man sofort. Die Rechnungen sind nicht schwieriger wenn auch weitläufiger.

Sind die Oeffnungen jedoch nicht geradlinig begrenzt, so lassen sich die Integrale nicht in geschlossener Form darstellen, sie führen auf Integrale, welche bisher noch nicht bestimmt sind. Man muß dann zu Reihenentwicklungen seine Zuflucht nehmen wie es Hr. Knochenhauer bereits gethan hat ¹⁾).

Marburg d. 15. Februar 1860.

VII. *Geometrische Methode, um das Potential der, von einer Kugel auf innere oder äußere Punkte ausgeübten, Wirkung zu bestimmen; von C. Neumann in Halle.*

Für den Satz, daß eine unendlich dünne, von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte, Schaafe auf einen äußeren Punkt eine Kraft ausübe, deren Richtung durch die Axe des von diesem Punkte an die Schaafe gelegten Tangenten-Kegels dargestellt wird, hat Steiner einen äußerst einfachen, auf rein geometrischen Betrachtungen beruhenden, Beweis gegeben ²⁾). Jene geometrischen Betrachtungen von Steiner führten mich zu einer neuen und einfachen Methode, um das Potential einer Kugel auf innere oder äußere Punkte zu bestimmen. Ich werde mich hier bei Auseinandersetzung dieser Methode auf die Feststellung folgenden Satzes beschränken.

» Bezeichnet M die Masse einer unendlich dünnen, von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Schaafe; bezeichnet ferner a den Radius der Schaafe, und e die Ent-

1) Knochenhauer, Undulationstheorie etc. S. 22.

2) Crelle's Journal, Bd. 12, S. 141.

fernung eines beliebig gelegenen Punktes vom Centrum derselben; so ist das Potential der Schaafe in Bezug auf diesen Punkt $= \frac{M}{a}$, wenn derselbe im Innern der Schaafe liegt; dagegen $= \frac{M}{e}$, wenn der Punkt ein äußerer ist.

Ist nämlich auf diese Weise das Potential einer Kugelschaafe bestimmt; so ergibt sich dann das Potential für eine volle Kugel von selbst.

§. 1. Das Potential für innere Punkte.

Es sey C der Mittelpunkt der Kugelschaafe, und Q der angezogene Punkt. Man construire einen Kegel von unendlich kleiner Oeffnung $d\omega$, welcher seinen Scheitelpunkt in Q hat, und bei O und O^1 zwei unendlich kleine Elemente do und do_1 aus der Kugelfläche ausschneidet. Bezeichnet δ die unendlich geringe Dicke der Schaafe, und q die Dichtigkeit ihrer Masse, so sind

$$\frac{q\delta \cdot do}{a} \quad \text{und} \quad \frac{q\delta \cdot do_1}{a_1}$$

die Potentiale der Elemente do und do^1 auf den Punkt Q . Das Potential V der ganzen Schaafe auf Q hat daher folgenden Werth

$$V = q\delta S \frac{do}{a} = q\delta S \frac{do_1}{a_1} = \frac{q\delta}{2} S \left(\frac{do}{a} + \frac{do_1}{a_1} \right)$$

die Summation S über alle Elemente do und alle Elemente do_1 der Kugelschaale ausgedehnt. Zwischen der Kegel-Oeffnung $d\omega$ d. i. zwischen dem Element, welches der Kegel QO aus einer, mit dem Radius Eins um Q beschriebenen, Kugelfläche ausschneidet, und zwischen dem Element do , welches derselbe Kegel aus der gegebenen, um C beschriebenen, Kugelfläche ausschneidet, findet, wie man augenblicklich sieht, die Relation

$$do \cos \varphi = \alpha^2 d\omega$$

statt; und ebenso ist:

$$do_1 \cos \varphi = \alpha_1^2 d\omega.$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck COO , die Gleichung:

$$\alpha + \alpha_1 = 2a \cos \varphi.$$

Aus diesen drei Relationen folgt successive:

$$\frac{do}{\alpha} + \frac{do_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha + \alpha_1}{\cos \varphi} d\omega = 2a d\omega$$

und hierdurch nimmt der vorhin für V gefundene Werth folgende Gestalt an:

$$V = \frac{q\delta}{2} S 2a d\omega = q\delta a S d\omega.$$

Die Summation S ist hier über alle Elemente $d\omega$ der, um Q mit dem Radius Eins beschriebenen, Kugelfläche auszudehnen; mithin $S d\omega = 4\pi$. Beachtet man daher, daß die Masse M der ganzen Kugelschaale den Werth

$$M = q\delta \cdot 4\pi a^2$$

besitzt, so ergibt sich schliesslich:

$$V = \frac{M}{a}.$$

§. 2. Das Potential für äufsere Punkte.

Es sey wiederum C der Mittelpunkt der Kugelschaale, und es sey ferner P der angezogene Punkt.

Man lege von P aus einen Tangenten-Kegel an die Schaale (PT soll eine Kante dieses Kegels vorstellen), und bezeichne den Mittelpunkt des Kreises, in welchem Schaale

und Kegel einander berühren, mit Q . Alsdann ist CT mittlere Proportionale zwischen CP und CQ . Nimmt man nun auf der Kugelschaale einen beliebigen Punkt O an, und zieht die Linien OC , OQ , OP , so ist $CT = CO$, also auch CO mittlere Proportionale zwischen den vorher genannten Linien CQ und CP . Daraus ergibt sich, daß die beiden Dreiecke CQO und COP einander ähnlich sind. Die Seiten dieser beiden Dreiecke sind demnach einander proportional, d. h.

$$\frac{\alpha}{\eta} = \frac{a}{e}$$

Ebenso ergibt sich, wenn man O_1 an Stelle von O nimmt:

$$\frac{\alpha_1}{\eta_1} = \frac{a}{e}.$$

Es repräsentire nun wiederum, wie früher, die gerade Linie OQO_1 einen Kegel von unendlich kleiner Oeffnung $d\omega$, welcher seinen Scheitelpunkt in Q hat, und bei O und O_1 zwei unendlich kleine Elemente do und do_1 aus der Kugelfläche ausschneidet. Alsdann hat das Potential V der Schaale in Bezug auf den Punkt P folgenden Werth:

$$V = q \delta S \frac{do}{\eta} = q \delta S \frac{do_1}{\eta_1} = \frac{q \delta}{2} S \left(\frac{do}{\eta} + \frac{do_1}{\eta_1} \right).$$

Aus den vorhin aufgestellten Relationen:

$$\begin{aligned} do \cos \varphi &= \alpha^2 d\omega & \alpha + \alpha_1 &= 2a \cos \varphi \\ do_1 \cos \varphi &= \alpha_1^2 d\omega & \frac{\alpha}{\eta} &= \frac{\alpha_1}{\eta_1} = \frac{a}{e} \end{aligned}$$

ergiebt sich nun successive:

$$\frac{do}{\eta} + \frac{do_1}{\eta_1} = \left(\frac{\alpha^2}{\eta^2} + \frac{\alpha_1^2}{\eta_1^2} \right) \frac{d\omega}{\cos \varphi} = \frac{a}{e} \frac{\alpha + \alpha_1}{\cos \varphi} d\omega = \frac{2a^2}{e} d\omega.$$

Hierdurch erhält der für V aufgestellte Werth folgende Gestalt

$$V = \frac{q \delta}{2} S \frac{2a^2}{e} d\omega = \frac{q \delta a^2}{e} 4\pi$$

oder mit Einführung der Masse M :

$$V = \frac{M}{e}.$$