11. Bemerkung
über die Dämpfung der Serienspektrallinien,
von Clemens Schaefer.

In drei früheren Abhandlungen¹⁾ habe ich die Konsequenzen der Annahme verfolgt, daß die einer Spektralserie angehörenden Linien von *einem* einheitlichen Gebilde emittiert werden, während man in der gewöhnlichen Dispersionstheorie jeder einzelnen Linie ein besonderes schwingendes Teilchen (Elektron) zuordnet und die gegenseitige Beeinflussung vernachlässigt. Ich konnte damals zeigen, daß man eine Dispersionsformel von der allgemein bekannten Bauart erhält, nur haben die Konstanten bei mir eine wesentlich andere Bedeutung, wie in der üblichen Theorie.

Insbesondere konnte ich zeigen, daß die in der üblichen Theorie sogenannte Zahl der Elektronen N_h der Gattung N_h , d. h. die Zahl der die h^{te} Spektrallinie aussendenden Teilchen, mit wachsender Ordnungszahl h gesetzmäßig abnehmen muß.

Dieser Schluß, zu dessen Prüfung damals keine exakten Messungen vorlagen, ist nunmehr durch die Arbeiten von P. V. Bevan²⁾ und in geringerem Umfange von R. Ladenburg³⁾ vollkommen bestätigt worden.

Bevan hat die Dispersion an den Dämpfen von Natrium, Rubidium und Kalium quantitativ⁴⁾ untersucht; ich gebe im folgenden die von mir aus seinen Angaben berechneten Werte

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 28. p. 421; 29. p. 715. 1909; 32. p. 883. 1910.

2) P. V. Bevan, Proc. of the Roy. Soc. (A) 84. p. 210. 1910; (A) 85. p. 58. 1911.

3) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 38. p. 300. 1912.

4) Aus den älteren, rein qualitativen Untersuchungen Woods läßt sich für die vorliegende Frage, ob die N_h mit wachsendem h abnehmen, gar nichts schließen.

für die sogenannte Zahl der Elektronen jeder Linie in relativen Einheiten an.

I. Natrium.

$\lambda_1 = 5890 \text{ \AA.-E.}$	$N_1 = 466$
$\lambda_2 = 3302 \text{ „}$	$N_2 = 5,8$
$\lambda_3 = 2852 \text{ „}$	$N_3 = 1$

II. Rubidium.

$\lambda_1 = 7805 \text{ \AA.-E.}$	$N_1 = 2950$
$\lambda_2 = 4201 \text{ „}$	$N_2 = 28,5$
$\lambda_3 = 3587 \text{ „}$	$N_3 = 5,0$
$\lambda_4 = 3348 \text{ „}$	$N_4 = 1,8$
$\lambda_5 = 3228 \text{ „}$	$N_5 = 1,6$
$\lambda_6 = 3158 \text{ „}$	$N_6 = 1,0$

III. Kalium.

$\lambda_1 = 7699 \text{ \AA.-E.}$	$N_1 = 6550$
$\lambda_2 = 4047 \text{ „}$	$N_2 = 33,1$
$\lambda_3 = 3447 \text{ „}$	$N_3 = 3,1$
$\lambda_4 = 3217 \text{ „}$	$N_4 = 1,0$

Nach den Messungen von Ladenburg ergibt sich das gleiche für die Linien der ersten Nebenserie des Wasserstoffs.

Wasserstoff.

$\lambda_1 = 6533 \text{ \AA.-E.}$	$N_1 = 4,8$
$\lambda_2 = 4861 \text{ „}$	$N_2 = 1,0$

Nach diesen Resultaten ist an der allgemeinen Gültigkeit dieser von mir vorausgesagten Gesetzmäßigkeit für Spektralserien wohl nicht mehr zu zweifeln.

Nachdem die Theorie in einem wichtigen Punkte sich bewährt hat, scheint es mir angebracht, auf eine weitere Konsequenz derselben hinzuweisen, die ebenfalls experimentell prüfbar ist. Sie betrifft die *Dämpfung* der Spektrallinien, die derselben Serie angehören. Meine früheren Untersuchungen sagen darüber nichts aus, weil dort, um die Formeln möglichst einfach zu machen, von der Einführung einer Dämpfung

überhaupt abgesehen worden war; ich habe damals nur kurz auf die Möglichkeit hingewiesen, die Dämpfung einzuführen.

Bedeutend ρ die Dichte des schwingenden Systems, ξ die Verrückung eines Punktes desselben aus der Ruhelage, k eine „Reibungskonstante“, so kann man die von Fredholm¹⁾ zugrunde gelegte Differentialgleichung für das eine Serie emitierende schwingende System folgendermaßen erweitern:

$$(1) \quad \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + k \frac{\partial \xi}{\partial t} = \int_0^1 K(x\alpha) [\xi(x) - \xi(\alpha)] d\alpha,$$

oder auch:

$$(1a) \quad \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + k \frac{\partial \xi}{\partial t} - \xi(x) \int_0^1 K(x\alpha) d\alpha = - \int_0^1 K(x\alpha) \xi(\alpha) d\alpha.$$

Bei dieser Erweiterung des Fredholmschen Ansatzes ist vorausgesetzt, daß die Dämpfung durch *Strahlung* gegenüber der „Reibungsdämpfung“ zu vernachlässigen ist; der Name „Reibungsdämpfung“ ist natürlich wegen der Analogie zur Mechanik gewählt und soll über die tiefere Ursache derselben nichts aussagen. In den obigen Gleichungen bedeutet $K(x\alpha)$ eine in den beiden Argumenten x und α symmetrische Funktion; sie tritt nachher als „Kern“ einer der Gleichung (1) äquivalenten Integralgleichung auf. Die Länge des hier der Einfachheit halber linear gedachten schwingenden Gebildes ist gleich der Einheit genommen, was beides keine Einschränkung als Allgemeinheit ist.

Die wesentliche Annahme Fredholms ist nun die, vorauszusetzen, daß

$$(2) \quad \int_0^1 K(x\alpha) d\alpha = -a^2 = \text{Const.}$$

ist. Dann folgt aus (1a):

$$(3) \quad \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + k \frac{\partial \xi}{\partial t} + a^2 \xi = - \int_0^1 K(x\alpha) \xi(\alpha) d\alpha.$$

1) J. Fredholm, Compt. rend. 142. p. 506. 1906.

Als Lösung kann man ansetzen:

$$(4) \quad \xi = e^{-\frac{k}{2\varrho} t} \varphi(x) \cdot \begin{cases} \cos n t \\ \sin n t. \end{cases}$$

Dann liefert (4) für $\varphi(x)$ die homogene Integralgleichung:

$$\varphi(x) = \frac{4\varrho}{k^2 + 4\varrho^2 n^2 - 4\varrho a^2} \int_0^1 K(x\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha,$$

oder, wenn

$$(5) \quad \frac{4\varrho}{k^2 + 4\varrho^2 n^2 - 4\varrho a^2} = \lambda$$

gesetzt wird:

$$(6) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha.$$

Diese Gleichung ist bekanntlich nur lösbar für gewisse Werte von λ , die „Eigenwerte“ λ_v , zu deren jeden eine „Eigenfunktion“ $\varphi_v(x)$ gehört. Also haben wir die allgemeine Lösung in der Form:

$$(7) \quad \xi = e^{-\frac{k}{2\varrho} t} \sum_v^{1,\infty} \{A_v \cos n_v t + B_v \sin n_v t\} \varphi_v(x),$$

wobei A_v und B_v disponible Konstanten und n_v die zu einem Eigenwerte λ_v gemäß (5) zugehörige „Eigenfrequenz“ ist.

Die Eigenwerte λ_v häufen sich im *Unendlichen*; dagegen haben, wie aus (5) hervorgeht, die Eigenfrequenzen n_v eine Häufungsstelle im *Endlichen*. Denn für $\lambda_v = \infty$ folgt für die zugehörige Eigenfrequenz n_∞ die Relation:

$$(8) \quad n_\infty = \sqrt{\frac{4\varrho a^2 - k^2}{4\varrho^2}}.$$

Da die Dämpfung klein ist, und in (8) nur ins Quadrat eingeht, so ist mit Annäherung aus (8)

$$(8a) \quad n_\infty \cong \sqrt{\frac{a^2}{\varrho}}$$

und das ist der von Fredholm l. c. angegebene Wert der Häufungsstelle *ohne* Berücksichtigung der Dämpfung. Für uns hauptsächlich von Interesse ist der Dämpfungsfaktor in Gleichung (7), der *allen* Serienlinien gemeinsam ist. Wir haben also

unter unserer Voraussetzung das interessante Resultat, daß alle Linien einer Spektralserie gleich stark gedämpft sind.

Wie steht es nun mit der experimentellen Bestätigung dieser Forderung der Theorie? In der Literatur sind überhaupt nur wenige Messungen der Dämpfung vorhanden, und namentlich fehlen vergleichende Messungen an Serienlinien zurzeit noch fast vollständig. Mir sind nur die Messungen von L. Geiger¹⁾ bekannt, der an Linien des Natriums und Kaliums die „Dämpfungskonstante“ $k/2\rho$ gemessen hat. Er findet folgende relativen Zahlen:

Bei Kalium für	$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 6793 \\ \lambda_2 = 4047 \end{array} \right\}$	ist die Dämpfungskonstante	$\left\{ \begin{array}{l} 34,4 \\ 10,4 \end{array} \right\}$
		in relativem Maß:	
Bei Natrium für	$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 5890 \\ \lambda_2 = 3302 \end{array} \right\}$	desgl.	$\left\{ \begin{array}{l} 16,3 \\ 14,7 \end{array} \right\}$.

Die beiden letzteren Zahlen könnten allenfalls als identisch gelten, aber die beiden ersteren differieren stark.

Aber diese Zahlen sind überhaupt nicht beweiskräftig, weil sie nach einer prinzipiell unrichtigen Methode gewonnen sind, wie R. Ladenburg²⁾ überzeugend nachgewiesen hat.

Eine Prüfung der obigen Behauptung ist daher nur von der Zukunft zu erwarten.

Unter gewissen Bedingungen würden diesbezügliche experimentelle Resultate Schlüsse auf den Träger der Serienlinien und auf den Mechanismus der Dämpfung gestatten. Diese Fragen gedenke ich zu diskutieren, wenn hinreichendes experimentelles Material vorliegt.

Breslau, Physik. Institut d. Univ., im März 1913.

1) L. Geiger, Ann. d. Phys. 23. p. 758. 1907.

2) R. Ladenburg, l. c. p. 302ff., insbesondere p. 315.

(Eingegangen 8. Mai 1913.)