Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln.

Von A. CLEBSCH und P. GORDAN.

§. 1.

Charakter der Aufgabe. Symbolische Darstellungen.

Die Formen, von welchen hier die Rede sein soll, drücken, gleich Null gesetzt, eine in der Ebene stattfindende Beziehung zwischen den Coordinaten eines Punktes und einer Geraden aus. Solche Formen, wo sie in der Theorie der Curven secundär auftreten, führen den Namen von Zwischenformen oder Concomitanten. Aber ein genauere Einblick in die Theorie der ternären algebraischen Formen lehrt, dass gewisse allgemeine Eigenschaften erst dann vollständig erkannt werden können, wenn man eine Form von der Gestalt einer Zwischenform zur Grundform wählt. Die gegenwärtige Untersuchung soll für das von solchen Formen entspringende Formensystem gewisse Gesichtspunkte allgemeiner Natur aufstellen, welche sodann auf Formen, deren Grad in beiden Arten von Variabeln der erste ist, angewendet und geometrisch gedeutet werden, was denn unter anderm auf die bekannten Eigenschaften collinearer ebener Systeme führt.

Bezeichnet man durch x_1, x_2, x_3 Punktcoordinaten, durch u_1, u_2, u_3 Liniencoordinaten, ferner durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ symbolische Coefficienten, welche den ersten, durch a_1, a_2, a_3 solche, welche den zweiten contragredient sind; setzen wir ferner, wie im Folgenden ähnlich immer geschehen soll:

$$u_\alpha = u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3$$

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

so kann man die allgemeinste Grundform der angegebenen Art durch

$$f = a_x^m u_\alpha^n$$

darstellen; wobei also der Coefficient eines Products von u und x symbolisch durch das entsprechende Product der a und α ersetzt ist, multiplicirt mit einem Polynomialcoefficienten. Statt der symbolischen Coefficienten a wird es erlaubt sein, auch gelegentlich b, c u. s. w., statt der α auch β, γ u. s. w. zu benutzen.

Aus der Function f entsteht ein System algebraischer Formen, unter denen sich Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen befinden, welche aber im Allgemeinen den Charakter von Zwischenformen besitzen. Auf dem Wege, welcher im 59^{ten} Bd. des Crelleschen Journ., p. 1 folg. eingeschlagen ist, zeigt sich, dass alle Formen des Systems auf symbolische Producte von Determinanten und von linearen Ausdrücken zurückführbar sind. Die erstern müssen je drei Reihen cogredienter Grössen enthalten; also entweder Grössen u mit symbolischen Coefficienten $a, b, \dots$, oder Grössen x mit symbolischen Coefficienten $\alpha, \beta, \dots$. Die andern enthalten zwei Reihen von contragredienten Variabeln; also eine Reihe von $u, a, b, \dots$ und eine Reihe von $x, \alpha, \beta, \dots$. Die symbolischen Producte also, in welche jede dem Formenkreise von f angehörige Gestalt sich zerlegen lässt, haben in ihren Factoren folgende Typen, in welchen der Kürze wegen (a, b, c) für die Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$ gesetzt ist u. s. w.:

- I. 1) (abu) , 2) (abc) , 3) $(\alpha\beta x)$, 4) $(\alpha\beta\gamma)$
 5) u_x , 6) u_a , 7) a_x , 8) a_a .

Unter diesen ist der 5^{te} eine selbstständige Form, die bei contragredienten Variabeln auftretende evidente Zwischenform u_x . Die übrigen sind rein symbolische Factoren.

Eine in dem Formenkreise von f enthaltene Gestalt sei in den Coefficienten von f von der h^{ten} Ordnung, in den x vom μ^{ten} Grade, in den u von der ν^{ten} Classe. Die Summe $\mu + \nu$ von Grad und Classe soll als Rang bezeichnet werden.

§. 2.

Operationen zur Formenbildung. Gruppen des Formensystems.

Denken wir uns das ganze aus f entspringende Formensystem nach der Ordnung eingetheilt, so entsteht zunächst folgende Frage: Wie kann man die verschiedenen Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus den Formen h^{ter} Ordnung sich abgeleitet denken?

Um die Sache völlig zu fixiren, denken wir uns jede Form nicht nur in ihrem Ausdruck in Coefficienten und Variabeln gegeben, sondern auch unter ihren symbolischen Darstellungen, welche in mannigfachster Weise möglich sind, eine bestimmte festgehalten. Betrachten wir also zunächst eine Form $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung als ein solches völlig gegebenes symbolisches Product von Determinanten und linearen Factoren. Unter den verschiedenen symbolischen Buchstabenpaaren greifen wir ein beliebiges, etwa a, α , heraus. - Soweit die Buchstaben dieses Paares in unserer Form in den Typen u_a, a_x, a_a auftreten, lassen wir diese Factoren aus. Soweit sie in Verbindungen wie

(1) $(abu), (abc), (\alpha\beta x), (\alpha\beta\gamma)$
auftreten, setzen wir für sie die entsprechenden Ausdrücke

(2) $b_x, (ubc), u_\beta, (x\beta\gamma).$

Durch diese Operationen geht die Form $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung in eine Form h^{ter} Ordnung über. Aus dieser Form h^{ter} Ordnung kann man umgekehrt die Form $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung entstehen lassen, indem man in der erstern an Stelle der Factoren (2) wieder die Factoren (1) eintreten lässt, auf diese Weise die neuen symbolischen Buchstaben a, α einführt, und die Factoren u_α, a_x, a_α in entsprechenden Potenzen ergänzt.

Man bemerkt, dass sowohl die eine als die andere dieser Operationen, indem man andere Buchstabenpaare $a, \alpha; b, \beta$ u. s. w. benutzt, auf die mannigfaltigste Weise ausgeführt werden kann. Aber das Wesentlichste ist, dass man erkennt, wie aus den Formen h^{ter} Ordnung, diese als gegeben betrachtet, alle Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine gewisse Anzahl symbolischer Operationen abgeleitet werden können. Diese Operationen sind folgende:

1) Es werden einige von den Factoren b_x, c_x u. s. w., welche in dem symbolischen Ausdruck der Form h^{ter} Ordnung vorkommen, in $(abu), (aeu)$ u. s. w. verwandelt, wo a, α Buchstaben sind, welche in dem gegebenen symbolischen Ausdrucke nicht vorkommen. Die Anzahl dieser Factoren sei m_1 .

2) Es werden einige Factoren $(ubc), (ude)$ u. s. w. in $(abc), (ade)$ u. s. w. verwandelt. Die Anzahl dieser Factoren sei m_2 .

3) Es werden einige Factoren $u_\beta, u_\gamma \dots$ in $(\alpha\beta x), (\alpha\gamma x)$ u. s. w. verwandelt. Die Anzahl dieser Factoren sei m_3 .

4) Es werden einige Factoren $(x\beta\gamma), (x\delta\epsilon)$ u. s. w. in $(\alpha\beta\gamma), (\alpha\delta\epsilon) \dots$ verwandelt. Die Anzahl dieser Factoren sei m_4 .

Wenn wir, von einer Form h^{ter} Ordnung ausgehend, die Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4 auf eine bestimmte Weise gewählt haben, so ist es zwar noch möglich, auf sehr mannigfache Weise Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung abzuleiten, indem man die vier genannten Operationen auf andere und andere symbolische Factoren der Form h^{ter} Ordnung anwendet; aber die hinzuzufügenden Potenzen der symbolischen Factoren a_x, u_α, a_α sind soweit bestimmt, dass wenn man die Potenz von a_α annimmt ($= m_0$), die übrigen völlig gegeben sind. In der That muss die Anzahl aller vorkommenden a gleich m , die aller α gleich n sein. Daher ist die hinzuzufügende Potenz von a_x die $(m - m_1 - m_2 - m_0)^{\text{te}}$, die hinzuzufügende Potenz von u_α die $(m - m_3 - m_4 - m_0)^{\text{te}}$.

Aber wegen der folgenden Betrachtungen ist es zweckmässig, die Anwendung dieser vier Operationen, und damit zugleich die Bedeutung der Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4 passend zu erweitern. Die erste

Operation kann man so ausdrücken, dass in einigen Factoren $b_x, c_x, \dots$ die x_i durch die Unterdeterminanten

$$u_2 a_3 - u_3 a_2, u_3 a_1 - u_1 a_3, u_1 a_2 - u_2 a_1$$

ersetzt werden. Aber diese Ersetzung kann ebenso gut bei einem der Factoren ($\beta\gamma x$) stattfinden, wodurch derselbe in

$$u_\beta a_\gamma - u_\gamma a_\beta$$

übergeht. Auch dieses soll erlaubt sein, und wie oft es geschieht, soll in der Zahl m_1 mit einbegriffen werden.

Ebenso kann man die dritte Operation so ausdrücken, dass in einigen Factoren $u_\beta, u_\gamma, \dots$ die u durch die Grössen

$$x_2 \alpha_3 - x_3 \alpha_2, x_3 \alpha_1 - x_1 \alpha_3, x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1$$

ersetzt werden. Es soll nun erlaubt sein, dieses auch in den Factoren (bca) vorzunehmen, wodurch ein solcher Factor in

$$b_x c_a - c_x b_a$$

übergeht; die Zahl m_3 soll zugleich die Anzahl dieser Veränderungen umfassen.

Es bedeutet also jetzt:

- 1) m_1 : wie oft die x durch die Unterdeterminanten der u und a ersetzt sind;
- 2) m_2 : wie oft die u durch a ersetzt sind;
- 3) m_3 : wie oft die u durch die Unterdeterminanten der x und a ersetzt sind;
- 4) m_4 : wie oft die x durch a ersetzt sind.

Nachdem wir so die aus einer Form h^{ter} Ordnung entspringenden Bildungen nach den Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 in gewisse Gruppen gebracht haben, soll für die Resultate der Anwendung der Operationen, von denen die Rede ist, eine gewisse Reihenfolge festgesetzt werden. Und zwar sollen die vermitteltst derselben entstandenen Formen so geordnet werden, dass die Formen einer gewissen Ordnung zuerst nach ihrem Range geordnet werden; die Formen desselben Ranges dann nach der Höhe der ersten charakteristischen Zahl m_0 , so dass die Formen mit grössern m_0 denjenigen vorangehen, welche ein kleineres m_0 haben; diese Formen wieder sollen geordnet werden nach der Grösse der zweiten charakteristischen Zahl (Gesamtzahl aller geänderten symbolischen Factoren)

$$M_1 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

von dem kleinsten Werthe von M_1 beginnend; in gleicher Weise sollen die Formen mit gleichem M_1 weiter nach der Höhe der dritten charakteristischen Zahl

$$M_2 = m_2 + m_4$$

geordnet werden, welche zusammen genommen angiebt, wie oft die u

in a und die x in a verwandelt sind; die Formen mit gleichem M_2 nach der Höhe der vierten charakteristischen Zahl

$$M_3 = m_2$$

(Anzahl der Factoren, in welchen die u in a verwandelt sind), und die Formen mit gleichem M_3 nach der Höhe der fünften charakteristischen Zahl

$$M_4 = m_1,$$

welche die Anzahl der Factoren, in denen die x in Unterdeterminanten der u und der a verwandelt sind, anzeigt. Endlich sollen die Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche alle diese Zahlen gemeinsam haben, nach den Functionen h^{ter} Ordnung geordnet werden, aus welchen sie entstanden sind. Diese selbst ordnen sich wieder nach denen der $(h-1)^{\text{ten}}$ u. s. w., so dass nur die Anordnung der Formen erster Ordnung gegeben sein muss.

Mit Hülfe dieser Festsetzungen kann man es unternehmen, eine Tafel aller zu f gehörigen algebraischen Formen in ihrer symbolischen Darstellung zu entwerfen und anzuordnen. Dabei wird zunächst an Stelle der gegebenen Function f , und zwar in der beistehenden Aufeinanderfolge die Formenreihe zu setzen sein (mit abnehmendem m_0):

$$\dots, a_x^3 a_x^{m-3} u_x^{n-3}, a_x^2 a_x^{m-2} u_x^{n-2}, a_x a_x^{m-1} u_x^{n-1}, a_x^m u_x^n.$$

Indem man von dieser Reihe ausgeht, der, wenn man will, die evidenten Zwischenform u_x noch vorausgehen kann, und die oben festgesetzten Anordnungen festhält, gelangt man zu einer Anordnung aller Formen in eine völlig bestimmte Reihe von Gruppen. Man wendet auf jede Form h^{ter} Ordnung die Operationen so an, dass man auf Operationen mit kleinen M_1 solche mit grössern, unter diesen auf Operationen mit kleineren M_2 solche mit grösseren etc. folgen lässt, unter den erhaltenen Bildungen aber die mit niederem Range voranstellt. In jeder der erhaltenen Gruppen kommen nur noch solche Formen vor, für welche die 5 Zahlen m_i oder M_i übereinstimmen und welche aus derselben Form h^{ter} Ordnung entstanden sind. Aber freilich entsteht dabei jede höhere Form auf verschiedene Weise, da wir oben gesehen haben, dass man von einer Form $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung auf mannigfache Weise zu Formen h^{ter} Ordnung zurückgehen könne. Jede höhere Form kommt also in mehreren dieser Gruppen vor; es kommen ausserdem Formen vor, welche nicht einfache symbolische Producte, sondern Summen von solchen sind, die dann zum Theil neu, zum Theil schon früher dagewesen sein können.

Da nun die Anordnung der Gruppen eine völlig bestimmte ist, so können wir die Festsetzung machen, dass jede Form nur in derjenigen Gruppe beibehalten werden soll, welche bei der angenommenen Anordnung der Gruppen zuerst vorkommt.

Es wird sich zeigen, dass dann auch die weitem Formen ausgelassen werden können, welche aus solchen auszulassenden Formen durch die angeführten Operationen hervorgehen. Aber ehe wir hierauf eingehen können, müssen andere Punkte der Betrachtung ihre Erledigung finden.

§. 3.

Zusammenhang der Formen einer Gruppe.

Die verschiedenen Formen einer Gruppe unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass dieselben Operationen auf verschiedene symbolische Factoren der Ausgangsform h^{ter} Ordnung angewandt sind. Bezeichnen wir für den Augenblick in dieser Factoren der Form b_x und der Form $(\beta\gamma x)$ gleichmässig durch $r_x, r_x \dots$, Factoren der Form u_β und der Form (bcx) gleichmässig durch u_q, u_q etc., so kann man der Form h^{ter} Ordnung die Gestalt geben

$$F = \sum r_x r'_x \dots u_q u_q \dots P,$$

in welcher P das Product derjenigen symbolischen Factoren bezeichnet, welche weder die x noch die u enthalten, und wo die Summe $\sum$ sich auf die verschiedenen symbolischen Producte bezieht, aus denen F zusammengesetzt sein kann. Verschiedene Formen derselben Gruppe entstehen dadurch, dass entweder die Operationen (1), (4) auf verschiedene der Factoren $r_x, r'_x \dots$, oder dadurch, dass die Operationen (2), (3) auf verschiedene der Factoren u_q, u_q angewandt werden. Wie verschieden indess auch zwei so entstehende Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein mögen, so kann man doch immer eine Reihe von Formen derselben Gruppe zwischen ihnen so einschalten, dass je zwei benachbarte Formen der ganzen Reihe sich nur durch die Benutzung zweier Factoren unterscheiden, sei es zweier Factoren r_x, r'_x , oder zweier Factoren u_q, u_q . Wenn wir also zeigen, dass die Differenz zweier solcher benachbarten Formen der Gruppe immer aus Formen sich zusammensetzen, die frühern Gruppen angehören, so folgt, dass allgemein die Differenz zweier Formen derselben Gruppe durch Formen früherer Gruppen zusammensetzbar ist.

Um diesen Satz für benachbarte Formen zu beweisen, ist es nur nöthig, ihn für solche Formen zu beweisen, welche sich durch Benutzung von r_x und r'_x unterscheiden, da dann für die aus verschiedener Benutzung von u_q, u_q entstandenen, wie man leicht sieht, dasselbe gelten muss; auch genügt es natürlich, in F ein Glied der Summe zu betrachten. Die bei der Benutzung von r_x, r'_x eintretende Verschiedenheit kann aber eine dreifache sein. Entweder bleibt einer der Factoren ungeändert, der andere wird durch die Operation (1) geändert; oder einer bleibt ungeändert, der andere wird durch die

Operation (4) geändert; oder endlich, einer wird durch die Operation (1), der andere durch die Operation (4) geändert. Bezeichnet man immer durch M denjenigen Theil des Resultats, welcher nicht aus den Factoren r_x, r'_x hervorgegangen ist, und also in beiden benachbarten Formen der nämliche ist, so sind die drei zu betrachtenden Differenzen folgende, welche mit Hülfe der bekannten Identität in die bestehenden Formen verwandelt werden:

$$M[r_x(r'ua) - r'_x(rua)] = M\{u_x(r'ra) - a_x(r'ru)\}$$

$$M(r_x r'_a - r'_x r_a) = M. \begin{vmatrix} r_1 & r'_1 & x_2 & a_3 & - & x_3 & a_2 \\ r_2 & r'_2 & x_3 & a_1 & - & x_1 & a_3 \\ r_3 & r'_3 & x_1 & a_2 & - & x_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$M[r_a(r'ua) - r'_a(rua)] = M\{u_a(r'ra) - a_a(r'ru)\}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass in der That alle Glieder rechts in frühern Gruppen vorkommen. In dem ersten Ausdrucke scheidet sich im ersten Gliede der Factor u_x aus; der Rest hat also niedern Rang und kommt also früher vor. Das zweite Glied entsteht aus einer Function h^{ter} Ordnung, welche sich nur dadurch von F unterscheidet, dass an Stelle der Factoren $r_x r'_x$ der Factor $(r'ru)$ gesetzt wird; und zwar entsteht es durch Operationen, welche übrigens die bei Entstehung der linken Seite auf F angewandten sind, nur dass einmal weniger x in Unterdeterminanten der u und a verwandelt sind. Daher ist M_1 um 1 kleiner als bei Aufstellung der Terme der linken Seite, und das fragliche Glied gehört also einer frühern Gruppe an.

Die rechte Seite der zweiten Gleichung entsteht aus derselben Function h^{ter} Ordnung, welche eben an Stelle von F trat, indem man übrigens dieselben Operationen ausführt, wie sie zur Bildung der linken Seite benutzt wurden, nur dass einmal statt dass die x sich in die α verwandeln, die u in die Unterdeterminanten der x und der a übergehen. Daher hat zwar M_1 denselben Werth wie bei den links angewandten Operationen; aber M_2 ist um 1 kleiner; die Form rechts gehört also einer frühern Gruppe an wie die Formen links.

Die rechte Seite der dritten Gleichung besteht aus 2 Theilen. Beide entstehen wieder aus derselben Function h^{ter} Ordnung, welche schon benutzt wurde. Aber bei dem ersten Theile werden, statt einmal die x in die α , einmal die x in Unterdeterminanten der u und a zu verwandeln, nur die u in a verwandelt; daher ist M_1 um 1 kleiner. Im zweiten hat man zwei Veränderungen weniger, also M_1 um 2 kleiner, und ausserdem tritt a_a vor, so dass m_0 um 1 grösser wird. Aus beiden Gründen gehört das Glied einer frühern Gruppe an.

Hierdurch ist in der That der zu beweisende Satz erwiesen.

§. 4.

Uebereinanderschiebungen.

Wenn man die Form F selbst wie eine Grundform betrachtet, und sie symbolisch durch

$$(1) \quad F = s_x^\mu u_\sigma^\nu$$

darstellt, so entsteht durch Anwendung der oben geschilderten Operationen ein Ausdruck, welcher ein gewisses Aggregat der Formen der entsprechenden Gruppe $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, und welcher die besondere Eigenschaft hat, dass seine Coefficienten sich aus denen von f und F direct zusammensetzen, linear für jede beider Arten von Coefficienten. Dieser Ausdruck, welcher die symbolische Form hat:

$$(1^a) \quad \Phi = s_x^{\mu-m_1-m_4} \cdot u_\sigma^{\nu-m_2-m_3} \cdot a_\alpha^{m_0} \\ (su\alpha)^{m_1} \cdot s_\alpha^{m_4} \cdot (\sigma x\alpha)^{m_2} \cdot a_\sigma^{m_3} \cdot a_x^{m-m_0-m_1-m_2} \cdot u_\alpha^{n-m_0-m_3-m_4}$$

kann in der That aus F dadurch abgeleitet werden, dass man F nach den x und den u wiederholt differenzirt, und die Differentialquotienten mit passenden Grössen multiplicirt und addirt, welche ausser den u und den x nur Coefficienten von f enthalten. Wir wollen diese Art, F zu behandeln, als Uebereinanderschiebung von F mit f^*), und Φ als das Resultat der Uebereinanderschiebung bezeichnen. Man erkennt dann leicht, dass die Differenz des einer Gruppe entsprechenden Φ und einer Form der Gruppe durch Formen früherer Gruppen ausdrückbar ist. Dieser Satz ist eine directe Folge des im vorigen §. bewiesenen. Wenden wir nämlich die Differentialoperationen, von denen oben die Rede war, auf die andere Form von F an:

$$(2) \quad F = \Sigma r_x r'_x \dots u_\sigma u_{\sigma'} \dots P,$$

so erhalten wir offenbar eine Summe von Gliedern, welche durch Vertauschung der $r, r' \dots$ oder der $s, s' \dots$ unter sich in einander übergehen, d.-h. wir erhalten, bis auf einen allen gemeinschaftlichen Zahlenfactor, die Summe aller Formen der betreffenden Gruppe, diese so gezählt, als wären alle r und alle s von einander verschieden,

$$(3) \quad \Phi = k \Sigma \varphi;$$

wo unter φ die verschiedenen Formen der Gruppe verstanden sind, und k eine Zahl bedeutet. Nun entsteht aber die symbolische Form

*) Der Process des Uebereinanderschiebens ist hiernach nur eine Erweiterung des Processes, welchen Herr Aronhold als Bildung von Functionalinvarianten bezeichnet, wobei freilich hier immer eine der dabei benutzten Functionen als die ursprüngliche angenommen ist. Aber das letztere, welches nur wegen des Ganges der obigen Untersuchung geschieht, ist für den Begriff unwesentlich.

(1) aus (2), indem man alle r einander gleich setzt, alle s einander gleich setzt und das Summenzeichen auslässt. Hierdurch geht jedes φ in Φ über; ist also l die Anzahl der φ in dem oben festgestellten Sinne, so hat man auch

$$\Phi = kl\Phi, \quad k = \frac{1}{l}$$

und die Gleichung (3) geht also über in

$$l\Phi = \Sigma\varphi.$$

Ist also φ_0 irgend eine der Formen φ , so ist auch

$$l(\Phi - \varphi_0) = \Sigma(\varphi - \varphi_0),$$

wo nun rechts das von φ_0 herrührende Glied identisch verschwindet. Aber nach dem vorigen §. sind die Differenzen $\varphi - \varphi_0$ durch Formen früherer Gruppen ausdrückbar, also auch $\Phi - \varphi_0$, was zu beweisen war.

Der hierdurch nachgewiesene Satz lässt sich noch anders aussprechen. Denn da die Differenz zwischen der Uebereinanderschlebung und einer Form der Gruppen sich durch Formen früherer Gruppen ausdrückt, so kann man jede Form ersetzen durch die entsprechende Uebereinanderschlebung, vermehrt um Glieder früherer Gruppen. Führt man bei diesen nun wieder dasselbe aus, und fährt so fort, so erhält man endlich den Satz:

Jede Form einer Gruppe ist gleich der entsprechenden Uebereinanderschlebung, vermehrt um Uebereinanderschlebung, welchen frühere Gruppen entsprechen.

Man darf also jetzt die Gruppen ganz aufgeben, und erhält das vollständige System der zu f gehörigen Formen, wenn man in den früheren Entwicklungen statt jeder Gruppe die entsprechende Uebereinanderschlebung setzt.

Hieraus ergibt sich nun sofort der am Ende von §. 2. angedeutete Satz. Denn wenn eine durch Uebereinanderschlebung entstandene Form F_k eine lineare Combination von früher auftretenden Formen F'_k derselben Art ist, so sind auch alle durch Uebereinanderschlebung mit f aus F_k abgeleitete Formen dieselben linearen Combinationen der aus den F'_k abgeleiteten, und können also ebenfalls ausgelassen werden. Und so sieht man also, dass bei der Bildung der Tafel der Uebereinanderschlebung jede lineare Combination früherer Formen selbst nebst allen ihren abgeleiteten Formen ausgelassen werden kann.

Auch ein anderer Punkt, welcher früher zweifelhaft scheinen konnte, wird hiermit erledigt. Man durfte früher keineswegs solche Formen ohne Weiteres auslassen, welche, wie auch ihre symbolische Form beschaffen war, den wahren Werth 0 hatten. Aber nunmehr

sieht man, dass diese Formen in der Tafel der Uebereinanderschiebungen nie etwas geben können, da die Uebereinanderschiebung von f mit einer identisch verschwindenden Function nothwendig selbst identisch verschwindet.

Aber zugleich sieht man, dass, wenn eine Uebereinanderschiebung nicht durch frühere linear ausdrückbar ist, auch keine der in der entsprechenden Gruppe enthaltenen Formen identisch verschwinden kann, da sie der Uebereinanderschiebung selbst, vermehrt um lineare Combinationen früherer, gleich ist.

Da zu jeder der frühern Gruppen nur eine Uebereinanderschiebung gehört, so bilden die Uebereinanderschiebungen ein völlig festgeordnetes System; und lässt man jede Form dabei aus, welche durch frühere linear ausdrückbar ist, so kommt auch jede Form nur einmal vor; wobei natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass viele dieser Formen sich noch auf höhere als lineare Weise durch andere ausdrücken.

§. 5.

Volle Systeme h^{ter} Ordnung.

Unter einem vollen System von Formen h^{ter} Ordnung sei ein solches verstanden, durch welches alle Formen h^{ter} Ordnung in dem aus f entspringenden Formensystem sich linear ausdrücken lassen, wenn man noch Potenzen von u_x als ergänzende Factoren hinzufügt. Aus dieser Definition folgt von selbst, dass, wenn in der Tafel der Uebereinanderschiebungen ein volles System h^{ter} Ordnung gegeben ist, die Uebereinanderschiebungen aller Formen h^{ter} Ordnung mit f , also alle Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sich ebenfalls durch die Uebereinanderschiebungen jenes vollen Systems multiplicirt mit Potenzen von u_x linear ausdrücken lassen. Um dieses einzusehen, braucht man nur zu beweisen, dass durch Uebereinanderschiebung von f mit $u_x^p \cdot F$ Glieder entstehen, welche aus Potenzen von u_x und aus Uebereinanderschiebungen von F mit f zusammengesetzt sind. Aber der Ausdruck $u_x^p \cdot F$ kommt als Entwicklungscoefficient von ε^p in dem Ausdrücke

$$(s_x + \varepsilon u_x)^{\mu+p} u_o^\nu$$

vor. Setzt man daher in Φ (1^a §. 4) $\mu + p$, $s + \varepsilon u$ statt μ , s und nimmt den Coefficienten von ε^p , so erscheint in der That der neue Ausdruck als Aggregat von Termen, welche die nämliche Gestalt wie Φ haben, und mit Potenzen von u_x multiplicirt sind.

Die Uebereinanderschiebungen eines vollen Systems h^{ter} Ordnung geben also ein volles System $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dasselbe kann noch bürffüssige Formen enthalten, d. h. solche, welche durch andere un-

ter ihnen linear ausdrückbar sind; aber es können niemals Formen fehlen, welche zur Herstellung eines vollständigen Systems nothwendig wären.

Denken wir uns alle vollständigen Systeme zunächst durch die Bildung der Tafel der Uebereinanderschiebungen so gegeben, dass alle vollen Systeme aus Uebereinanderschiebungen bestehen. Der Charakter des vollen Systems wird nun offenbar keinesweges geändert, wenn man etwa eine Form des Systems mit einem numerischen Factor multiplicirt, und ausserdem lineare Combinationen früherer Uebereinanderschiebungen (von passender Ordnung, Grad und Classe) hinzufügt. Das vollständige System bleibt also z. B. ein solches, wenn man statt jeder Uebereinanderschiebung eine beliebige Form der entsprechenden Gruppe setzt, multiplicirt mit einer beliebigen numerischen Constante. Man wird sehen, von welcher Wichtigkeit dies für die Anwendungen ist.

Auf ein ganz beliebig gegebenes volles System der h^{ten} Ordnung kann man immer den Process der Uebereinanderschiebung anwenden, um ein volles System $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu erhalten. Denn die das volle System h^{ter} Ordnung ersetzenden Uebereinanderschiebungen kann man durch die Formen des beliebigen vollen Systems h^{ter} Ordnung linear ausdrücken; also auch die Uebereinanderschiebungen jener, d. h. ein volles System $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, durch die Uebereinanderschiebungen dieser, was zu beweisen ist.

Indem man nun dieses mit dem Vorigen combinirt, kann man von einem beliebig gegebenen vollen System von Formen F_h h^{ter} Ordnung ausgehen. Wenn jede Form dieses vollen Systems in einer gewissen symbolischen Gestalt gegeben ist, so gehört sie auch in eine gewisse Gruppe, und die gegebenen Formen werden daher in einer ganz bestimmten Weise geordnet, welche der oben festgesetzten Ordnung der Gruppen entspricht. Man bildet nun die Gruppen, in welche die aus diesem vollen System abgeleiteten Formen zerfallen. Nimmt man aus jeder dieser Gruppen eine Form, und lässt alle diejenigen dabei aus, welche durch vorangegangene linear ausdrückbar sind, so bleiben jeder Form F_h eine gewisse Zahl dieser Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zugeordnet, insofern sie bei dieser Bildungsweise gerade aus F_h hervorgegangen sind. Dabei sind also z. B. solche Formen auszulassen, welche zwar aus F entstehen können, aber welche bei Benutzung anderer Buchstabenpaare aus einer früheren Function, oder auch aus F_h selbst, aber mit Hülfe von Zahlen m , die frühern Gruppen zugehören, ableitbar sind.

Die zu den Formen des vollen Systems h^{ter} Ordnung zugehörigen Formen bilden also ein volles System $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Und man kann also, indem man sich dieses Begriffs

bedient, von den Formen 1^{ter} Ordnung ausgehend, ein System zugehöriger Formen 2^{ter} Ordnung entwickeln, zu diesen zugehörige Formen dritter Ordnung u. s. w. Man gelangt so zu der Bildung eines Formensystems, durch welches alle Formen sich linear ausdrücken lassen, welche sich in dem Formensysteme von f überhaupt finden, und welches noch willkürlich genug ist, um der Anwendung besonderer Kunstgriffe hinlänglichen Spielraum zu lassen.

§. 6.

Vollständige Formensysteme. Kriterien derselben.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist nun die Untersuchung eines vollständigen Formensystems, d. h. eines solchen, durch welches alle aus f entspringenden Formen sich als ganze und rationale Functionen darstellen lassen. Es sollen jetzt als Vorbereitung zu der folgenden Anwendung die Kriterien eines solchen Systems gegeben werden.

Zu einem vollständigen Systeme gehören immer u_x und die in §. 2 aufgeführten Formen erster Ordnung. Bezeichnen wir im Ganzen die Formen eines vollständigen Systems durch V , so enthält die im Vorigen entwickelte Tafel als Formen h^{ter} Ordnung lauter rationale Functionen der V . Aber auch die Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sollen ganze Functionen der V werden. Die Formen erster Ordnung sind es wirklich; beweisen wir also, dass, die Formen h^{ter} Ordnung als ganze Functionen der V angenommen, die Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bei der oben dargestellten Bildungsweise von selbst ganze Functionen der V werden, so ist damit dargethan, dass überhaupt alle aus f entspringenden Formen ganze Functionen der V sind, d. h. dass die V wirklich ein vollständiges Formensystem bilden.

Es ist also nichts weiter zu beweisen, als dass aus den V und aus Producten der V durch Uebereinanderschlebung oder Processe, welche derselben äquivalent sind (Bildung eines Gliedes der entsprechenden Gruppe), wieder ganze rationale Functionen der V entstehen.

Der erste Theil des zu führenden Nachweises besteht also darin, dass man aus den V selbst die Uebereinanderschlebungen oder deren Aequivalente bildet, und zeigt, dass sie wieder durch die V ausdrückbar seien. Dabei kann man, indem man den Beweis für irgend eine Form führt, immer voraussetzen, dass für alle frühere Formen der Beweis bereits geliefert sei. Der zweite Theil leistet dasselbe für Producte der V . Dieser zweite Theil kann durch folgende Betrachtungen vereinfacht werden, deren Nutzen freilich zum Theil erst durch die Anwendung völlig evident wird.

Ein Product von Functionen V sei $V \cdot M$, wo M das Product der übrigen V ist, welche darin noch vorkommen. Indem wir nun mit diesem Product die verschiedenen Uebereinanderschiebungen vornehmen, können wir jede Uebereinanderschabung durch eine Form der entsprechenden Gruppe ersetzen. Und zwar können wir diese Form so wählen, dass möglichst viel von den der Gruppe entsprechenden Operationen auf die symbolischen Factoren von V selbst angewandt werden. Kann man alle Operationen, welche der Gruppe entsprechen, auf V selbst anwenden, so zerfällt die zu bildende Form in ein Product von Formen V mit einer aus dem einen V selbst abgeleiteten Form. Ist also der erste Theil der Untersuchung bereits erledigt, so hat man bereits ein Aggregat von V vor sich, und man kann in dem hier zu behandelnden zweiten Theile solche Producte auslassen. Aber auch in vielen andern Fällen findet man, ohne selbst besondere Voraussetzungen über das Product M zu machen, dass das untersuchte Product nichts liefern kann. Es bleiben also nur gewisse Systeme der Zahlen $m_0, m_1 \dots m_4$ oder $M_0, M_1 \dots M_4$ übrig, deren Operationen bei Producten, welche ein bestimmtes V enthalten, zu berücksichtigen sind. Auf diese Weise gehören zu jedem N gewisse Systeme charakteristischer Zahlen.

Denken wir uns zu jeder Form V die Systeme charakteristischer Zahlen gebildet. Nur Producte solcher V sind dann in Betrachtung zu ziehen, welche gemeinsame Systeme charakteristischer Zahlen besitzen. Und auch bei diesen Producten sind alle solche auszuschliessen, bei welchen man die dem charakteristischen Zahlensysteme entsprechenden Operationen bereits auf ein Product aus einer geringern Anzahl ihrer Factoren anwenden kann.

Und somit ist denn der Gang der Untersuchung festgelegt. Man untersucht zuerst die Uebereinanderschiebungen der einzelnen V mit f , oder Glieder der entsprechenden Gruppen; bildet ferner die den einzelnen V entsprechenden Systeme charakteristischer Zahlen, sucht die Producte auf, deren Factoren gemeinsame charakteristische Zahlen besitzen, und indem man diese auf Producte von nicht zu viel Factoren beschränkt, hat man nachzuweisen, dass die aus diesen Producten entstehenden Bildungen als rationale Functionen der V darstellbar sind.

§. 7.

Betrachtung des Falles $m = 1, n = 1$. Vollständiges System für diesen Fall.

Wenden wir uns jetzt beispielsweise zur Betrachtung einer Form, welche für die u und für die x linear ist ($m = 1, n = 1$). Ihre symbolische Form ist

$$f = a_x u_a.$$

Die Formen erster Ordnung bestehen daher ausser f nur noch aus der Invariante a_a , und diese ist die einzige Form, für welche $m_0 = 1$ ist; bei allen übrigen Bildungen können wir $m_0 = 0$ annehmen.

Da in f nur eine symbolische Reihe a und nur eine symbolische Reihe u vorkommt, so können die Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4 nur die Werthe 0 oder 1 haben. Aber m_1 und m_2 können nicht zugleich 1 sein, da sonst bei der anzuwendenden Operation die Reihe a zweimal eingeführt würde; ebenso können m_3 und m_4 nicht zugleich 1 sein. Sonach lassen m_1, m_2 im Ganzen 3 Combinationen, m_3, m_4 ebenfalls 3 zu, und die Anzahl von Combinationen aller m_i wäre 9. Aber von diesen fallen noch zwei aus; erstlich die Combination, wo alle m_i verschwinden, welche keine eigentliche Operation, sondern nur Multiplication mit f giebt, zweitens der Fall, wo m_1 und m_3 gleichzeitig 1, m_2 und m_4 also Null sind. Denken wir uns nämlich die durch diese Zahlen charakterisirte Operation auf eine Form h^{ter} Ordnung angewandt, welche die symbolischen Factoren $r_x \cdot u_q$ enthält, so dass diese in

$$(rua)(qxa) = \begin{vmatrix} r_q & r_x & r_a \\ u_q & u_x & u_a \\ a_q & a_x & a_a \end{vmatrix}$$

übergeht. Wenn wir nun durch M das Product der übrigen symbolischen Factoren der Form bezeichnen, sodass $M \cdot r_x \cdot u_q$ die gegebene Form war, so zerfällt die neugebildete Form in die 6 Theile

$$\begin{aligned} M \cdot r_q u_x a_a - M \cdot r_q a_x u_a + M \cdot r_x u_a a_q + M \cdot r_a u_q a_x \\ - M \cdot u_x a_q r_a - M \cdot a_a r_x u_q. \end{aligned}$$

Der letzte Theil ist bis auf den Factor a_a die ursprüngliche Form selbst, der erste bis auf die Factoren $u_x \cdot a_a$ die der ursprünglichen, des niedern Ranges wegen noch vorangehende Form $M \cdot r_q$, beide h^{ter} Ordnung; also schon bekannt, der zweite Theil ist das Product der letztern Form mit f . Der dritte Theil entsteht aus $M \cdot r_x u_q$ durch Verwandlung von u in a , also durch eine Operation mit kleinerm M_1 , welche daher früher vorzunehmen ist; als die hier behandelte. Ebenso verhält es sich mit dem vierten Theil, welcher aus $M \cdot r_x u_q$ durch Verwandlung von x in a entsteht. Der fünfte Theil endlich entsteht aus $M \cdot r_x u_q$ durch Verwandlung von x in a und u in q , wobei zwar M_1 denselben, M_2 aber einen höhern Werth hat. Das einzige neue Glied also, welches die gegenwärtig betrachtete Operation, und zwar multiplicirt mit u_x , uns liefern würde, entsteht ohne diesen Factor durch die später ohnedies anzuwendende Operation, bei welcher u in a , x in a verwandelt wird. Man kann daher die erst betrachtete Operation ganz auslassen.

Hiernach erhält man für die anzuwendenden Operationen folgende Tafel, welche so angeordnet ist, dass die charakteristischen Zahlen M_i von jeder Operation zur andern gerade so wachsen, wie es die für die successive Anwendung der Operationen in §. 2. festgesetzte Regel verlangt:

	m_4	m_2	m_1	m_3	M_1	M_2	M_3	M_4	Es gehen über*)
1)	0	0	0	1	1	0	0	0	u in Unterdet. von x und α
2)	0	0	1	0	1	0	0	1	x in Unterdet. von u und a
3)	0	1	0	0	1	1	0	0	u in a
4)	1	0	0	0	1	1	1	0	x in α
5)	0	1	0	1	2	1	0	0	u in a , u in Unterdet. von x und α
6)	1	0	1	0	2	1	1	1	x in α , x in Unterdet. von u und a
7)	1	1	0	0	2	2	1	0	x in α , u in a .

Um nun das vollständige Formensystem zu erhalten, kann man von den Formen erster Ordnung ausgehen, diese Operationen anwenden, die Resultate möglichst reduciren, auf die übrig bleibenden die Operationen wieder anwenden u. s. w. Man findet dann, dass, abgesehen von der identischen Zwischenform u_x , das vollständige Formensystem aus 7 Formen besteht, welche, nach den oben gegebenen Regeln geordnet, diese sind:

$$\text{I. } i = a_x, f = a_x u_\alpha, i_1 = a_\beta b_\alpha, f_1 = a_x u_\beta b_\alpha, i_2 = a_\beta b_\gamma c_\alpha, \\ \varphi = a_x c_x b_\alpha (\beta \gamma x), \psi = u_\beta u_\gamma b_\alpha (a c u).$$

Die Anordnung der ersten 5 Formen bestimmt sich durch Ordnung und Rang. Unter den letzten beiden Formen, welche gleiche Ordnung und Rang haben, ist die 6^{te} voranzustellen, weil sie aus der 4^{ten} durch die Operation 1) der Tafel entsteht, die 7^{te} aber durch die Operation 2).

§. 8.

Nachweis, dass das System I. ein vollständiges ist.

Um nun die Formen I. als vollständiges Formensystem nachzuweisen, ist erstlich es nöthig, zu zeigen, dass die Anwendung der in der Tafel aufgeführten Operationen auf dieselben nichts neues giebt. Wir können dabei von den Invarianten abstrahiren, auf welche überhaupt die Operationen nicht anwendbar sind. Es bleibt also die Wirkung der Operationen auf 4 Formen zu untersuchen.

$$1. f = a_x u_\alpha.$$

Die Anwendung der Operationen der Tafel giebt die Formen:

$$a_x b_x (x \alpha \beta), u_\alpha u_\beta (u a b), a_x b_\alpha u_\beta, a_\beta u_\alpha b_x, a_\beta u_\alpha.$$

*) Bei den Anwendungen werden natürlich die in dieser Columnne erwähnten a, α oft durch b, β , durch c, γ etc. je nach Bedarf zu ersetzen sein.

Die Operationen 5), 6) sind nicht anwendbar. Die ersten beiden der obigen Formeln verschwinden identisch, da sie durch die nichtsbedeutende Vertauschung von a, α mit b, β das Zeichen ändern. Die 3^{te} und 4^{te} Form fällt mit der 4^{ten} der Tafel I., die letzte mit der 3^{ten} von Tafel I. zusammen.

$$2. f_1 = a_x u_\beta b_\alpha.$$

Die Operationen 5), 6) sind wieder nicht anwendbar. Die übrigen geben:

$a_x c_x b_\alpha (\beta \gamma x)$, $u_\beta u_\gamma b_\alpha (a u c)$, $a_x c_\beta b_\alpha u_\gamma$, $a_\gamma u_\beta b_\alpha c_x$, $a_\gamma c_\beta b_\alpha$. Die erste, zweite und letzte dieser Formen sind die 6^{te}, 7^{te} und 5^{te} der Tafel I. Die 4^{te} Form geht in die 3^{te} über, wenn man a, α in b, β ; b, β in c, γ ; c, γ in a, α verwandelt. Die 3^{te} ist daher allein zu untersuchen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke die identische Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha & u_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta & u_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma & u_\gamma \\ a_x & b_x & c_x & u_x \end{vmatrix}.$$

Ordnet man diese Gleichung nach der letzten Verticalreihe, so werden die $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ enthaltenden Glieder einander gleich, weil sie durch Vertauschung der Buchstabenpaare in einander übergehen; man erhält also

$$\begin{aligned} 0 &= u_x \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma \end{vmatrix} - 3 u_\alpha \begin{vmatrix} a_\beta & b_\beta & c_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} \\ &= u_x (i^3 + 2i_2 - 3i_1 i_1) - 3 \{ 2u_\alpha a_\beta b_\gamma c_x + i^2 f - i_1 f - 2i f_1 \}, \end{aligned}$$

wodurch die gesuchte Form auf Formen der Tafel I. zurückgeführt ist.

$$3. \varphi = a_x c_x b_\alpha (\beta \gamma x).$$

Die Operationen 1), 3), 5), 7) sind nicht anwendbar; die übrigen geben, indem man die Operationen auf passend gewählte Factoren von φ anwendet:

2) $a_x c_x b_\alpha (u_\beta d_\gamma - u_\gamma d_\beta) u_\delta = f_1^2 - f \cdot a_x b_\alpha d_\beta u_\delta$, was auf die soeben reducirte Form führt.

4) $a_x c_x d_x b_\alpha (\beta \gamma \delta) = 0$, weil durch Vertauschung von d, δ mit c, γ sich nur das Zeichen ändert.

6) $a_x b_\alpha (c u d) (\beta \gamma \delta)$. Vertauscht man d, δ mit b, β und mit c, γ und addirt die Resultate, so hat man:

$$\begin{aligned} 3 a_x b_\alpha (c u d) (\beta \gamma \delta) &= a_x (\beta \gamma \delta) \{ b_\alpha (c u d) - c_\alpha (b u d) - d_\alpha (c u b) \} \\ &= a_x u_\alpha \cdot (\beta \gamma \delta) (c b d) = f \cdot \begin{vmatrix} c_\beta & c_\gamma & c_\delta \\ b_\beta & b_\gamma & b_\delta \\ d_\beta & d_\gamma & d_\delta \end{vmatrix} = -f \cdot (i^3 + 2i_2 - 3i_1 i_1). \end{aligned}$$

$$4. \psi = u_\beta u_\gamma b_\alpha (acu).$$

Diese Form verhält sich genau wie φ , der sie dualistisch entgegengesetzt ist; man braucht sie also nicht zu untersuchen.

So sieht man also, dass die Operationen der Tafel, auf die Formen I. angewandt, nichts neues geben. Es bleibt nun übrig, die Wirkung der Operationen auf Producte der Formen zu betrachten. Zu diesem Zwecke suchen wir die zu den verschiedenen Formen I. gehörigen Systeme charakteristischer Zahlen, oder die ihnen entsprechenden Operationen auf.

Indem man aber die Producte $f \cdot M, f_1 \cdot M, \varphi \cdot M, \psi \cdot M$ bildet, sieht man, dass in den ersten beiden alle Operationen bis auf 5) und 6) in f und f_1 erschöpft werden können; dass hingegen für die letzten beiden nur die Operation 7) existirt, an welcher beide Factoren der Producte theilnehmen können. Den Functionen f, f_1 sind also die Operationen 5), 6), den Functionen φ, ψ ist die Operation 7) zugeordnet. Es können also nur neue Formen entstehen, indem man 5), 6) auf f^2, ff_1, f_1^2 , und 7) auf $\varphi \cdot \psi$ anwendet. Aber das letztere kann man übergehen. Denn es ist

$$(1) \quad \varphi \cdot \psi = a_x c_x b_\alpha \cdot u_\beta u_\gamma b'_\alpha \cdot (\beta \gamma x) (a' c' u) \\ = a_x c_x b_\alpha \cdot u_\beta u_\gamma b'_\alpha \cdot \begin{vmatrix} a'_\beta & c'_\beta & u_\beta \\ a'_\gamma & c'_\gamma & u_\gamma \\ a'_x & c'_x & u_x \end{vmatrix},$$

ein Ausdruck, dessen Terme in solche Factoren zerfallen, dass sie sich aus f und f_1 durch die wiederholte Anwendung der Operationen 3), 4) erzeugen lassen, und also nach dem Vorigen immer wieder auf f und f_1 zurückführen. Da nun (7) auf Producte und Quadrate von f_1, f angewandt, nichts Neues giebt, so kann es auch auf $\varphi \cdot \psi$ angewandt nichts Neues geben.

Uebergeht man auch noch die Untersuchung solcher Bildungen, welche nur andern zu untersuchenden dualistisch Entgegengesetztes liefern, so sieht man, dass nur übrig bleibt, die Wirkung der Operation 5) auf f^2, ff_1, f_1^2 zu untersuchen. Zu den 3 so entstehenden Formen können wir wählen:

aus $f^2: c_x a_\gamma b_x (x\alpha\beta)$, ist φ ;

aus $ff_1: c_\delta d_x a_\gamma b_x (x\alpha\beta)$, aus dem Vorigen durch Operation 4. (ein x in δ verwandelt) ableitbar, also bei der Betrachtung von φ zurückgeführt;

aus $f_1^2: c_\delta d_x a_\gamma b_\epsilon x (x\alpha\beta)$, aus dem letzten durch Verwandlung eines x in ϵ entstanden, also Resultat der Anwendung einer Operation auf bekannte einfache Formen.

Somit ist nachgewiesen, dass die Formen I. in der That ein vollständiges System bilden.

§. 9.

Formensystem der zusammengesetzten Function

$$F = \kappa u_x + \lambda f + \mu g.$$

Unter den Formen des Systems I. sind 3 Invarianten, zwei Zwischenformen ersten Grades und erster Classe, zu welchen noch die evidente Zwischenform u_x tritt, ferner eine Covariante dritten Grades, und eine zugehörige Form dritter Classe. An Stelle der Zwischenform f_1 und der Invarianten i_1, i_2 kann man auch Verbindungen einführen, welche passend gewählt sind; und zwar ist es für die weitere Behandlung des Formensystems zweckmässig, an Stelle dieser drei Formen folgende zu Grunde zu legen, welche weniger einfache symbolische Ausdrücke, aber wichtige Eigenschaften haben:

$$(1) \quad \begin{cases} i' = \frac{i^2 - i_1}{2} & , & i'' = \frac{i^3 - 3 i i_1 + 2 i_2}{6} , \\ g = f_1 - i f + \frac{i^2 - i_1}{2} u_x . \end{cases}$$

Aus den Formen g, f, u_x kann man nun die Zwischenform

$$(2) \quad F = \kappa u_x + \lambda f + \mu g$$

zusammensetzen und das Formensystem dieser zusammengesetzten Function studiren. Zunächst erhält man die Invariante i dieser Form, indem man für i die Definition

$$(3) \quad i = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_i}$$

anwendet. Aus u_x entsteht durch Anwendung dieser Differentialoperation 3, aus f entsteht i ; aus f_1 dagegen der Ausdruck:

$$\sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_i} = b_\alpha \sum a_i \beta_i = b_\alpha a_\beta = i_1 .$$

Daher wird

$$\sum \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial u_i} = i_1 - i^2 + 3 \frac{i^2 - i_1}{2} = i' .$$

Man hat also, wenn man die Formen der zusammengesetzten Function F immer durch die entsprechenden grossen Buchstaben bezeichnet, die Formel:

$$(4) \quad J = 3 \kappa + i \lambda + i' \mu .$$

Gehen wir nun zur Aufsuchung der Function G (g für die zusammengesetzte Function F) über. Man kann zu diesem Zwecke zunächst bemerken, dass f_1 durch die Gleichung

$$(5) \quad f_1 = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

definiert werden kann, sowie, was durch die symbolischen Ausdrücke augenblicklich klar wird, dass

$$(6) \quad \sum \frac{\partial f_1}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = u_x a_\beta b_\gamma c_x,$$

oder nach §. 8.

$$= i'' u_x - i' f + i f_1.$$

Hieraus folgt für g die Gleichung, welche eine der wichtigsten Eigenschaften dieser Function liefert:

$$(7) \quad \sum \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = i'' u_x.$$

Um nun auch $\sum \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}$ zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass aus der symbolischen Form sofort folgt:

$$\sum \frac{\partial f_1}{\partial u_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \right).$$

Benutzt man also zur Bildung dieses Gliedes den oben gegebenen Werth des Ausdrucks (6), so hat man

$$(8) \quad \sum \frac{\partial f_1}{\partial u_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (i'' u_x - i' f + i f_1) \\ = i'' i u_x + (i'' - i i') f + (i^2 - i') f_1.$$

Nun geht aber, wenn man für f_1 überall $g + i f - i' u_x$ setzt, die linke Seite über in:

$$\sum \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + 2i \sum \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - 2i' g + i^2 f_1 - 2i i' f + i'^2 u_x,$$

und man erhält also, indem man dies der rechten Seite von (8) gleichsetzt und (7) benutzt:

$$(9) \quad \sum \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = -i i'' u_x + i'' f + i' g.$$

Die Function G ist nothwendig von der Form

$$(10) \quad G = K u_x + L f + M g,$$

da jede Form dieser Art sich aus u_x, f, f_1 , also auch aus u_x, f, g zusammensetzen muss. Bildet man nun den Ausdruck $\sum \frac{\partial G}{\partial u_i} \frac{\partial F}{\partial x_i}$, so erhält man links nach (7) $J'' u_x$, und indem man nach rechts die Operation ausführt, findet man:

$$(11) \quad J'' \cdot u_x = K(x u_x + \lambda f + \mu g) + L(x f + \lambda(g + i f - i' u_x) + \mu i'' u_x) \\ + M(x g + \lambda i'' u_x + \mu(-i i'' u_x + i' f + i' g)),$$

und indem man also auf beiden Seiten die Coefficienten von u_x, f, g vergleicht, erhält man die drei Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} J'' = Kx + L(\mu i'' - \lambda i') + M(\lambda - \mu i) i'' \\ 0 = K\lambda + L(x + \lambda i) + M\mu i'' \\ 0 = K\mu + L\lambda + M(x + \mu i'). \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen geben die Verhältnisse von K , L , M ; aber man sieht, dass K , L , M den Unterdeterminanten dieser Gleichungen selbst gleich werden, weil für $\kappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ G in g_x übergehen, also $M = 1$ werden muss. Es ist also:

$$(13) \quad \begin{cases} K = (\kappa + \lambda i)(\kappa + \mu i') - \lambda \mu i'' \\ C = \mu^2 i'' - \lambda(\kappa + \mu i') \\ M = \lambda^2 - \mu(\kappa + \lambda i), \end{cases}$$

und daher

$$(14) \quad G = \begin{vmatrix} \lambda & \kappa + \lambda i & \mu i'' \\ \mu & \lambda & \kappa + \mu i' \\ u_x & f & g \end{vmatrix}.$$

Bildet man nun ferner für die zusammengesetzte Function F den Ausdruck

$$\sum \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial x_i} = \sum \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_i \partial x_i} - i^2 + 3i' = i_1 - i^2 + 3i' = i',$$

so erhält man aus (14):

$$(15) \quad J' = \begin{vmatrix} \lambda & \kappa + \lambda i & \mu i'' \\ \mu & \lambda & \kappa + \mu i' \\ 3 & i & i' \end{vmatrix},$$

und aus der ersten Gleichung (12) folgt:

$$(16) \quad J'' = \begin{vmatrix} \lambda & \kappa + \lambda i & \mu i'' \\ \mu & \lambda & \kappa + \mu i' \\ \kappa & \mu i'' - \lambda i' & i''(\lambda - \mu i) \end{vmatrix},$$

Diese Darstellungen vereinfachen sich noch, wenn man die quadratischen Formen in κ , λ , μ einführt, deren Differentialquotienten die Coefficienten der Gleichungen (12) sind, nämlich:

$$(17) \quad \begin{aligned} 2p &= 2\kappa\lambda + \lambda^2 i + \mu^2 i'' \\ 2q &= 2\kappa\mu + \lambda^2 + \mu^2 i' \\ 2r &= \kappa^2 - \lambda^2 i' + 2\mu\lambda i'' - \mu^2 i i''. \end{aligned}$$

Mit Hülfe derselben werden die Gleichungen (14), (15), (16) folgende:

$$(18) \quad \begin{aligned} G &= \sum \pm \frac{\partial p}{\partial \kappa} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial F}{\partial \mu} \\ J' &= \sum \pm \frac{\partial p}{\partial \kappa} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial J}{\partial \mu} \\ J'' &= \sum \pm \frac{\partial p}{\partial \kappa} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial r}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist noch in mannichfacher Weise umgestaltbar, da zwischen den quadratischen Functionen p , q , r , J' und dem Quadrate der linearen Function J die Relation besteht:

$$(19) \quad 6r + 2ip + 2i'q + 2J' - J^2 = 0.$$

Um die Formen φ und ψ für die zusammengesetzte Function F zu bilden, genügt es, dieselben in der Gestalt zu nehmen, welche aus der symbolischen Form sofort hervorgeht:

$$(20) \quad \begin{aligned} \varphi &= \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_x}{\partial u_3} \\ \psi &= \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial u_x}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

In diesen Formeln kann man ohne Weiteres f_1 auch durch g ersetzen. Wenn man aber diese Formeln für F bildet, also an Stelle der Functionaldeterminanten von g, f, u_x diejenigen von G, F, u_x setzt, so zerfallen die neuen Formen Φ, Ψ sogleich in die Producte von φ, ψ mit der Functionaldeterminante von G, F, u_x gegen g, f, u_x , und es ist also

$$(21) \quad \begin{aligned} \Phi &= \Delta \cdot \varphi \\ \Psi &= \Delta \cdot \psi, \end{aligned}$$

wo Δ jene Functionaldeterminante bedeutet:

$$(22) \quad \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} M & L & K \\ \mu & \lambda & \kappa \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = M\lambda - L\mu \\ &= \lambda^3 - i\lambda^2\mu + i'\lambda\mu^2 - i''\mu^3. \end{aligned}$$

Man sieht, dass der Werth von κ auf Φ, Ψ gar keinen Einfluss hat.

§. 10.

Die Formen φ, ψ .

Zwischen den 8 Grundformen $i, i', i'', u_x, f, g, \varphi, \psi$ besteht eine einzige höhere Relation. Dieselbe entsteht, wie in §. 8. bereits angedeutet, durch Bildung des Products $\varphi \cdot \psi$. Man kann die Formel (1) jenes §. durch geschickte Vertheilung der vor der Determinante stehenden Factoren in folgende Form bringen:

$$\varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} a'_\beta b_\alpha a_x b'_\alpha u_\beta & c'_\beta b_\alpha a_x u_\gamma & u_\beta b_\alpha a_x \\ a'_\gamma c_x b'_\alpha u_\beta & c'_\gamma c_x u_\gamma & u_\gamma c_x \\ a'_x b'_\alpha u_\beta & c'_x u_\gamma & u_x \end{vmatrix},$$

oder, wenn man durch f, f_1, f_2, f_3 die Formenreihe

$$\begin{aligned} f &= a_x u_\alpha \\ f_1 &= a_x b_\alpha u_\beta = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \\ f_2 &= a_x b_\alpha c_\beta u_\gamma = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \\ f_3 &= a_x b_\alpha c_\beta d_\gamma u_\delta = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \end{aligned}$$

bezeichnet, in die Gestalt:

$$\varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} f_3 & f_2 & f_1 \\ f_2 & f_1 & f \\ f_1 & f & u_x \end{vmatrix}.$$

Nun ist nach den Formeln (1), (2) des vorigen §. und durch Anwendung der die f_i definirenden Differentialoperation:

$$\begin{aligned} f_1 - if + i'u_x &= g \\ f_2 - if_1 + i'f &= i''u_x \\ f_3 - if_2 + i'f_1 &= i''f. \end{aligned}$$

Wenn man also in dem Ausdrucke von $\varphi \cdot \psi$ die zweite Reihe mit $-i$, die dritte mit i' multiplicirt zu der ersten addirt, so hat man:

$$\varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} i''f & i''u_x & g \\ f_2 & f_1 & f \\ f_1 & f & u_x \end{vmatrix},$$

und wenn man jetzt mit den Vertikalreihen verfährt, wie vorher mit den horizontalen:

$$(23) \quad \varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} i''f - i''u_x + i'g & i''u_x & g \\ i''u_x & if - i'u_x + g & f \\ g & f & u_x \end{vmatrix}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nichts anderes, als die Determinante, in Bezug auf x, λ, μ gebildet, der quadratischen Form

$$(24) \quad F_1 = 2(pf + qg + ru_x) = \sum \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Aus dem Producte $\varphi \cdot \psi$ werden wir jetzt die folgenden drei für die Theorie der Formen φ, ψ wesentlichen Functionen entwickeln:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{\partial \psi}{\partial u_h} = \sum \frac{\partial^2 \varphi \cdot \psi}{\partial x_h \partial u_h} \\ \Omega' &= \sum \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_{h'}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_h \partial u_{h'}} = \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_h \partial u_{h'}} \\ \Omega'' &= \sum \sum \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_{h'} \partial x_{h''}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_h \partial u_{h'} \partial u_{h''}} = \sum \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x_h \partial u_{h'}}. \end{aligned}$$

Die Bildung der Functionen Ω geschieht auf die jedesmal zuletzt angegebene Weise. Um den Process

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial u_h}$$

auf das Product $\varphi \cdot \psi$ anzuwenden, nehmen wir letzteres in der oben zuerst angegebenen Form:

$$\varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} f_3 & f_2 & f_1 \\ f_2 & f_1 & f \\ f_1 & f & u_x \end{vmatrix}.$$

Indem wir auf diesen Ausdruck jenen Process anwenden, erhalten wir zwei Arten von Gliedern; die einen entstehen durch Anwendung des Processes auf ein einzelnes f_h ; und wenn man dabei u_x als f_{-1} betrachtet, und zugleich

$$i_k = \sum_h \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_h \partial u_h}$$

setzt, so wird das Aggregat dieser Theile:

$$\sum \frac{\partial \cdot \varphi \cdot \psi}{\partial f_h} i_h.$$

Die andern Glieder entstehen, indem man den Process auf Producte $f_i f_k$ so anwendet, dass man den Ausdruck

$$\sum_h \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \frac{\partial f_k}{\partial u_h} = \sum_h \frac{\partial f_i}{\partial u_h} \frac{\partial f_k}{\partial x_h}$$

bildet, welcher nach der Entstehungsweise der f_i den Werth f_{i+k+1} hat. Aber jedem Product $f_i f_k$ in der Determinante $\varphi \cdot \psi$ entspricht ein anderes Product, welches mit jenem in derselben Unterdeterminante vorkommt, aber mit entgegengesetzten Zeichen; bei einem solchen Gliede ist die Summe der Indices dieselbe wie bei $f_i f_k$, und das Resultat der Operation ist also das nämliche, nur mit entgegengesetzten Zeichen. Je zwei solcher Terme heben also einander auf, und es bleibt übrig

$$(25) \quad \Omega = \sum \frac{\partial \cdot \varphi \cdot \psi}{\partial f_h} i_h.$$

Denkt man sich nun die f_h sämmtlich durch u_x, f, g ausgedrückt, so hat man etwa

$$f_h = \alpha_h u_x + \beta_h f + \gamma_h g,$$

und also auch, durch Anwendung des Processes $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial u_h}$:

$$i_h = 3 \alpha_h + i \beta_h + i' \gamma_h,$$

also

$$(26) \quad \begin{aligned} \Omega &= \sum \frac{\partial \cdot \varphi \cdot \psi}{\partial f_h} (3 \alpha_h + i \beta_h + i' \gamma_h) \\ &= 3 \frac{\partial \cdot \varphi \cdot \psi}{\partial u_x} + i \frac{\partial \cdot \varphi \cdot \psi}{\partial f} + i' \frac{\partial \cdot \varphi \cdot \psi}{\partial g}. \end{aligned}$$

Um nun Ω' zu bilden, wendet man den Process auf (25) an. Die Coefficienten der i_h sind wieder Unterdeterminanten, welche nach dem oben Auseinandergesetzten nichts geben, als diejenigen Terme, welche durch Anwendung des Processes auf einzelne f_h entstehen. Mithin hat man

$$(27) \quad \Omega' = \sum \frac{\partial \cdot \varphi \cdot \psi}{\partial f_h \partial f_h'} i_h i_h'$$

oder nach der Analogie von (26):

$$(28) \quad \Omega' = 9 \frac{\partial^2 \cdot \varphi \psi}{\partial u_x^2} + 6i \frac{\partial^2 \cdot \varphi \psi}{\partial u_x \partial f} + 6i' \frac{\partial^2 \cdot \varphi \psi}{\partial u_x \partial g} + i^2 \frac{\partial^2 \cdot \varphi \psi}{\partial f^2} + \dots$$

Endlich findet man aus dieser Formel sofort:

$$(29) \quad \Omega'' = 27 \frac{\partial^3 \cdot \varphi \psi}{\partial u_x^3} + 27i \frac{\partial^3 \cdot \varphi \psi}{\partial u_x^2 \partial f} + 27g \frac{\partial^3 \cdot \varphi \psi}{\partial u_x^2 \partial g} + \dots + i'^3 \frac{\partial^3 \cdot \varphi \psi}{\partial g^3}.$$

Ist daher ε eine beliebige Grösse, und setzt man in dem Ausdrucke (23) von $\varphi \cdot \psi$ für

$$u_x, f, g$$

die Ausdrücke

$$u_x + 3\varepsilon, \quad f + i\varepsilon, \quad g + i'\varepsilon,$$

so erhält man durch Entwicklung nach Potenzen von ε einen Ausdruck, dessen Coefficienten die Functionen Ω sind:

$$\varphi \cdot \psi + \frac{\varepsilon}{1} \Omega + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \Omega' + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Omega''.$$

Dieser ganze Ausdruck ist also die Hesse'sche Determinante, nach κ, λ, μ genommen, der quadratischen Form

$$(30) \quad 2 \{ p(f + i\varepsilon) + q(g + i'\varepsilon) + r(u_x + 3\varepsilon) \},$$

und die Ω sind die Entwicklungscoefficienten der Determinante.

Da $\varphi \cdot \psi$ die Eigenschaft hat, sich nur um $\mathcal{A}^2$ zu ändern, wenn man an Stelle von f die zusammengesetzte Function $\kappa u_x + \lambda f + \mu g$ zu Grunde legt, so kommt dieselbe auch denjenigen Formen zu, welche durch Anwendung der Operation $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial u_h}$ aus derselben abgeleitet sind, also die Formen $\Omega, \Omega', \Omega''$. Von diesen ist die erste für die u wie für die x vom 2^{ten}, die zweite vom 1^{ten}, die letzte vom 0^{ten} Grade. Die letzte entsteht bis auf den Factor 6, wenn man in (23) u_x, f, g durch 3, i, i' ersetzt, und hat also den Werth:

$$(31) \quad \Omega'' = 6 \begin{vmatrix} i'^2 - 2ii'' & 3i'' & i' \\ 3i'' & i^2 - 2i' & i \\ i' & i & 3 \end{vmatrix} \\ = -6 \{ 27i'' - i^2i'^2 + 4i^3i'' + 4i'^3 - 18ii'i'' \} \\ = -6R,$$

wo R die Determinante der cubischen Gleichung $\mathcal{A} = 0$ ist. Dagegen erhält man $\frac{1}{2} \Omega'$, wenn man die Unterdeterminanten der rechts bei Ω'' stehenden Determinante mit den Elementen der Determinante $\varphi \cdot \psi$ multiplicirt. Man findet dann, dass die Coefficienten von f und g verschwinden, und dass Ω' sich auf den Ausdruck reducirt:

$$(32) \quad \Omega' = -2R \cdot u_x.$$

Dagegen bleibt Ω eine selbständige Form.

§. 11.

Das Formensystem der cubischen Formen φ , ψ .

Untersuchen wir nun die Formensysteme, welche entstehen, indem man die cubischen Formen

$$\varphi = \varphi_x^3 = \varphi'_x{}^3 \dots, \quad \psi = u_\psi^3 = u_{\psi'}^3 \dots$$

zu Grunde legt. Bemerken wir, dass eine dieser Formen in die andere übergeht, wenn man die x mit den u , und zugleich in den symbolischen Coefficienten von f , aus denen φ und ψ sich zusammensetzen, a mit α , b mit β etc. vertauscht. Hierdurch geht f in sich selbst über, und ebenso bleiben g , i , i' , i'' völlig ungeändert. Die beiden in der Theorie von φ und ψ zuerst auftretenden Formen

$$\Theta_\varphi = \varphi_x \varphi'_x (\varphi \varphi' u)^2$$

$$\Theta_\psi = u_\psi u_{\psi'} (\psi \psi' x)^2$$

stehen daher auch in der Beziehung zu einander, dass durch Vertauschung von u mit x , a mit α etc. eine Form in die andere übergeht. Aber zugleich sind beide Zwischenformen von f , und da sie nur vom zweiten Grade in den u und den x sind, so müssen sie als ganze Functionen von u_x, f, g, i, i', i'' darstellbar sein. Da indess letztere Grössen sich durch die angegebene Vertauschung nicht ändern, so folgt:

$$(33) \quad \Theta_\varphi = \Theta_\psi.$$

Die cubischen Formen, welche durch die Hesse'sche Determinante von φ und ψ gegeben sind, können sich, da f keine andern cubischen Formen als φ und ψ zulässt, von diesen selbst nur durch constante Factoren unterscheiden, welche also durch i, i', i'' darstellbar sind, mithin durch die Vertauschung nicht geändert werden. Diese Factoren sind also einander gleich, und wenn man durch m ihren gemeinsamen Werth bezeichnet, hat man

$$(34) \quad \Delta_\varphi = m \cdot \varphi, \quad \Delta_\psi = m \cdot \psi.$$

In gleicher Weise hat man für die ersten cubischen Zwischenformen

$$(35) \quad S_\varphi = m' \cdot \psi, \quad S_\psi = m' \cdot \varphi.$$

Aus den Gleichungen (34), (35) folgt, dass $\varphi = 0$ ein System von drei Geraden, also ein Dreieck darstellt, und dass $\psi = 0$ das Product der Gleichungen der Dreiecksecken ist.

Wendet man den Process Δ auf beide Seiten der Gleichung (34) nochmals an, so erhält man $m^2 \varphi$ und $m^2 \psi$. Aber nach der Theorie der cubischen Formen setzt sich die Determinante von Δ_φ aus Δ_φ und φ , sowie aus den Invarianten S'_φ, T'_φ zusammen. Im vorliegenden Falle verschwindet die Discriminante von φ , und es giebt also eine Grösse m'' so, dass

$$\begin{aligned} S'_\varphi &= S'_\psi = m''^2 \\ T'_\varphi &= T'_\psi = m''^3. \end{aligned}$$

Die Determinante von $\mathcal{A}_\varphi$ reducirt sich daher bis auf einen numerischen Factor auf $m''^4 \cdot \varphi$, und die Vergleichung mit dem Vorigen lehrt also, dass m'' von m nur um einen numerischen Factor verschieden ist. Die erste Invariante von φ und ψ ist also, bis auf einen numerischen Factor, das Quadrat, die zweite ebenso der Cubus der Invariantencombination m .

Aber ebenso folgt aus der Theorie der cubischen Formen, dass, wenn man den Process S zweimal hinter einander anwendet, eine Combination der zugehörigen Formen S und T , multiplicirt mit Potenzen von S' und T' , auftritt. Die zugehörige Form T ist nun bis auf einen numerischen Factor nur um m von S verschieden, daher geht das Resultat hier bis auf einen solchen Factor in $m^4 \cdot \varphi$ über. Aber die Gleichungen (35) geben

$$S S_\varphi = m'^3 \cdot S_\psi = m'^4 \cdot \varphi.$$

Daher ist auch m' von m nur um einen numerischen Factor verschieden.

Die Invariantencombination m ist, abgesehen von einem numerischen Factor, leicht zu finden. Aus (35) folgt

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial^3 S_\varphi}{\partial u_h \partial u_h \partial u_{h''}} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_h \partial x_h \partial x_{h''}} &= m' \sum \frac{\partial^3 \psi}{\partial u_h \partial u_h \partial u_{h''}} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_h \partial x_h \partial x_{h''}} \\ &= m' \Omega''. \end{aligned}$$

Aber links steht ein Ausdruck, welcher bis auf einen numerischen Factor gleich S' , also gleich m^2 ist. Mithin unterscheidet sich m nur um einen numerischen Factor von Ω'' oder von der Discriminante R der cubischen Gleichung. Und es gehen also bis auf numerische Factoren die Formen

$\mathcal{A}_\varphi$ über in $R\varphi$	$\mathcal{A}_\psi$ in $R\psi$
S_φ „ „ $R\psi$	S_ψ „ $R\varphi$
T_φ „ „ $R^2\psi$	T_ψ „ $R^2\varphi$
S'_φ „ „ R^2	S'_ψ „ R^2
T'_φ „ „ R^3	T'_ψ „ R^3 .

Was endlich $\Theta_\varphi = \Theta_\psi$ betrifft, so unterscheidet sich die Form $H_\varphi = H_\psi$ von demselben nur durch den Factor m , und es genügt also, diese Form zu bilden. Nun aber weiss man aus der Theorie der cubischen Formen, dass der Ausdruck

$$\sum \frac{\partial^2 \cdot \varphi S_\varphi}{\partial x_i \partial u_i}$$

sich aus H_φ und aus einem Gliede mit $u_x \cdot S'_\varphi$ zusammensetzt. Daher besteht umgekehrt H aus jenem Gliede, oder aus $m \cdot \Omega$ und aus einem Gliede $m^2 u_x$. Dividirt man also durch m , so findet man

$$\Theta_\varphi = \Theta_\psi = \alpha \Omega + \beta R u_x,$$

wo α und β numerische Coefficienten sind. Da

$$\sum \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_i \partial x_i} = 0,$$

so folgt nach (32)

$$3 \beta = 2 \alpha.$$

§. 12.

Canonische Form im allgemeinen Falle ($m = 1$, $n = 1$). Collineare Systeme.

Die Gleichung $f = 0$ stellt, wenn man die u darin als Variable ansieht, einen Punkt y dar, dessen Coordinaten mit denen eines Punktes x durch die Gleichungen verbunden sind:

$$(1) \quad \varrho y_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \varrho y_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad \varrho y_3 = \frac{\partial f}{\partial u_3}.$$

Wenn also, wie wir annehmen wollen, die Determinante von f nicht verschwindet, so entspricht jedem x ein y und umgekehrt, und da die Gleichungen (1) linear sind, so hat man zwei in einander liegende collineare Systeme vor sich.

Die Determinante von f ist in symbolischer Form:

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & a_1 \alpha_2 & a_1 \alpha_3 \\ b_2 \beta_1 & b_2 \beta_2 & b_2 \beta_3 \\ c_3 \gamma_1 & c_3 \gamma_2 & c_3 \gamma_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 (\alpha \beta \gamma),$$

oder, wenn man die Paare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in jeder Weise permutirt und den 6^{ten} Theil der Summe aller Permutationen nimmt:

$$\frac{1}{6} (abc) (\alpha \beta \gamma) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix} = \frac{i^3 + 2i_2 - 3i_1}{6} = i''.$$

Nehmen wir also an, dass i'' nicht verschwinde. Man kann dann im Allgemeinen die Function f durch lineare Transformation in die Form bringen:

$$(2) \quad f = l_1 X_1 U_1 + l_2 X_2 U_2 + l_3 X_3 U_3,$$

während u_x in U_x übergeht.

In der That, geht man von dieser Bildung aus, und bezeichnet durch ε die Determinante der Transformation

$$\begin{aligned} \sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \frac{\partial X_3}{\partial x_3} &= \sum \pm \frac{\partial u_1}{\partial U_1} \frac{\partial u_2}{\partial U_2} \frac{\partial u_3}{\partial U_3} \\ &= \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \frac{\partial x_3}{\partial X_3}} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial U_1}{\partial u_1} \frac{\partial U_2}{\partial u_2} \frac{\partial U_3}{\partial u_3}}, \end{aligned}$$

durch A die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 & 1 \\ l_2^2 & l_2 & 1 \\ l_3^2 & l_3 & 1 \end{vmatrix},$$

so hat man für die Grundformen die Ausdrücke

$$(3) \quad \begin{cases} i = l_1 + l_2 + l_3 \\ f_1 = l_1^2 X_1 U_1 + l_2^2 X_2 U_2 + l_3^2 X_3 U_3 \\ i_1 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \\ i_2 = l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 \\ \varphi = \varepsilon A \cdot X_1 X_2 X_3 \\ \psi = \frac{A}{\varepsilon} U_1 U_2 U_3. \end{cases}$$

Daher werden ferner die in §. 9. eingeführten Formen:

$$(4) \quad \begin{cases} i' = l_1 l_2 + l_2 l_3 + l_3 l_1 \\ i'' = l_1 l_2 l_3 \\ g = l_2 l_3 U_1 X_1 + l_3 l_1 U_2 X_2 + l_1 l_2 U_3 X_3. \end{cases}$$

Es sind also l_1, l_2, l_3 die Wurzeln der Gleichung

$$(5) \quad A(l) = 0;$$

und sind dieselben, wie wir zunächst annehmen wollen, sämtlich verschieden, so findet man die Producte $U_i X_i$ ausgedrückt durch die Wurzeln l_i und durch u_x, f, g , indem man die Gleichungen

$$(6) \quad \begin{aligned} u_x &= U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 \\ f &= l_1 U_1 X_1 + l_2 U_2 X_2 + l_3 U_3 X_3 \\ g &= l_2 l_3 U_1 X_1 + l_3 l_1 U_2 X_2 + l_1 l_2 U_3 X_3 \end{aligned}$$

auflöst:

$$(7) \quad \begin{aligned} A U_1 X_1 &= (l_3 - l_2) \{u_x l_1 (l_3 + l_2) - f l_1 - g\} \\ A U_2 X_2 &= (l_1 - l_3) \{u_x l_2 (l_1 + l_3) - f l_2 - g\} \\ A U_3 X_3 &= (l_2 - l_1) \{u_x l_3 (l_2 + l_3) - f l_3 - g\} \end{aligned}$$

oder auch:

$$(8) \quad U_h X_h = \frac{u_x l_h (i - l_h) - f l_h - g}{\left(\frac{\partial A}{\partial l}\right)_h}.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Substitutionscoefficienten, soweit das überhaupt hier möglich oder nöthig ist; soweit nämlich, dass nur noch alle Coefficienten desselben X_h mit einem beliebigen gemeinsamen Factor behaftet werden können, welcher dann bei den Coefficienten der entsprechenden U_h reciprok auftritt.

Die Gleichung $\varphi = 0$ stellt das Product der Seiten des neuen Fundamentaldreiecks, die Gleichung $\psi = 0$ das Product seiner Ecken dar. In diesem neuen Dreieck verwandelt sich, indem man die neue Form von F zu Grunde legt, die Gleichung (1) in

$$(9) \quad \varrho Y_1 = l_1 X_1, \quad \varrho Y_2 = l_2 X_2, \quad \varrho Y_3 = l_3 X_3.$$

Die Ecken des Fundamentaldreiecks entsprechen sich selbst. Die Gleichung (9) erhält man auch direct, indem solche lineare Verbindungen X der x , resp. Y_x der y gesucht werden, für welche die Gleichungen (1) in die Form

$$(9^a) \quad \varrho Y = l X$$

übergehen. Ist dann

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

und

$$f = \sum a_{ik} x_i u_k,$$

so hat man identisch aus (1)

$$l \sum \alpha_k x_k = \sum a_{ik} x_i \alpha_k,$$

also

$$\begin{aligned} l \alpha_1 &= a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + a_{13} \alpha_3 \\ l \alpha_2 &= a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + a_{23} \alpha_3 \\ l \alpha_3 &= a_{31} \alpha_1 + a_{32} \alpha_2 + a_{33} \alpha_3; \end{aligned}$$

daher

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - l & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - l & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - l \end{vmatrix} = 0 = \Delta(l).$$

Und die Gleichung (9^a) ergibt also die verschiedenen Gleichungen (9), so lange alle Wurzeln von $\Delta(l) = 0$ verschieden sind.

Die zusammengesetzte Function

$$F = \kappa u_x + \lambda f + \mu g$$

wird hier:

$$(10) \quad F = (\kappa + \lambda l_1 + \mu l_2 l_3) U_1 X_1 + (\kappa + \lambda l_2 + \mu l_3 l_1) U_2 X_2 + (\kappa + \lambda l_3 + \mu l_1 l_2) U_3 X_3.$$

In dieser Gleichung kann man durch passende Bestimmung von κ , λ , μ den Coefficienten jedes beliebige Werthsystem m_1 , m_2 , m_3 geben, so dass

$$(11) \quad \begin{aligned} m_1 &= \kappa + \lambda l_1 + \mu l_2 l_3 \\ m_2 &= \kappa + \lambda l_2 + \mu l_3 l_1 \\ m_3 &= \kappa + \lambda l_3 + \mu l_1 l_2; \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist, man kann es so einrichten, dass einem beliebigen Punkte X ein beliebig zugeordneter Y entspricht, indem

$$(12) \quad \begin{aligned} \varrho Y_1 &= (\kappa + \lambda l_1 + \mu l_2 l_3) X_1 \\ \varrho Y_2 &= (\kappa + \lambda l_2 + \mu l_3 l_1) X_2 \\ \varrho Y_3 &= (\kappa + \lambda l_3 + \mu l_1 l_2) X_3 \end{aligned}$$

oder

$$(13) \quad m_1 : m_2 : m_3 = \frac{Y_1}{X_1} : \frac{Y_2}{X_2} : \frac{Y_3}{X_3}$$

gesetzt wird.

Die Gleichung $F=0$ stellt also die Gesamtheit aller collinearen Systeme mit gemeinsamem Fundamentaldreieck dar. Dass aus denselben, wenn man F statt f zu Grunde legt, keine neuen Systeme entspringen, entspricht dem oben gegebenen Satze, dass die bilinearen Zwischenformen von F wieder aus u_x, f, g sich zusammensetzen.

§. 13.

Eine gewisse Reihe collinearer Systeme und ihre Eigenschaften. Punktreihen, welche aus ihnen entspringen, und Invariantenrelationen, welche besondere Eigenschaften der Punktreihen angeben.

Unter den so gebildeten collinearen Systemen giebt es eine Reihe, welche zu der Form f in besonderer Beziehung stehen. Mittelst der Gleichung $f=0$ erhält man aus x den entsprechenden Punkt y ; sieht man diesen wieder als Punkt des ersten Systems an, so entspricht ihm ein Punkt z des zweiten; betrachtet man z als Punkt des ersten Systems, so findet man einen entsprechenden Punkt t im zweiten u. s. w. Die Gleichungen dieser Punkte erhält man, wenn man jeden aus dem Vorhergehenden entstehen lässt, wie y aus x , d. h., in dem neuen Coordinatensystem, indem man die Coordinaten des vorhergehenden Punktes beziehungsweise mit l_1, l_2, l_3 multiplicirt. Die Coordinaten werden also in dem System des Fundamentaldreiecks:

$$\begin{array}{ccccccc} \overbrace{x} & \overbrace{y} & \overbrace{z} & \overbrace{t} & & & \\ X_1 & l_1 X_1 & l_1^2 X_1 & l_1^3 X_1 & \dots & & \\ X_2 & l_2 X_2 & l_2^2 X_2 & l_2^3 X_2 & \dots & & \\ X_3 & l_3 X_3 & l_3^2 X_3 & l_3^3 X_3 & \dots & & \end{array}$$

oder die Gleichungen dieser Punkte sind:

$$\begin{array}{l} x) u_x = 0 \\ y) f = 0 \\ z) f_1 = 0 \\ t) f_2 = 0 \\ \dots \dots \dots ; \end{array}$$

denn es ist

$$f_{i+1} = \sum_h \frac{\partial f_i}{\partial X_h} \frac{\partial f}{\partial U_h} = \sum_h l_h^i U_h X_h.$$

Man kann diese Punktreihe auch rückwärts fortsetzen, indem man zunächst denjenigen Punkt aufsucht, welcher, als Punkt des ersten Systems betrachtet, im zweiten Systeme x liefert. Die Gleichung dieses Punkts ist

$$0 = \sum \frac{U_h X_h}{l_h} = \frac{g}{i},$$

und indem man diese Reihe fortsetzt, erhält man Punkte, deren Gleichungen durch $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ u. s. w. bezeichnet werden mögen. Indem wir den Punkt x selbst durch die Zahl 0 bezeichnen, können wir die Punkte der ersten Reihe durch 1, 2, ..., die der zweiten durch -1 , -2 , ... bezeichnen; es entsprechen dann den Punkten die folgenden darunter stehenden Gleichungen:

$$(14) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & (-2) & (-1) & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & g_1 = 0 & g = 0 & u_x = 0 & f = 0 & f_1 = 0 & \dots \end{array};$$

so dass der Punkt k die Gleichung hat:

$$(15) \quad 0 = \sum_h l_h^k U_h X_h.$$

Jede solche Gleichung aber ist zugleich die Gleichung eines collinearen Systems, welches unmittelbar von dem Punkte 0 auf den Punkt k führt. So entspricht also der Punktreihe (14) die Reihe (15) von collinearen Systemen.

Die Punkte der Reihe liegen auf einer transcendenten Curve, welche man aus den Gleichungen

$$\varphi Y_1 = l_1^k X_1$$

$$\varphi Y_2 = l_2^k X_2$$

$$\varphi Y_3 = l_3^k X_3$$

durch Elimination von φ und k erhält:

$$\log \frac{Y_1}{X_1} \log \frac{l_2}{l_3} + \log \frac{Y_2}{X_2} \log \frac{l_3}{l_1} + \log \frac{Y_3}{X_3} \log \frac{l_1}{l_2} = 0,$$

und welche in unendlich vielen Fällen in eine algebraische übergeht; so oft nämlich die Grössen $\log \frac{l_i}{l_k}$ sich wie positive oder negative ganze Zahlen verhalten.

Aber man kann sich die Frage stellen, unter welchen Umständen gewisse Punkte der Reihe auf einer algebraischen Curve gegebenen Charakters liegen?

Nehmen wir an, der h^{te} , k^{te} , m^{te} u. s. w. Punkt der Reihe sollen auf einer Curve n^{ter} Ordnung liegen, und zwar seien soviel Punkte der Reihe gegeben, dass eine Curve n^{ter} Ordnung durch einen Punkt weniger gerade bestimmt ist, dass also zwischen den Coordinaten der Punkte eine einzige Bedingung besteht. Diese Bedingung kann man bekanntlich so schreiben, dass ihre linke Seite als Aggregat von Producten aus dreireihigen Determinanten erscheint, in deren jeder Reihe die Coordinaten eines der gegebenen Punkte auftreten. Jede solche Determinante hat also die Form

$$X_1 X_2 X_3 \begin{vmatrix} l_1^h & l_1^k & l_1^m \\ l_2^h & l_2^k & l_2^m \\ l_3^h & l_3^k & l_3^m \end{vmatrix}$$

und die gesuchte Gleichung ist ein Aggregat von Producten solcher Ausdrücke. Die ganze Gleichung aber können wir durch Potenzen der X dividiren, und brauchen also nur von den Determinanten zu sprechen. Indessen ist, wenn $h < k$ und auch $h < m$, immer

$$\begin{vmatrix} l_1^h & l_1^k & l_1^m \\ l_2^h & l_2^k & l_2^m \\ l_3^h & l_3^k & l_3^m \end{vmatrix} = l_1^h l_2^h l_3^h \begin{vmatrix} 1 & l_1^{k-h} & l_2^{k-h} \\ 1 & l_2^{k-h} & l_2^{k-h} \\ 1 & l_3^{k-h} & l_3^{k-h} \end{vmatrix}.$$

Der erste Factor ist $(i'')^h$: Man sieht also, dass die linke Seite der gesuchten Gleichung sich aus Potenzen von i'' und aus Determinanten der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & l_1^k & l_1^m \\ 1 & l_2^k & l_2^m \\ 1 & l_3^k & l_3^m \end{vmatrix}$$

zusammensetzt. Diese letztern sind nun zu bilden, oder vielmehr, da jede dieser Determinanten durch

$$\begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix}$$

theilbar ist, und man also durch letztere die ganze gesuchte Gleichung so oft dividiren kann, als Determinantenfactoren in jedem Gliede vorhanden sind, hat man nur die Ausdrücke

$$A_{km} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & l_1^k & l_1^m \\ 1 & l_2^k & l_2^m \\ 1 & l_3^k & l_3^m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix}}$$

zu bilden. Man findet aber A_{km} als Coefficient von $\frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{y^m}$ in der nach absteigenden Potenzen von x und y auszuführenden Entwicklung des Quotienten

$$F(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x-l_1} & \frac{1}{y-l_1} \\ 1 & \frac{1}{x-l_2} & \frac{1}{y-l_2} \\ 1 & \frac{1}{x-l_3} & \frac{1}{y-l_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix}} = \Sigma \Sigma \frac{A_{km}}{x^{k+1} y^{m+1}}.$$

Der Zähler dieses Quotienten wird gleich

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Delta(x) \Delta(y)} \cdot \begin{vmatrix} xy - l_1(x+y) + l_1^2 & y - l_1 & x - l_1 \\ xy - l_2(x+y) + l_2^2 & y - l_2 & x - l_2 \\ xy - l_3(x+y) + l_3^2 & y - l_3 & x - l_3 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\Delta(x) \Delta(y)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} xy & -(x+y) & 1 \\ y & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{x-y}{\Delta(x) \Delta(y)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

und man findet also die Δ als Coefficienten des Ausdrucks:

$$(16) \quad F(x, y) = \Sigma \Sigma \frac{A_{km}}{x^{k+1} y^{m+1}} = \frac{x-y}{\Delta(x) \Delta(y)}.$$

Setzt man also:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta(x)} &= \frac{B_0}{x^3} + \frac{B_1}{x^4} + \frac{B_2}{x^5} \dots \quad (B_0 = 1) \\
 \frac{1}{\Delta(y)} &= \frac{B_0}{y^3} + \frac{B_1}{y^4} + \frac{B_2}{y^5} \dots,
 \end{aligned}$$

so ist

$$F(x, y) = (x-y) \Sigma \Sigma \frac{B_h B_k}{x^{h+3} y^{k+3}} = \Sigma \Sigma B_h B_k \left(\frac{1}{x^{h+2} y^{k+3}} - \frac{1}{x^{h+3} y^{k+2}} \right)$$

oder wenn man im ersten Theile der Doppelsumme $h-1$ und $k-2$, im zweiten $h-2$ und $k-1$ statt h und k setzt:

$$F(x, y) = \Sigma \Sigma \frac{B_{h-1} B_{k-2} - B_{k-1} B_{h-2}}{x^{h+1} y^{k+1}},$$

also

$$(17) \quad A_{hk} = B_{h-1} B_{k-2} - B_{k-1} B_{h-2}.$$

Die B endlich bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 1 \\
 B_1 - i B_0 &= 0 \\
 B_2 - i B_1 + i' B_0 &= 0 \\
 B_3 - i B_2 + i' B_1 - i'' B_0 &= 0 \\
 B_4 - i B_3 + i' B_2 - i'' B_1 &= 0 \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Wir können diese Gleichungen in die eine zusammenfassen:

$$B_k - i B_{k-1} + i' B_{k-2} - i'' B_{k-3} = 0,$$

wenn wir nur, wie dies auch in (17) geschehen muss, alle B mit negativem Index auslassen. Es folgt aber daraus:

$$\begin{aligned}
 &B_{h-1} \{ B_{k-2} - i B_{k-3} + i' B_{k-4} - i'' B_{k-5} \} \\
 &- B_{h-2} \{ B_{k-1} - i B_{k-2} + i' B_{k-3} - i'' B_{k-4} \} = 0,
 \end{aligned}$$

oder, nach (17):

$$A_{h,k} - i A_{h,k-1} + i' A_{h,k-2} - i'' A_{h,k-3} = 0.$$

Nehmen wir noch hinzu, dass

$$A_{k,h} = -A_{h,k},$$

so können wir aus dieser Recursionsformel die A leicht berechnen; und zwar erhält man:

$$A_{12} = 1$$

$$A_{13} = i \quad A_{23} = i'$$

$$A_{14} = i^2 - i' \quad A_{24} = ii' - i'' \quad A_{34} = i'^2 - ii''$$

$$\dots \dots \dots$$

Indem man auf die hier angegebene Weise verfährt, erhält man immer als Bedingung dafür, dass gewisse Punkte der Reihe auf einer gewissen algebraischen Curve liegen, eine gewisse Invariantenbeziehung, und damit also zugleich solche Invariantenrelationen geometrisch interpretirt, indem dieselben aussagen, dass die collinearen Systeme auf Punktreihen führen, bei welchen gewisse Punkte auf einer algebraischen Curve gegebener Art sich befinden.

Aber wenn der h^{te} , k^{te} , m^{te} ... Punkt auf einer solchen Curve liegen, wobei der 0^{te} Punkt x als Ausgangspunkt betrachtet ist, so braucht man nur den $\pm r^{\text{ten}}$ Punkt zum Ausgange zu nehmen, um zu sehen, dass dann auch der

$$(h \pm r)^{\text{te}}, (k \pm r)^{\text{te}}, (m \pm r)^{\text{te}} \text{ u. s. w.}$$

Punkt auf einer Curve derselben Art liegen. Man kann daher immer einen Punkt der zu betrachtenden Punktgruppe beliebig wählen, also statt eines Punktes derselben den 0^{ten} Punkt nehmen.

Der 0^{te} Punkt kann mit dem ersten und zweiten nie auf einer Geraden liegen, ohne dass überhaupt alle Punkte der Reihe in diese Gerade fallen. Der 0^{te} , i^{te} und k^{te} Punkt aber liegen auf einer Geraden, wenn

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & l_1^i & l_1^k \\ 1 & l_2^i & l_2^k \\ 1 & l_3^i & l_3^k \end{vmatrix},$$

oder wenn

$$A_{ik} = 0.$$

Man erhält also als Bedingung, dass drei Punkte der Reihe in einer Geraden liegen, die Invariantenrelationen:

$$\text{bei } 0, 1, 3 : i = 0$$

$$\text{bei } 0, 1, 4 : i^2 - i' = 0$$

$$\text{bei } 0, 2, 3 : i' = 0$$

$$\text{bei } 0, 2, 4 : ii' - i'' = 0$$

$$\text{bei } 0, 3, 4 : i'^2 - ii'' = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die Bedingung, dass die Punkte 0, 1, 2, 3, 4, 5 auf einem Kegelschnitte liegen, ist durch die Gleichung:

$$= \begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} 1 & l_1^3 & l_1^4 \\ 1 & l_2^3 & l_2^4 \\ 1 & l_3^3 & l_3^4 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} l_1^5 & l_1 & l_1^3 \\ l_2^5 & l_2 & l_2^3 \\ l_3^5 & l_3 & l_3^3 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} l_1^5 & l_1^2 & l_1^4 \\ l_2^5 & l_2^2 & l_2^4 \\ l_3^5 & l_3^2 & l_3^4 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} l_1^5 & l_1 & l_1^2 \\ l_2^5 & l_2 & l_2^2 \\ l_3^5 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} l_1^5 & l_1^3 & l_1^4 \\ l_2^5 & l_2^3 & l_2^4 \\ l_3^5 & l_3^3 & l_3^4 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^3 \\ 1 & l_2 & l_2^3 \\ 1 & l_3 & l_3^3 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} 1 & l_1^2 & l_1^4 \\ 1 & l_2^2 & l_2^4 \\ 1 & l_3^2 & l_3^4 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt. Nach der Definition der A verwandelt sich dies, indem man noch durch i''' dividirt, in:

$$A_{34} A_{24} A_{23} = i'' A_{14} A_{12} A_{13} A_{24}.$$

Der Factor A_{24} , der sich hier absondert, ist leicht erklärlich. Denn $A_{24} = 0$ bedeutet, dass 0, 2, 4, also auch 1, 3, 5 auf einer Geraden liegen, wobei denn allerdings alle 6 Punkte sich auf einem, freilich uneigentlichen, Kegelschnitte befinden. Die eigentliche Bedingung aber ergibt der andere Factor:

$$A_{34} A_{23} = i'' A_{14} A_{12} A_{13},$$

oder

$$i'^3 - i^3 i'' = 0$$

u. s. w.

§. 14.

Curven, auf welche die Invariantenrelationen des vorigen §. führen.

Die Gleichungen, welche so zunächst als Invariantenrelationen auftreten, und welche also gewisse besondere Ausgangssysteme $f=0$ charakterisiren, kann man in Gleichungen von Curvensystemen verwandeln, welche von dem Ausgangssysteme unabhängig werden, und nur noch von dem Fundamentaldreiecke selbst abhängig sind. Man kann nämlich fragen, welcher Punkt y einem beliebig gewählten Punkte x entsprechen müsse, damit die so bestimmte Collineation $f=0$ auf Punktreihen von einer jener Eigenschaften führe. Es folgt aus dem Früheren, dass man, um diese Frage zu beantworten, nur in den gegebenen Relationen an Stelle von

$$l_1, l_2, l_3$$

die Grössen

$$\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Y_2}{X_2}, \frac{Y_3}{X_3}$$

zu setzen hat. Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck

$$\mathcal{A}(l) = l - l_1 \cdot l - l_2 \cdot l - l_3$$

in

$$\frac{1}{X_1 X_2 X_3} \cdot (X_1 l - Y_1) (X_2 l - Y_2) (X_3 l - Y_3).$$

Dies aber ist der Quotient der Werthe, welche die Covariante φ annimmt, wenn man sie einmal für die Variabeln X_i , das andere Mal für die Variabeln $lX_i - Y_i$ bildet, oder wenn man jedes Mal die ursprünglichen Coordinaten einführt:

$$\frac{\varphi(lx_1 - y_1, lx_2 - y_2, lx_3 - y_3)}{\varphi(x_1, x_2, x_3)}.$$

Bezeichnen wir den Zähler, nach Potenzen von l geordnet, durch

$$l^3 \varphi - 3l^2 \varphi_1 + 3l \varphi_2 - \varphi_3,$$

so ist $\varphi_3 = 0$ die Gleichung des Fundamentaldreiecks, $\varphi_2 = 0$ die erste, $\varphi_1 = 0$ die zweite Polare desselben in Bezug auf den Punkt x . Da nun $\mathcal{A}(l)$ hiernach in

$$l^3 - \frac{3\varphi_1}{\varphi} l^2 + \frac{3\varphi_2}{\varphi} l - \frac{\varphi_3}{\varphi}$$

übergeht, so erhält man die Gleichungen der gesuchten Curven, indem man

$$i, \quad i', \quad i''$$

durch

$$\frac{3\varphi_1}{\varphi}, \quad \frac{3\varphi_2}{\varphi}, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi}$$

ersetzt, oder, wenn man mit der passenden Potenz von φ multiplicirt, durch

$$3\varphi_1, \quad 3\varphi_2, \quad \varphi_3,$$

dann aber die verschiedenen Terme mit solchen Potenzen von φ multiplicirt, dass das Resultat für die vier φ_i homogen wird.

Die Curve $\varphi_3 = 0$ (das Fundamentaldreieck) hat drei Doppelpunkte, die Ecken des Dreiecks. Der Kegelschnitt $\varphi_2 = 0$, die Polare von x , geht also durch die Ecken dieses Dreiecks hindurch. Um die Tangente der Polare in einem dieser Punkte zu finden, kann man die Polare von x in Bezug auf das Seitenpaar suchen, welches sich in der betrachteten Ecke schneidet, und man sieht also, dass die Tangente des Kegelschnitts $\varphi_2 = 0$ zu jenen beiden Seiten und zu der Verbindungslinie von x mit der Ecke harmonisch liegt. Der Kegelschnitt $\varphi_2 = 0$ ist hierdurch geometrisch mehr als vollständig bestimmt; ja indem man die Seiten des Dreiecks und die Tangenten des Kegelschnitts in den Ecken als Seiten eines Pascalschen Sechsecks betrachtet, sieht man, dass die drei Seiten des Dreiecks (p, p', p'') von den in seinen Ecken (β, β', β'') berührenden drei Tangenten (t, t', t'') entsprechend in drei Punkten ($\alpha, \alpha', \alpha''$) geschnitten werden, welche auf einer Geraden liegen, der Pascalschen Linie des Sechsecks. Von

dem Punkte α gehen die Strahlen t, p aus, deren ersterer in β berührt, und deren zweiter durch die Linie βx in einem Punkte geschnitten wird, welcher zu α, β', β'' harmonisch ist. Daher ist βx die Polare von α in Bezug auf den Kegelschnitt $\varphi_2 = 0$, ebenso $\beta' x$ die von $\alpha', \beta'' x$ die von α'' ; endlich also ist x der Pol der Pascalschen Linie, und diese also fällt mit der Geraden $\varphi_1 = 0$ zusammen.

Mit Hülfe dieser Betrachtungen lassen sich nun die Curven deuten, welche aus den obigen Invariantenbeziehungen entstehen. Der Punkt x sei beliebig gegeben; die folgenden Gleichungen sagen aus, auf welchen Curven y liegen muss, damit die aus y und x abgeleitete Punktreihe eine der bezeichneten Eigenschaften hat:

- 1) Die Punkte 0, 1, 3 auf einer Geraden: $\varphi_1 = 0$
- 2) Die Punkte 0, 1, 4 auf einer Geraden: $3\varphi_1^2 - \varphi\varphi_2 = 0$
- 3) Die Punkte 0, 2, 3 auf einer Geraden: $\varphi_2 = 0$
- 4) Die Punkte 0, 2, 4 auf einer Geraden: $9\varphi_1\varphi_2 - \varphi\varphi_3 = 0$
- 5) Die Punkte 0, 3, 4 auf einer Geraden: $3\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0$
- 6) Die Punkte 0, 1, 3, 4, 5 auf einem Kegelschnitt: $\varphi_2^3\varphi - \varphi_1^3\varphi_3 = 0$.

Ueber die geometrischen Eigenschaften dieser Curven lässt sich Folgendes bemerken:

ad 1. Die Curve ist die Pascalsche Linie selbst.

ad 2. Ein Kegelschnitt, welcher in den Schnittpunkten des Kegelschnitts $\varphi_2 = 0$ mit der Pascalschen Linie erstere berührt. Diese Punkte (γ, γ') sind die Berührungspunkte der von x an den Kegelschnitt $\varphi_2 = 0$ gezogenen Tangenten.

ad 3. Der Kegelschnitt, welcher die Polare von x in Bezug auf das Fundamentaldreieck ist.

ad 4. Eine Curve dritter Ordnung, welche durch die drei Schnittpunkte der Pascalschen Linie mit den Seiten des Fundamentaldreiecks geht, und in den Ecken desselben von dem Kegelschnitte $\varphi_2 = 0$ berührt wird.

ad 5. Eine Curve vierter Ordnung, welche in den Ecken des Fundamentaldreiecks Doppelpunkte hat, und in den Punkten γ, γ' die Pascalsche Linie berührt.

ad 6. Eine Curve sechster Ordnung, welche die Punkte γ, γ' zu dreifachen Punkten hat, und die Ecken des Fundamentaldreiecks zu zu Doppelpunkten, so aber, dass die Seiten desselben zugleich die Tangenten der Doppelpunkte sind; welche endlich durch den Punkt x selbst hindurchgeht.

Es genügt, die Classe von geometrischen Betrachtungen angedeutet zu haben, welche hier auftritt; es ist leicht, dieselbe beliebig weit fortzusetzen.

§. 15.

Besondere Fälle der Collineation.

Ebenso genügt es, die Ausnahmefälle anzudeuten, welche dadurch eintreten, dass von den Wurzeln der cubischen Gleichung zwei oder drei einander gleich werden.

I. Ist $l_3 = l_2$, so muss man die kanonische Form (2) durch die folgende ersetzen:

$$(1) \quad f = l_1 X_1 U_1 + l_2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + \alpha X_2 U_3,$$

wo α eine beliebige, aber von Null verschiedene Grösse ist.

Um die Zulässigkeit dieser kanonischen Form einzusehen, bemerke man, dass jetzt nur zwei lineare Combinationen X_i , resp. Y_i so gefunden werden können, dass aus (1) §. 12. die Form

$$\varrho Y_i = l_i X_i$$

hervorgeht. Setzen wir also

$$(2) \quad \begin{aligned} \varrho Y_1 &= l_1 X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2 X_2, \end{aligned}$$

so muss die dritte Gleichung die Form haben

$$(3) \quad \varrho Y_3 = \beta X_1 + \alpha X_2 + \gamma X_3.$$

Bildet man nun die cubische Gleichung wie in §. 12, so erhält man

$$0 = \begin{vmatrix} l_1 - l & 0 & 0 \\ 0 & l_2 - l & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma - l \end{vmatrix},$$

also, damit l_2 Doppelwurzel sei, $\gamma = l_2$. Setzt man nun noch

$$Y_3 + \frac{\beta}{l_1 - l_2} Y_1 \text{ für } Y_3, \quad X_3 + \frac{\beta}{l_1 - l_2} X_1 \text{ für } X_3,$$

so zerstört man in der Gleichung (3) das Glied mit X_1 , und die Gleichungen (3) gehen über in

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l_1 X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2 X_2 \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_2 + l_2 X_3, \end{aligned}$$

was mit der Annahme der kanonischen Form (1) identisch ist.

Man erhält mit Zugrundelegung derselben die Bildungen [vergl. §. 12. (3)]:

$$\begin{aligned} i &= l_1 + 2l_2 & i_1 &= l_1^2 + 2l_2^2 & i_2 &= l_1^3 + 2l_2^3 \\ i' &= l_2^2 + 2l_1 l_2 & i'' &= l_1 l_2^2 \\ f_1 &= l_1^2 X_1 U_1 + l_2^2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + 2l_2 \alpha X_2 U_3 \\ f_2 &= l_1^3 X_1 U_1 + l_2^3 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + 3l_2^2 \alpha X_2 U_3 \\ g &= l_2^2 X_1 U_1 + l_1 l_2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) - \alpha l_1 X_2 U_3 \\ \varphi &= -\varepsilon \alpha (l_1 - l_2)^2 X_1 X_2^2 & \psi &= \frac{\alpha}{\varepsilon} (l_1 - l_2)^2 U_1 U_3^2. \end{aligned}$$

Zwei Seiten der frühern Fundamentaldreiecke fallen zusammen ($X_2 = 0$), doch so, dass ihr Schnittpunkt bestimmt bleibt ($U_1 = 0$). Der hier betrachtete Fall umfasst alle collinearen Systeme dieser Art, welche dieses uneigentliche Fundamentaldreieck gemein haben. Die Formeln für die Collineation:

$$\begin{aligned}\varrho Y_1 &= l_1 X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2 X_2 \\ \varrho Y_3 &= l_2 X_3 + \alpha X_2\end{aligned}$$

lehren, dass wieder alles vollständig bestimmt ist, wenn einem beliebig gegebenen Punkte X ein Punkt Y zugeordnet ist, da die Verhältnisse der l_1, l_2, α dann aus den obigen Gleichungen bestimmt sind.

Die Coordinaten des h^{ten} Punktes der zu einem beliebigen Punkte X gehörigen Reihe sind:

$$(4) \quad \begin{aligned}\varrho Y_1 &= l_1^h X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2^h X_2 \\ \varrho Y_3 &= l_2^h X_3 + h\alpha l_2^{h-1} X_2.\end{aligned}$$

Damit gewisse Punkte dieser Reihe bestimmte Lagen haben, müssen Relationen bestehen, welche nur die Invarianten, also nur l_1, l_2 , nicht aber α enthalten. So werden denn die aus derselben abgeleiteten Curven nur $\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Y_2}{X_2}$ enthalten. Alle oben aufgestellte Curven gehen also in Systeme von Geraden über, welche durch den Schnittpunkt der doppelt zu rechnenden Seite des Fundamentaldreiecks ($X_2 = 0$) mit der einfachen ($X_1 = 0$), oder durch die Ecke $U_3 = 0$ hindurchgehen. In der That nämlich wird die aus den Coordinaten dreier Punkte der Reihe gebildete Determinante hier

$$\begin{vmatrix} l_1^h X_1 & l_2^h X_2 & l_2^h X_3 + h\alpha l_2^{h-1} X_2 \\ l_1^k X_1 & l_2^k X_2 & l_2^k X_3 + k\alpha l_2^{k-1} X_2 \\ l_1^m X_1 & l_2^m X_2 & l_2^m X_3 + m\alpha l_2^{m-1} X_2 \end{vmatrix} = X_1 X_2^2 \cdot \alpha \begin{vmatrix} l_1^h & l_2^h & h l_2^{h-1} \\ l_1^k & l_2^k & k l_2^{k-1} \\ l_1^m & l_2^m & m l_2^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Man sieht, dass α hier nur als Factor erscheint, und also aus den in Rede stehenden Gleichungen ganz herausgeht. Uebrigens entsteht die übrigbleibende Determinante aus der entsprechenden in §. 13, indem man l_3 in $l_2 + \omega$ übergehen, und ω gegen Null convergiren lässt. Daher kann man sofort die früher gegebenen Formeln benutzen, und nur $l_3 = l_2$ setzen. Hiermit ist das oben Behauptete nicht nur erwiesen, sondern man findet auch leicht die Systeme von Geraden, welche in diesem Falle an Stelle der oben aufgestellten Curven treten.

II. In dem Falle, wo ausserdem $\alpha = 0$ wird, verschwinden φ und ψ ; die Gleichungen (2) geben

$$(5) \quad Y_1 X_2 - Y_2 X_1 = 0.$$

Dieser Fall umfasst alle einem gegebenen perspectivischen Systeme.

Die Bedingungen, welche man Punkten der Reihen auferlegen kann, sind von selbst erfüllt, da alle Punkte der Reihe auf demselben Projectionsstrahl (5) liegen.

III. Wenn alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich werden, so kann man die kanonische Form anwenden:

$$f = l(X_1 U_1 + X_2 U_2 + X_3 U_3) + \alpha X_1 U_2 + \beta X_2 U_3.$$

Es ist darin l der gemeinschaftliche Werth der drei Wurzeln; α und β sollen zunächst als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Auf die vorliegende kanonische Form wird man folgendermassen geführt. Unter den linearen Verbindungen der Gleichungen §. 12 (1) giebt es nur eine, welche die Form

$$(6) \quad \varrho Y_1 = l X_1$$

hat. Die andern zwischen den Y und X stattfindenden Gleichungen müssen die Form haben:

$$(7) \quad \begin{aligned} \varrho Y_2 &= a X_1 + (b + l) X_2 + c X_3 \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 + (\gamma + l) X_3. \end{aligned}$$

Aber die cubische Gleichung, welche hiernach den Ausdruck

$$\Delta(z) = 0 = \begin{vmatrix} l-z & 0 & 0 \\ a & l+b-z & c \\ \alpha & \beta & l+\gamma-z \end{vmatrix}$$

hat, muss die Wurzel l dreimal enthalten. Daher muss man haben

$$(8) \quad b + \gamma = 0, \quad b\gamma - c\beta = 0.$$

Man erfüllt diese Gleichungen identisch, indem man

$$c = \mu^2, \quad \beta = -\nu^2, \quad b = \mu\nu, \quad \gamma = -\mu\nu$$

setzt. Die Gleichungen (7) verwandeln sich dadurch in

$$\begin{aligned} \varrho Y_2 &= a X_1 + l X_2 + \mu(\nu X_2 + \mu X_3) \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + l X_3 - \nu(\nu X_2 + \mu X_3). \end{aligned}$$

Es folgt aber daraus die Verbindung

$$\varrho(\nu Y_2 + \mu Y_3) = (a\nu + \alpha\mu) X_1 + l(\nu X_2 + \mu X_3).$$

Setzt man also jetzt wieder Y_2 für $\nu Y_2 + \mu Y_3$, und X_2 für $\nu X_2 + \mu X_3$, so erhält man eine Gleichung der Form

$$(9) \quad \varrho Y_2 = a X_1 + l X_2,$$

welche aus den Gleichungen (7) immer abgeleitet werden kann. Man darf daher annehmen, dass eine der Gleichungen (7) die Form (8) bereits habe, d. h. $b = 0$, $c = 0$. Die Gleichungen (8) geben dann $\gamma = 0$, während β beliebig bleibt. Die dritte Gleichung (7) wird also

$$(10) \quad \varrho Y_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + l X_3.$$

Verändert man nun noch Y_3 und X_3 , indem man statt derselben

$Y_3 - \frac{\alpha}{a} Y_2$ und $X_3 - \frac{\alpha}{a} X_2$ setzt, so fällt im (10) noch das Glied mit X_1 fort, und es bleibt

$$(11) \quad \varrho Y_3 = \beta X_2 + l X_3.$$

Multipliziert man nun (6), (9), (11) mit U_1, U_2, U_3 und addirt, so ergibt sich die Gleichung der Collineation:

$$f = l(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) + a X_1 U_2 + \beta X_2 U_3,$$

welche sich von der oben angenommenen Form nur dadurch unterscheidet, dass α statt a geschrieben ist.

Legen wir jetzt die Form

$$f = l(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) + \alpha X_1 U_2 + \beta X_2 U_3$$

zu Grunde, so finden wir:

$$\begin{aligned} i &= 3l, \quad i_1 = 3l^2, \quad i_2 = 3l^3, \quad i' = 3l^2, \quad i'' = l^3 \\ f_1 &= l^2(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) + 2\alpha l X_1 U_2 + 2\beta l X_2 U_3 + \alpha\beta X_1 U_3 \\ f_2 &= l^3(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) + 3\alpha l^2 X_1 U_2 + 3\beta l^2 X_2 U_3 + 3\alpha\beta l X_1 U_3 \\ &\dots \dots \dots \\ f_h &= l^{h+1}(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) + (h+1)\alpha l^h X_1 U_2 + \\ &\quad + (h+1)\beta l^h X_2 U_3 + \frac{h \cdot h+1}{2} \alpha\beta l^{h-1} X_1 U_3 \\ g &= l^2(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) - \alpha l X_1 U_2 - \beta l X_2 U_3 + \alpha\beta X_1 U_3 \\ \varphi &= -\varepsilon \alpha^2 \beta X_1^3, \quad \psi = \frac{\alpha\beta^2}{\varepsilon} U_3^3. \end{aligned}$$

Dieser Fall umfasst alle diejenigen collinearen Systeme, bei welchen sich die Ecken des frühern Fundamentaldreiecks in einen Punkt ($U_3 = 0$), die Seiten in eine Gerade ($X_1 = 0$) vereinigt haben. Auch hier wird durch die Gleichungen

$$(12) \quad \begin{aligned} \varrho Y_1 &= l X_1 \\ \varrho Y_2 &= \alpha X_1 + l X_2 \\ \varrho Y_3 &= \beta X_2 + l X_3 \end{aligned}$$

alles bestimmt, sobald zu einem willkürlichen Punkte X ein bestimmter Y zugeordnet wird, indem die Verhältnisse der Grössen α, β, l dadurch gegebene Werthe annehmen.

Die Punkte der Reihe

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l^h X_1 \\ \varrho Y_2 &= l^h X_2 + h\alpha l^{h-1} X_1 \\ \varrho Y_3 &= l^h X_3 + h\beta l^{h-1} X_2 + \frac{h \cdot h-1}{2} \alpha\beta l^{h-2} X_1 \end{aligned}$$

können hier, indem man durch l^{h-2} überall dividirt, einfacher durch die Gleichungen

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho Y_1 &= l^h X_1 \\ \varrho Y_2 &= l^h X_2 + h\alpha l X_1 \\ \varrho Y_3 &= l^h X_3 + h\beta l X_2 + \frac{h \cdot h-1}{2} \alpha\beta X_1 \end{aligned} \right.$$

dargestellt werden. Diese Punkte liegen daher hier nicht mehr auf einer transcendenten Curve, sondern auf einem Kegelschnitt, dessen Gleichung man erhält, indem man ϱ und h aus den obigen Gleichungen eliminirt. Indessen genügt es hier zu bemerken, dass die Gleichungen

$$\varrho Y_i = \alpha_i + 2h\beta_i + h^2\gamma_i$$

immer einen Kegelschnitt darstellen, dessen Gleichung in Liniencoordinaten ist:

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3) - (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3)^2 = 0.$$

Es sind daher α, γ Punkte des Kegelschnitts, β der Schnittpunkt der in α, γ an den Kegelschnitt zu ziehenden Tangenten. Wenden wir dies auf die Gleichungen (13) an, so sehen wir, dass an Stelle des Punktes α der Punkt X_1 , an Stelle von γ der Punkt $U_3 = 0$ tritt, während β die Form $p U_2 + q U_3 = 0$ hat, also ein Punkt von $X_1 = 0$ ist. Der betrachtete Kegelschnitt geht also durch X_1 und berührt in dem Punkte $U_3 = 0$, in welchem sich die Ecken des Fundamentaldreiecks vereinigt haben, die Gerade $X_1 = 0$, welche die Vereinigung seiner Seiten ist. Der Kegelschnitt zerfällt niemals, ausser wenn $X_1 = 0$ ist, da die Determinante $(\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3)^2$ des Kegelschnitts sich auf X_1^3 reducirt.

IV. Man kann noch den Fall betrachten, wo eine der Constanten α, β verschwindet. Es ist gleichgültig, welche man verschwinden lässt. Sei $\beta = 0$; die Gleichungen (12) gehen dann über in

$$\varrho Y_1 = l X_1$$

$$\varrho Y_2 = l X_2 + \alpha X_1$$

$$\varrho Y_3 = l X_3.$$

Es folgt $Y_1 X_3 - Y_3 X_1 = 0$; man hat also perspectivische Systeme, deren Centrum der Punkt $X_1 = 0, X_3 = 0$ ist. Verschwindet endlich sowohl α als β , so hat man identische Systeme, deren entsprechende Punkte immer zusammenfallen.

Giessen, den 3^{ten} September 1868.