SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ DEL MOTO DI UN CORPO RIGIDO.

Nota di **Angelo Pensa** (Torino).

Adunanza del 9 febbrajo 1913.

1. Il più semplice corpo fisico che si possa considerare per astrazione è costituito da un punto P con una massa m (il *punto-massa*). Se P è una funzione del tempo t , allora il corpo è in moto, e, per qualunque valore di t , il punto P può chiamarsi *posizione del corpo*. La velocità del corpo, al tempo t , è

$$\frac{dP}{dt} = P'$$

ed è indipendente dalla massa m .

Dato un vettore v funzione del tempo, esso può sempre essere considerato come la velocità di un punto in moto, poichè da

$$\frac{dP}{dt} = v,$$

integrando ed indicando con P_0 la posizione del corpo al tempo t_0 , si ha:

$$P = P_0 + \int_{t_0}^t v dt;$$

vale a dire, data la *velocità* ed una posizione iniziale è determinata la posizione del corpo nel tempo generico t .

Se f è il vettore della forza direttamente applicata a P , atta a produrre il moto considerato (mP'' è la *forza d'inerzia*), il lavoro elementare è

$$f \times dP,$$

che risulta espresso mediante la forza (o meglio il suo vettore, essendo già implicitamente P il punto di applicazione) e lo spostamento infinitesimo dP della posizione del corpo.

Se la forza, direttamente applicata in P , ammette una funzione potenziale V (V numero funzione di P), allora è noto che

$$dV = \frac{dV}{dP} dP = \text{grad } V \times dP$$

è il lavoro elementare, e quindi $\text{grad } V$ è il vettore f della forza direttamente applicata,

cioè si ha:

$$\text{grad } V = f, \quad \text{ossia} \quad \frac{dV}{dp} = f \times.$$

Concetti e formole analoghe si hanno per un corpo *rigido* (continuo o discontinuo) in moto.

Per tale corpo in moto è determinata una forma (o formazione) di 2^a specie v , funzione del tempo, e che noi chiameremo *indicatrice di velocità*; la *posizione del corpo* da un'altra forma di 2^a specie p , pure funzione del tempo; la *forza motrice* di tutto il sistema è anch'essa una forma di 2^a specie f , funzione del tempo; il *lavoro elementare* è $f \circ dp$, essendo $\circ$ il simbolo dell'operazione *prodotto alternato* ¹⁾; se esiste la funzione potenziale V , essa è un numero funzione di p , e $\frac{dV}{dp}$ vale $f \circ$.

In tal modo anche la meccanica di un corpo rigido si può trattare sotto forma assoluta, introducendo nel calcolo il corpo stesso, in luogo del complesso de' suoi punti con le relative masse.

Questo intendo esporre nella presente Nota, valendomi del *Calcolo vettoriale generale*, come è stato sviluppato da C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO ²⁾, ed applicherò queste considerazioni ad una questione già trattata da E. BELTRAMI ³⁾.

Col procedimento qui seguito, la proprietà stabilita dal BELTRAMI viene ottenuta in modo semplicissimo (n° 7) evitando tutti i calcoli, assai lunghi e complicati, che si presentano inevitabili quando, come fa il BELTRAMI, si ricorre ai soliti sistemi di assi cartesiani fissi e mobili.

2. È ben noto il seguente teorema fondamentale di Cinematica:

Se un corpo rigido è in moto, allora esiste un vettore u , funzione solo del tempo t , tale che

$$(I) \quad \frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} = u \wedge (P - Q)$$

qualunque siano i punti P, Q del corpo.

Di questo teorema si conoscono varie dimostrazioni, delle quali, la più semplice è quella data recentemente dai Proff. BURALI-FORTI e MARCOLONGO ⁴⁾. Servendoci della teoria delle omografie vettoriali, possiamo dare, del teorema citato, la seguente dimostrazione, più semplice di quelle ora ricordate.

Siano O, A, B, C punti del sistema rigido, non complanari; allora esiste certo una

¹⁾ Il segno $\circ$ sarà, per lo più, omissso nel seguito.

²⁾ C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO: a) *Éléments de Calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique-mathématique*, édition française, traduite de l'italien et augmentée d'un Supplément par S. LATTÈS (Paris, Hermann, 1910); b) *Analyse vectorielle générale: I. Transformations linéaires*, traduit de l'italien par P. BARIDON (Pavia, Mattei & C., 1912).

³⁾ E. BELTRAMI, *Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi, ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo VI (1873-1875), pp. 233-245].

⁴⁾ C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, loc. cit. ²⁾, a, pag. 123. Cfr. pure: R. MARCOLONGO, *Theoretische Mechanik*, I. Bd. (Leipzig, Teubner, 1911), V. Kap., pag. 111.

ed una sola omografia ⁵⁾ α , funzione del tempo t , tale che (indicando con gli apici le derivate rispetto a t):

$$(1) \quad \alpha(A-O) = A' - O', \quad \alpha(B-O) = B' - O', \quad \alpha(C-O) = C' - O'.$$

Inoltre, se P e Q sono punti del sistema, si può porre:

$$(2) \quad P - Q = a(A - O) + b(B - O) + c(C - O),$$

essendo a, b, c delle costanti (poichè il corpo è rigido).

Derivando la (2) e tenendo conto delle (1) si ha subito

$$(3) \quad P' - Q' = \alpha(P - Q).$$

Ma, derivando la condizione di rigidità del sistema:

$$(P - Q)^2 = \text{cost.},$$

si ha

$$(P - Q) \times (P' - Q') = 0,$$

cioè, per la (3):

$$(P - Q) \times \alpha(P - Q) = 0,$$

la quale, valendo per P, Q arbitrari, dice che α è una *omografia assiale* ⁶⁾; vale a dire esiste un vettore u funzione solo di t , tale che

$$\alpha = u \wedge;$$

e quindi

$$P' - Q' = u \wedge (P - Q), \quad \text{C. V. D.}$$

3. Di qui risulta subito, come è noto, il seguente teorema, dovuto a G. PEANO ⁷⁾:

Se un corpo rigido è in moto, esiste una forma di 2^a specie ⁸⁾ v , funzione solo del tempo t , tale che, essendo P un punto arbitrario del corpo, si ha:

$$(II) \quad \frac{dP}{dt} = |(Pv.\omega),$$

[ove $\omega = 6\Omega$, ed Ω è il *trivettore unitario* ⁹⁾].

Chiameremo la forma v col nome di *indicatrice di velocità* ¹⁰⁾.

⁵⁾ C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, loc. cit. ²⁾, b.

⁶⁾ C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, loc. cit. ²⁾, b, pag. 15, nota seconda.

⁷⁾ G. PEANO: a) *Calcolo geometrico secondo l'« Ausdehnungslehre »* di H. GRASSMANN (Torino, Bocca, 1888), pag. 164; b) *Sopra lo spostamento del polo sulla terra* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXX (1894-95), pp. 515-523]. — C. BURALI-FORTI, c) *Sul moto di un corpo rigido* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXVIII (1902-1903), pp. 155-170]; d) *Sul moto composto* [ibid., vol. XLVII (1911-1912), pp. 261-265].

⁸⁾ C. BURALI-FORTI: a) *Lezioni di Geometria metrico-proiettiva* (Torino, Bocca, 1904), pag. 89, n° 41; b) *Geometria analitico-proiettiva* (Torino, G. B. Petrini, 1912).

⁹⁾ C. BURALI-FORTI, loc. cit. ⁸⁾, a, pag. 28, n° 12, e.

¹⁰⁾ Il prof. PEANO [loc. cit. ⁷⁾, b], chiama *velocità*, senz'altro, questa forma di 2^a specie v . Però, siccome pel caso di un corpo rigido, ridotto ad un punto, la v , ora definita, non è la velocità del corpo-punto, secondo il concetto comune di velocità, così, per evitare possibili equivoci, chiameremo *indicatrice di velocità* la v . Per es., per un punto che descrive una traiettoria piana, la forma v è in generale un *bipunto* normale al piano della traiettoria, passante pel centro di curvatura di questa, e di lunghezza uguale alla velocità angolare. Cfr. BURALI-FORTI, loc. cit. ⁷⁾, c.

Dimostrazione. — La formola (I) testè stabilita si può scrivere diversamente. Introducendo l'operatore *indice* di GRASSMANN ¹¹⁾, ed osservando che

$$u \wedge (P - Q) = \{ | u(P - Q) \},$$

si ha, dalla (I):

$$P' - Q' = \{ | u(P - Q) \} = \{ | (Qu - Pu) \}.$$

Operando con $|$ nei due membri, si ha:

$$|P' - |Q' = Qu - Pu,$$

ossia

$$(4) \quad Pu + |P' = Qu + |Q'.$$

Risulta di qui che, posto

$$(5) \quad v = Pu + |P',$$

la forma di 2^a specie v è funzione del tempo t , ma è indipendente da P ; è dunque una funzione del tempo e del moto considerato ¹²⁾.

Dalla (5) si ha

$$Pv = P|P', \text{ e quindi } Pv \cdot \omega = |P'.$$

Da questa si ha la (II) operando con $|$ nei due membri.

Dalla (5) si ricava anche:

$$(6) \quad u = \omega v.$$

4. Se v è l'indicatrice di velocità del corpo, definiremo una nuova forma di 2^a specie p , ponendo

$$(7) \quad p = 6 \int_{t_0}^t v dt,$$

e chiameremo p « *posizione del corpo nel tempo t* ».

Sussiste allora il teorema:

La forma di 2^a specie p individua la posizione, nel tempo t , di ciascun punto del corpo.

Dimostrazione. — Alla (II) si può dare la forma

$$(II') \quad \frac{dP}{dt} = - \{ (\omega \cdot v) P \} = \alpha P,$$

ove α è un operatore lineare, funzione solo di v ¹³⁾.

¹¹⁾ G. PEANO, loc. cit. 7), a), pag. 100, n° 52; C. BURALI-FORTI, loc. cit. 8), a), pag. 39, n° 16; loc. cit. 8), b), pp. 22-24, n° 37-43.

¹²⁾ L'asse del moto elicoidale si esprime mediante la forma v per mezzo di una nota formola [Cfr. BURALI-FORTI, loc. cit. 8), a), n° 41, a), pag. 91].

¹³⁾ Mediante il simbolo $\mathbf{O}$ dell'operazione « prodotto alternato » si ha esattamente

$$\alpha = | \cdot w \mathbf{O} \cdot v \mathbf{O},$$

cioè α è il *prodotto funzionale* degli operatori $v \mathbf{O}$, $w \mathbf{O}$, $|$. In questo caso il simbolo $\mathbf{O}$ non può esser sottinteso poichè $|wvP$ si può scomporre in $|w \cdot vP$ o in $(|wv)P$ e le due notazioni indicano enti ben diversi.

Allora, l'integrale generale della (II'), poichè α è finito, è ¹⁴⁾

$$P = \left\{ I + \int_{t_0}^t \alpha dt + \int_{t_0}^t \alpha dt \int_{t_0}^t \alpha dt + \dots \right\} P_0;$$

e poichè $\int_{t_0}^t \alpha dt$ dipende solo da p , il teorema è dimostrato ¹⁵⁾.

5. Il moto del corpo sia prodotto da forze direttamente applicate nei punti P del corpo stesso; e sia f il vettore della forza applicata in P , cioè sia Pf la forza.

La forza motrice del sistema è

$$(III) \quad f = \sum Pf,$$

ed è una forma di 2^a specie, funzione del tempo t .

Si ha, a questo riguardo, il seguente teorema:

Il lavoro elementare nel tempo t è

$$(IV) \quad f d p \quad (\text{o, con notazione completa, } f \mathbf{O} d p).$$

Dimostrazione. — Essendo Ω il trivettore unitario, ed $\omega = \mathbf{6} \Omega$, si ha:

$$\begin{aligned} \text{lavoro elem.} &= \sum f \times dP = \sum \frac{f |dP|}{\Omega} = \sum \frac{f |P'|}{\Omega} dt = \sum \frac{f \cdot (P v \cdot \omega)}{\Omega} dt \quad \{\text{per la (7)}\} \\ &= \sum \frac{\frac{1}{6} f \cdot (P d p \cdot \omega)}{\Omega} = \sum \frac{(P d p \cdot \Omega) f}{\Omega} = \sum P d p \cdot f = (\sum Pf) d p \quad ^{16)}, \end{aligned}$$

che dimostra quanto abbiamo affermato.

Si noti che nella dimostrazione non abbiamo mai scritto, seguendo in ciò l'uso comune, il simbolo $\mathbf{O}$ di prodotto alternato, progressivo o regressivo.

6. TEOREMA ¹⁷⁾. — Se Φ è un operatore lineare tra forme ¹⁸⁾ di specie r ($r=1, 2, 3$)

¹⁴⁾ G. PEANO, a) *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXII (1886-1887), pp. 437-446]; b) *Formulario mathematico*, Editio V, p. 432, 5.

¹⁵⁾ Si può considerare anche l'accelerazione del corpo

$$a = \frac{dv}{dt},$$

la quale dà, per la (II):

$$P'' = (P a \cdot \omega) + (P' v \cdot \omega).$$

Data a in funzione di t , è determinata v , a meno di una costante arbitraria, e quindi anche p a meno di due costanti arbitrarie. Data a l'equazione precedente avrà la forma

$$P'' = \alpha P' + \beta P,$$

equazione lineare di 2° ordine.

¹⁶⁾ C. BURALI-FORTI, loc. cit. ⁸⁾, a), pag. 113, formola [I]; loc. cit. ⁸⁾, b), pag. 166, n° 199.

¹⁷⁾ Per alcuni casi particolari di questo teorema, cfr. G. PEANO, loc. cit. ⁷⁾, a), pp. 154 e seg., n° 82 e 83.

¹⁸⁾ G. PEANO, loc. cit. ⁷⁾, a), pp. 25 e seg., n° 5 e seg.; C. BURALI-FORTI, loc. cit. ⁸⁾, b), n° 2-8, 40 e seg.

e numeri reali, allora si ha sempre

$$\Phi = \alpha \mathbf{O},$$

ove α è una forma di specie $4-r$, univocamente determinata, e funzione soltanto di Φ .

Dimostrazione. — Sia, ad es., $r=1$ ¹⁹⁾, e siano A_1, A_2, A_3, A_4 delle forme di 1^a specie, tali che $A_1 A_2 A_3 A_4 \neq 0$. Senza ledere la generalità della questione, si può supporre addirittura $A_1 A_2 A_3 A_4 = 1$. Indicando con S una forma qualunque di 1^a specie, possiamo porre²⁰⁾

$$S = \sum_i^4 x_i A_i,$$

e posto

$$\Phi A_i = h_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

si ha subito

$$\Phi S = \sum x_i h_i.$$

Se α è la forma di 3^a specie tale che:

$$-\alpha = h_1 A_2 A_3 A_4 + h_2 A_3 A_4 A_1 + h_3 A_4 A_1 A_2 + h_4 A_1 A_2 A_3,$$

si ha

$$\alpha \mathbf{O} S = \sum x_i h_i = \Phi S$$

e quindi

$$\Phi = \alpha \mathbf{O},$$

poichè S è completamente arbitraria.

Applichiamo questo teorema al moto del corpo rigido. Sia V un numero funzione della posizione p del corpo. Essendo $\frac{dV}{dp}$ un operatore lineare²¹⁾, pel teorema precedente si conclude che esiste una formazione di seconda specie f tale che

$$(IV') \quad dV = \frac{dV}{dp} dp = f \mathbf{O} dp.$$

Se V è tale che dV sia il lavoro elementare, allora f è la forza motrice, e V si chiamerà *funzione potenziale*, o senz'altro *potenziale*.

Dunque, quando esiste il potenziale, la sua derivata rispetto a p , posizione del corpo, dà la forza motrice²²⁾.

¹⁹⁾ Analogamente per gli altri valori di r .

²⁰⁾ Cfr. C. BURALI-FORTI, loc. cit. ⁸⁾, a), n° 2; loc. cit. ⁸⁾, b), n° 2.

²¹⁾ C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, loc. cit. ²⁾, b), pp. 53-60.

²²⁾ Se f è la forza motrice, esiste il potenziale solo quando $f \mathbf{O} dp$ è un differenziale esatto, cioè

$$\delta(f \mathbf{O} dp) = d(f \mathbf{O} \delta p),$$

per dp e δp arbitrarii. La stessa condizione è data da

$$\delta f \mathbf{O} dp = df \mathbf{O} \delta p,$$

ossia

$$\left(\frac{df}{dp} \delta p \right) \mathbf{O} dp = \left(\frac{df}{dp} dp \right) \mathbf{O} \delta p,$$

che dovrà esprimersi con l'annullarsi di una certa funzione di f , alla stessa guisa che il verificarsi della equazione

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \delta P \times dP = \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP \times \delta P$$

è espresso da $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ (condizione affinchè $\mathbf{u} \times dP$ sia un differenziale esatto).

7. Siano M_1, M_2 due corpi rigidi, di posizioni p_1, p_2 , reagenti l'uno sull'altro, in virtù di forze mutue, dotate di un potenziale V . Sarà V funzione soltanto di p_1 e p_2 , cioè

$$V = V(p_1, p_2).$$

Proponiamoci [con BELTRAMI ²³⁾] di trovare le condizioni a cui deve soddisfare il potenziale V affinché le forze mutue agenti fra i due corpi M_1 ed M_2 soddisfino al principio dell'*uguaglianza fra l'azione e la reazione*, vale a dire, affinché le due azioni di M_2 sopra M_1 e di M_1 sopra M_2 si facciano equilibrio ogni qualvolta i due corpi vengano collegati in un solo sistema rigido.

Per uno spostamento simultaneo dei due corpi, collegati rigidamente fra loro, deve essere

$$(8) \quad dp_1 = dp_2,$$

e il lavoro totale dovuto alle azioni di M_2 sopra M_1 e di M_1 su M_2 deve essere nullo, cioè

$$(9) \quad dV = 0.$$

Ma dalle (IV'), (8) si ha

$$dV = \frac{\partial V}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial V}{\partial p_2} dp_2 = \left(\frac{\partial V}{\partial p_1} + \frac{\partial V}{\partial p_2} \right) dp_1,$$

e quindi la (9) dà ²⁴⁾:

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial p_1} + \frac{\partial V}{\partial p_2} = 0.$$

Ora, come è facile vedere ²⁵⁾, l'integrale generale di questa equazione differenziale è

$$V = F(p_1 - p_2),$$

ove F è il simbolo di una funzione arbitraria.

²³⁾ E. BELTRAMI, loc. cit. 3), pag. 235.

²⁴⁾ Il BELTRAMI [loc. cit. 3), pag. 236] trova invece dell'unica equazione (10), le sei equazioni seguenti, che equivalgono alla (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial a'} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial V}{\partial b'} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial c'} = 0, \\ \left(b \frac{\partial V}{\partial c} - c \frac{\partial V}{\partial b} + b' \frac{\partial V}{\partial c'} - c' \frac{\partial V}{\partial b'} \right)_{0123} = 0, \quad \left(c \frac{\partial V}{\partial a} - a \frac{\partial V}{\partial c} + c' \frac{\partial V}{\partial a'} - a' \frac{\partial V}{\partial c'} \right)_{0123} = 0, \\ \left(a \frac{\partial V}{\partial b} - b \frac{\partial V}{\partial a} + a' \frac{\partial V}{\partial b'} - b' \frac{\partial V}{\partial a'} \right)_{0123} = 0. \end{aligned}$$

²⁵⁾ Si ponga infatti $x = p_1 + p_2$, $y = p_1 - p_2$. Avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_1} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial p_2} &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned}$$

Sommando, e ricordando la (10), si ha

$$2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \text{da cui} \quad V = F(y) \quad \text{ossia} \quad V = F(p_1 - p_2),$$

essendo F simbolo di funzione arbitraria di $p_1 - p_2$.

Ritroviamo dunque subito il risultato ottenuto dal BELTRAMI ²⁶⁾: «... la forma più generale del potenziale V , soddisfacente alla condizione che ci siamo imposto, è quella di una funzione arbitraria dei sei parametri indipendenti, per mezzo dei quali si può sempre, ed in infiniti modi, individuare la posizione relativa dei due corpi», i sei parametri essendo ridotti alla forma di 2^a specie (sistema a sei dimensioni) $p_1 - p_2$.

Valga o no il principio di azione e reazione, si ha sempre

$$dV = \frac{\partial V}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial V}{\partial p_2} dp_2,$$

e quindi $\frac{\partial V}{\partial p_1}$, $\frac{\partial V}{\partial p_2}$ sono rispettivamente la forza che emana da M_2 ed agisce su M_1 , e quella che emana da M_1 ed agisce su M_2 ²⁷⁾.

Torino, Gennaio 1913.

ANGELO PENSA.

²⁶⁾ E. BELTRAMI, loc. cit. ³⁾, pag. 239.

²⁷⁾ Le $\frac{\partial V}{\partial p_1}$, $\frac{\partial V}{\partial p_2}$ equivalgono alle sei espressioni (2) di pag. 235 della citata Memoria di BELTRAMI ³⁾, ed alle sei espressioni analoghe, ottenute, ponendo nelle sei precedenti, a' , b' , c' , al posto di a , b , c .