenfällt, womit also der analytische Charakter von U in G bewiesen ist (da ja O in G beliebig zu wählen war).

Zu diesem Zwecke bilden wir das System

$$\begin{aligned}
 \Delta u_0 &= 0, \\
 \Delta u_1 &= f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right), \\
 &\dots \dots \dots \\
 \Delta u_n &= f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

und suchen successive die Integrale dieser Gleichungen, welche dieselben Werte wie U auf γ annehmen.

Wir setzen

$$v_1 = u_1 - u_0, \quad v_2 = u_2 - u_1, \quad \dots, \quad v_n = u_n - u_{n-1}$$

und bilden die Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots
 \tag{3}$$

Wie bewiesen werden wird, stellt sie, wenn R genügend klein genommen ist, das gesuchte analytische Integral dar.

Die Funktionen

$$u_0, v_1, v_2, \dots$$

sind aus den Gleichungen

*) Erschien nach dem Einreichen dieses Aufsatzes.

$$\begin{aligned}\{A_m\}_R &= |a_m^{(m)}| R^m + |a_{m+2}^{(m)}| R^{m+2} + \dots, \\ \{B_m\}_R &= |b_m^{(m)}| R^m + |b_{m+2}^{(m)}| R^{m+2} + \dots\end{aligned}$$

konvergiert (wir wenden für die Reihe (6) die Bezeichnung $[f]_R$ an, wenn (5) die Funktion $f(x, y)$ darstellt).

Wenn eine Reihe (5) absolut konvergiert, so definiert sie eine reguläre analytische Funktion von x, y $f(x, y)$; umgekehrt wenn $f(x, y)$ in der Umgebung von O eine reelle reguläre analytische Funktion von x, y ist, so ist sie in der Form (5) darstellbar, wo die Reihe eine absolut konvergente ist*).

Dieses vorausgeschickt, beweisen wir zuerst die folgenden Ungleichungen welche die früher definierte Funktion $u_0(x, y)$ enthalten.

Wenn R genügend klein genommen wird, so ist:

$$(7) \quad [u_0 - \bar{U}]_R < \frac{b}{2}, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \bar{V} \right]_R < \frac{b}{2}, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - \bar{W} \right]_R < \frac{b}{2}.$$

Um die erste Ungleichung zu beweisen, brauchen wir die Formel

$$u_0(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

wo

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi = \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} f''(\psi) \cos n\psi \, d\psi \left(= -\frac{1}{n^3 \pi} \int_0^{2\pi} f'''(\psi) \sin n\psi \, d\psi \right), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi = -\frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} f''(\psi) \sin n\psi \, d\psi \left(= \frac{1}{n^3 \pi} \int_0^{2\pi} f'''(\psi) \cos n\psi \, d\psi \right),\end{aligned}$$

($f(\psi)$ definiert die Werte, welche $U(x, y)$ auf γ annimmt und hat also stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen).

*) Paraf 1. c. p. 73. Daß die Reihe (5) in eine absolut konvergente Potenzreihe von $x - a$ und $y - b$ umgeordnet werden kann, sieht man leicht, wenn man sich deren Formeln bedient:

$$\begin{aligned}\sin m\theta &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^m - (\cos \theta - i \sin \theta)^m}{2i}, \\ \cos m\theta &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^m + (\cos \theta - i \sin \theta)^m}{2}.\end{aligned}$$

Die umgekehrte Behauptung ergibt sich unter Anwendung der Formel

$$\sin^m \theta \cos^n \theta = \left(\frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i} \right)^m \left(\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2} \right)^n$$

und den analogen, welche endliche Fourierentwicklungen derselben Parität ergeben, in denen die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten ≤ 1 sind.

Bemerken wir, daß $|f''(\psi)| < RM$, wo M eine gewisse von R unabhängige Constante ist, so finden wir

$$[u_0 - \bar{U}]_R < \left| \frac{a_0}{2} - \bar{U} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi - \bar{U} \right| + 4MR \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

d. h. wenn wir R genügend klein nehmen, so ist

$$[u_0 - \bar{U}]_R < \frac{b}{2}.$$

Wir gehen nun zum Beweise der zweiten Ungleichung über.

Wir bemerken zuerst, daß $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ sich einer endlichen Grenze nähert, wenn x, y sich von innen des Kreises Γ einem beliebigen Punkte der Peripherie γ nähert und daß diese Grenze eine stetige Funktion $g(\theta)$ von dem Polarwinkel θ ist.

In der Tat folgt dieses unmittelbar aus der Formel

$$(8) \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n r^{n-1}}{R^n} (a_n \cos (n-1)\theta + b_n \sin (n-1)\theta),$$

da ja wegen der Ungleichungen

$$|a_n| < \frac{2RM'}{n^3}, \quad |b_n| < \frac{2RM'}{n^3}$$

(M' ist eine Konstante, die von R unabhängig ist) die Reihe rechts absolut und gleichmäßig für alle Punkte innerhalb und an der Peripherie des Kreises Γ konvergiert.

Wir betrachten dann die Differenz $g(\theta) - \bar{V}$. Sie kann dadurch daß man R genügend klein nimmt, unabhängig von θ beliebig klein gemacht werden. Denn da

$$\Delta(U - u_0) = f\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

so schließt man nach dem Satze p. 219 unten, daß die Differenz $\left| \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|$ auf γ mit R beliebig klein gemacht werden kann, woraus die Behauptung sich ergibt.

Wir suchen jetzt eine obere Grenze für

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \bar{V} \right]_R.$$

Nach der Formel

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta)$$

wo

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \cos n\psi \, d\psi, \quad b'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \sin \psi \, d\psi,$$

bekommen wir

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \bar{V} \right]_R < \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \, d\psi - \bar{V} \right| + \left[\sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta) \right]_R \\ + \left[\sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta) \right]_R.$$

Die letzte Summe

$$\left[\sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta) \right]_R$$

kann — wie aus der Formel (8) einleuchtet — unabhängig von R kleiner als $\frac{b}{6}$ gemacht werden, wenn man m genügend groß nimmt. Die erste Summe

$$\left[\sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta) \right]_R$$

wird kleiner als $\frac{b}{6}$, wenn man R genügend klein nimmt, weil $|a'_n|$ und $|b'_n|$ mit R gegen Null konvergieren. In der Tat hat man

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{V} + \eta) \cos n\psi \, d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta \cos n\psi \, d\psi,$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta \sin n\psi \, d\psi$$

und wie vorhin gezeigt, konvergiert η mit R unabhängig von ψ gegen Null. Endlich folgt auch, daß der Ausdruck

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \, d\psi - \bar{V} \right|$$

kleiner als $\frac{b}{6}$ gemacht werden kann, dadurch, daß man R klein genug wählt. Wenn wir R genügend klein nehmen, wird die Ungleichung

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \bar{V} \right]_R < \frac{b}{2}$$

erfüllt.

Die dritte Ungleichung kann in derselben Weise bewiesen werden.

Die Bestimmung und Abschätzung der Funktionen $v_1, v_2, v_3, \dots$ beruht auf dem folgenden Lemma von Herrn Picard, welcher das Fundament seiner Methode ist.

Es sei die Differentialgleichung

$$(9) \quad \Delta v = f(x, y)$$

vorgelegt, in welcher

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k(r) \cos k\theta + \delta_k(r) \sin k\theta)$$

eine in dem Gebiete $r \leq R$ absolut konvergierende Reihe von der Form (5) ist (die also eine analytische Funktion von x, y darstellt).

Wir wollen ein reguläres Integral von (9) bestimmen, welches auf dem Kreise $r = R$ überall den Wert Null annimmt. Zu diesem Zwecke suchen wir die Koeffizienten in der Reihe

$$(10) \quad \varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k(r) \cos k\theta + \beta_k(r) \sin k\theta)$$

so zu bestimmen, daß sie dieses Integral darstellt. Für die Koeffizientenbestimmung bekommen wir die Systeme

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \alpha_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \alpha_k &= \gamma_k(r), \\ \frac{d^2 \beta_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \beta_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \beta_k &= \delta_k(r), \\ (k=0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

woraus $\alpha_k(r)$ und $\beta_k(r)$ so bestimmt werden sollen, daß sie für $r \leq R$ regulär sind und für $r = R$ verschwinden. Wir finden leicht

$$\begin{aligned} \alpha_0(r) &= \int_R^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r r \gamma_0(r) dr \right) dr, \\ (11) \quad 2k \alpha_k(r) &= r^k \int_R^r \frac{\gamma_k(r)}{r^{k-1}} dr - \frac{1}{r^k} \int_0^r \gamma_k(r) r^{k+1} dr + \frac{r^k}{R^{2k}} \int_0^R \gamma_k(r) r^{k+1} dr, \\ 2k \beta_k(r) &= r^k \int_R^r \frac{\delta_k(r)}{r^{k-1}} dr - \frac{1}{r^k} \int_0^r \delta_k(r) r^{k+1} dr + \frac{r^k}{R^{2k}} \int_0^R \delta_k(r) r^{k+1} dr, \\ (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Da offenbar $\alpha_k(r)$, $\beta_k(r)$ Potenzreihen von der Form (5') sind, so ist (10) eine Reihe von der Form (5). Aus (11) ergeben sich sofort die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \{\alpha_0(r)\} &< \lambda R^2 \{\gamma_0(r)\}_R, \\ \{\alpha_k(r)\}_R &< \frac{\lambda R^2}{k^2} \{\gamma_k(r)\}_R, \quad \left\{ \frac{d\alpha_k(r)}{dr} \right\}_R < \frac{\lambda R}{k} \{\gamma_k(r)\}_R \\ (k=1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

wo λ eine von R unabhängige Konstante ist und analoge Ungleichungen für $\{\beta_k(r)\}_R$ und $\left\{ \frac{d\beta_k(r)}{dr} \right\}_R$ und somit auch die folgenden

$$(12) \quad [\varphi]_R, \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_R, \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_R < \mu R M,$$

wo $M \geq [f(x, y)]_R$ und μ eine von R unabhängige Konstante ist*). Die Reihe (10) ist also absolut konvergent und stellt die gesuchte Lösung dar.

Eine letzte vorbereitende Bemerkung bezieht sich auf die Entwicklung der Funktionen $f(x, y, u, v, w)$, $f(x, y, u, v, w) - f(x, y, u', v', w')$ in Reihen von der Form (5), vorausgesetzt daß u, v, w, u', v', w' solche Reihen sind.

Wir schreiben die Differenz $f(x, y, u, v, w) - f(x, y, u', v', w')$ in der Form

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v, w) - f(x, y, u', v', w') &= (u - u')f_1(x, y, u, v, w, u', v', w') + (v - v')f_2(\dots) \\ &\quad + (w - w')f_3(\dots) \end{aligned}$$

wo f_1, f_2, f_3 gewöhnliche Potenzreihen von

$$x, y, u - \bar{U}, v - \bar{V}, w - \bar{W}, u' - \bar{U}, v' - \bar{V}, w' - \bar{W}$$

sind, welche konvergieren, wenn

$$|x|, |y| < a, |u - \bar{U}|, \dots, |w' - \bar{W}| < b.$$

*) Die erste der Ungleichungen (11) ist einleuchtend. Um die zweite zu beweisen (die dritte wird in derselben Weise bewiesen) wenden wir die Formel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

an. Wir haben

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta \right]_R < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left\{ \frac{d\alpha_k}{dr} \right\}_R + \left\{ \frac{d\beta_k}{dr} \right\}_R \right) < \lambda R M$$

und

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right]_R < \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\left\{ \frac{\alpha_k}{r} \right\}_R + \left\{ \frac{\beta_k}{r} \right\}_R \right) < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{d\alpha_k}{dr} \right\}_R + \left\{ \frac{d\beta_k}{dr} \right\}_R \right) < \lambda R M.$$

Also

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_R < \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta \right]_R + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right]_R < 2\lambda R M.$$

Es sei M die Summe der absoluten Beträge der Glieder in der die Funktion $f(x, y, u, v, w)$ darstellende Potenzreihe, nachdem wir für x, y den Wert a für die übrigen Argumente $u - \bar{U}$ etc. den Wert b eingesetzt haben. Es sei G die größte der analogen in Bezug auf f_1, f_2, f_3 gebildeten Größen.

Dann gilt

$$(13) \quad [f(x, y, u, v, w)]_R < M,$$

$$(14) \quad [f(x, y, u, v, w) - f(x, y, u', v', w')]_R < ([u - u']_R + [v - v']_R + [w - w']_R) G,$$

wenn

$$R < a, [u - \bar{U}]_R, [v - \bar{V}]_R, [w - \bar{W}]_R, [u' - \bar{U}]_R, [v' - \bar{V}]_R, [w' - \bar{W}]_R < b.$$

Man sieht dies leicht ein, wenn man (nachdem man statt x und y r und θ eingeführt hat) die beiden Funktionen als Potenzreihen von r sich umgeordnet denkt, und dann, um zu Reihen von der Form (5) zu kommen, in den Koeffizienten die dort auftretenden Produkte aus Potenzen von $\sin x, \cos x$ durch ihre endlichen Fourierreihenentwicklungen ersetzt (die Umordnung gibt dann offenbar eine Reihe der Form (5)), welche die Eigenschaft besitzen, daß die Summe der absoluten Beträge ihren Koeffizienten ≤ 1 ist (siehe p. 412, Note).

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Funktionen $v_1, v_2, v_3, \dots$ und die Konvergenz der Reihe (3) näher untersuchen.

Wir nehmen zuerst R so klein an, daß die Ungleichungen (7) erfüllt sind. Dann wenden wir das Picardsche Lemma auf die Bestimmung von v_1 an. Wir bekommen für v_1 eine Reihe von der Form (5), die nach (12) und (13) den Ungleichungen genügt

$$[v_1]_R, \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R, \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R < \mu R M.$$

Wir nehmen jetzt an, daß R so klein ist daß $\mu R M < \frac{b}{2}$, woraus folgt daß die Ungleichungen

$$[u_1 - \bar{U}]_R, \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - \bar{V}\right]_R, \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} - \bar{W}\right]_R < b$$

erfüllt sind*).

Aus der dritten der Gleichungen (4) kann nun die Funktion v_2 als eine Reihe von der Form (5) bestimmt werden. Die Ungleichungen (12) und (14) ergeben

$$[v_2]_R, \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R, \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R < \mu R (3\mu R M) G = (3\mu R G)^2 \frac{M}{3G}.$$

* Da $[u_1 - \bar{U}]_R < [u_0 - \bar{U}]_R + [v_1]_R < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$ u. s. w.

In dieser Weise fortsetzend, bestimmen wir successive für $n = 3, 4, \dots$ die Funktionen v_n als Reihen von der Form (5), die die Ungleichungen

$$(15) \quad [v_n]_R, \left[\frac{\partial v_n}{\partial x} \right]_R, \left[\frac{\partial v_n}{\partial y} \right]_R < (3\mu R G)^{n-1} \frac{M}{3G}$$

erfüllen, vorausgesetzt daß R so klein ist, daß

$$[u_i - \bar{U}]_R, \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} - \bar{V} \right]_R, \left[\frac{\partial u_i}{\partial y} - \bar{W} \right]_R < b, \\ (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Bedingungen welche immer erfüllt sind, wenn R der Ungleichung

$$(3\mu R G) \frac{M}{3G} + (3\mu R G)^2 \frac{M}{3G} + \dots + (3\mu R G)^{n-1} \frac{M}{3G} + \dots = \mu R M \frac{1}{1 - 3\mu R G} < \frac{b}{2}$$

gemäß gewählt ist*).

Die Ungleichungen (15) ergeben jetzt, daß die Reihe

$$[u_0]_R + [v_1]_R + \dots + [v_n]_R + \dots$$

(und auch die Reihen $\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \right]_R + \dots, \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial y} \right]_R + \dots$) konvergiert und daß also die Reihe (3) als eine absolut konvergente Reihe der Form (5) geschrieben werden kann. Die Funktion $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ist

also analytisch und regulär in der Umgebung von O . Die Ableitungen dieser Funktion bekommt man, wenn man die Summe der Ableitungen der Glieder von (3) nimmt; die so erhaltenen Reihen konvergieren gleichmäßig in Γ^{**}). Da also die Ausdrücke

*) Da $[u_i - \bar{U}]_R < [u_0 - \bar{U}]_R + [v_1]_R + \dots + [v_i]_R$ u. s. w.

**) In Bezug auf die ersten Ableitungen ist dieses unmittelbar klar. Um den Beweis z. B. in Bezug auf $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zu führen, bemerken wir erstens daß wir haben

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \dots,$$

wo die Reihe rechts (von der Form (5)) gleichmäßig konvergiert, wenn $r < R' < R$. Die Ungleichungen

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right]_{R'} < \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right]_{R'}, \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right]_{R'} < \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right]_{R'} \text{ etc.}$$

geben das analoge Resultat in Bezug auf $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$. Durch Anwendung der Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\sin \theta}{r}$$

wird jetzt das gesuchte Resultat gewonnen.

$$u = \lim_{n=\infty} u_n, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}$$

in Γ gleichmäßig konvergieren, so zeigt man in der gewöhnlichen Weise unter Anwendung der Gleichung

$$\Delta u_n = f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

daß u eine Lösung von (1) ist. Da sie offenbar dieselben Werte wie U auf γ annimmt, so definiert sie die gesuchte analytische Lösung von (1). Wir bemerken daß U die Ungleichungen

$$[u - \bar{U}]_R, \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \bar{V}\right]_R, \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \bar{W}\right]_R < b$$

erfüllt und das somit

$$|u - \bar{U}|, \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \bar{V}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y} - \bar{W}\right| < b$$

(unabhängig von R).

Es soll jetzt gezeigt werden, daß u mit U übereinstimmt. Wir setzen $u - U = z$. Dann muß z , das auf γ Null ist die Gleichung

$$\Delta z = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) - f\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = F(x, y)$$

befriedigen.

Um den Beweis zu führen daß $z \equiv 0$ ist, wenden wir den folgenden Satz an:

Wenn in Γ die Funktion $f(x, y)$ nebst den Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ stetig sind und in Γ und auf γ $|f(x, y)| < N$, so ist das Integral der Gleichung

$$\Delta z = f(x, y),$$

welches auf γ verschwindet durch die Formel gegeben

$$z = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

wo $G(x, y, \xi, \eta)$ die Funktion von Green ist die dem Gebiete Γ und dem Punkte x, y entspricht. Dieses Integral hat stetige Ableitungen in Γ und auf γ und erfüllt nebst diesen die Ungleichungen

$$|z|, \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \lambda N,$$

wo λ eine Konstante ist die mit R gegen Null abnimmt*).

Da die beiden Funktionen u und U die Ungleichungen

$$|\varphi - \bar{U}|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \bar{V}\right|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \bar{W}\right| < b$$

*) Siehe Picard, Journal de math. 1900.

erfüllen, so folgt daß

$$|F(x, y)| < k \left(|z| + \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \right) < k(\mu + \mu' + \mu''),$$

wo k eine Konstante ist und μ, μ', μ'' die absoluten Maxima von $|z|, \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right|$ in Γ bezeichnen. Nach dem angeführten Satze haben wir dann

$$|z|, \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < \lambda k(\mu + \mu' + \mu''),$$

welche Formeln zeigen daß

$$\mu + \mu' + \mu'' < 3\lambda k(\mu + \mu' + \mu'').$$

Nehmen wir jetzt R so klein daß $3\lambda k < 1$, so werden wir zu dem Widerspruche $\mu + \mu' + \mu'' < \mu + \mu' + \mu''$ geführt. Dieses zeigt das $z \equiv 0$, d. h. U fällt mit dem analytischen Integral u zusammen*). Der Beweis für den analytischen Charakter der Integrale von (1) ist also geführt.

Göttingen, Juli 1902.

*) Um dieses zu zeigen kann man auch dasselbe Verfahren gebrauchen, welches Herr Picard bei den linearen Differentialgleichungen (*Traité d'analyse* t. II, p. 23) anwendet. — Ein einfacher Beweis für den Eindeutigkeitssatz, den Picard im *Journal de math.* 1896 gegeben hat, folgt unmittelbar aus dem Verfahren des Textes. Für die Methode vergleiche E. Lindelöf: *Journal de mathématiques* 1894.