ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N° 2593-94.

Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind.

Von *Hugo Gyldén.*

Die von Herrn v. Oppolzer in Nr. 2573 der A. N. mitgetheilte, jedenfalls sehr beachtenswerthe Ansicht, dass ein Theil der Säcularänderung der Mondlänge durch die allmälige Vergrösserung der Erdmasse ihre Erklärung finden könne, hat mich zu der in der Ueberschrift näher bezeichneten Untersuchung veranlasst. Die Frage, ob das Niederströmen von Materie aus dem Weltraume wirklich als Erklärungsgrund gelten kann, werde ich hier gar nicht berühren; die folgenden Zeilen sollen nur die theoretische Untersuchung der allgemeinen Aufgabe wiedergeben.

Da die Kraft stets in der Richtung der gegenseitigen Entfernung wirkt, so bleiben die beiden Körper immer in derselben Ebene; wir brauchen daher nur zwei Differentialgleichungen anzusetzen, nämlich:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu_1+F}{r^3}x=0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu_1+F}{r^3}y=0\,,$$

wo μ_1 den zu einer bestimmten Zeitepoche constanten Werth der Summe beider Massen bezeichnet und F eine als bekannt angenommene Function der Zeit, beide multiplicirt mit einer Constanten, nämlich dem Werthe der Anziehungskraft der Masseneinheit in der Zeiteinheit und in der Einheit der Entfernung.

Statt x, y und r führe ich drei neue Grössen ξ, η und ϱ ein, indem ich setze:

$$x=\frac{\xi}{1+\psi}\,;\qquad y=\frac{\eta}{1+\psi}\,;\qquad r=\frac{\varrho}{1+\psi}\,;$$

es ist also:

$$\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

Die Function ψ ist vorläufig noch unbestimmt.

Ferner führe ich statt t die reducirte Zeit τ ein, indem ich die Relation

$$dt=\frac{d\tau}{(1+\psi)^2}$$

feststelle. Die obigen Differentialgleichungen gehen nun in die folgenden über:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+\left[-\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\frac{\mu_1+F}{\varrho^3}\right]\frac{\xi}{1+\psi}=0$$
$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2}+\left[-\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\frac{\mu_1+F}{\varrho^3}\right]\frac{\eta}{1+\psi}=0$$

und wenn nun ψ so bestimmt wird, dass

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\frac{\mu_1+F}{\varrho^3}\right]\frac{1}{1+\psi}=\frac{\mu_1}{\varrho^3}\,,$$

oder

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\frac{\mu_1}{\varrho^3}\psi=\frac{F}{\varrho^3}\,,$$

so erhalten wir:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+\frac{\mu_1}{\varrho^3}\xi=0$$
$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2}+\frac{\mu_1}{\varrho^3}\eta=0$$

Es geht hieraus sogleich hervor, dass der Punkt $\xi\eta$ eine Kepler'sche Ellipse beschreibt, in welcher die wahre Anomalie mit der reducirten Zeit berechnet werden muss. Aus dieser intermediären Bahn findet sich die wahre dadurch, dass man die Dimensionen ersterer im Verhältnisse von 1 zu $1+\psi$ verkleinert.

Unsere Aufgabe ist nun darauf zurückgeführt, die Function ψ zu bestimmen; denn, nachdem dieses geschehen ist, ergiebt sich die Relation zwischen t und τ unmittelbar durch eine Quadratur.

Die obigen Differentialgleichungen geben uns:

$$\xi\frac{d^2\psi}{d\tau^2}-\psi\frac{d^2\xi}{d\tau^2}=\frac{\xi F}{\varrho^3}$$
$$\eta\frac{d^2\psi}{d\tau^2}-\psi\frac{d^2\eta}{d\tau^2}=\frac{\eta F}{\varrho^3}$$

Hieraus finden sich, indem h_1 und h_2 zwei Integrationsconstanten bezeichnen,

$$\xi\frac{d\psi}{d\tau}-\psi\frac{d\xi}{d\tau}=h_1+\int\frac{\xi F}{\varrho^3}d\tau$$
$$\eta\frac{d\psi}{d\tau}-\psi\frac{d\eta}{d\tau}=h_2+\int\frac{\eta F}{\varrho^3}d\tau\,,$$

und nun ergiebt sich:

$$\psi = \frac{1}{\xi \frac{d\eta}{d\tau} - \eta \frac{d\xi}{d\tau}} \left[\eta \left(h_1 + \int \frac{\xi F}{\varrho^3} d\tau \right) - \xi \left(h_2 + \int \frac{\eta F}{\varrho^3} \right) \right]$$

In der Folge sollen die beiden Integrationsconstanten gleich Null gesetzt werden, da dieses, ohne die Allgemeinheit der Resultate wesentlich zu beeinträchtigen, geschehen kann.

Wäre nun F eine bekannte Function von τ, so läge die völlig strenge Lösung unserer Aufgabe vor; wir kennen aber nur F als Function von t und die Vertauschung dieser Veränderlichen gegen τ kann nur durch successive Annäherungen bewerkstelligt werden. Unter gewissen Bedingungen lassen sich diese Annäherungen indessen ziemlich leicht ausführen. Zunächst, wenn die Function F innerhalb der Integrationsgrenzen in Bezug auf t sehr klein bleibt, ergiebt sich ein genäherter Werth von ψ, wenn man einfach t mit τ verwechselt. Man findet in solcher Weise z. B. leicht, dass, wenn die Zunahme von F der Zeit proportional ist, auch ψ nahezu einer ähnlichen Veränderung unterworfen bleibt. Für die Berechnung des Einflusses von F auf die Säcularänderung der Mondlänge würde man die hinreichend genaue Formel in solcher Weise leicht erhalten können.

Die Bedingung, dass F immer klein bleibe, ist jedoch nicht nöthig, um unsere Aufgabe durch convergente Annäherungen lösen zu können, sondern es genügt, dass die Aenderung von F oder das Differential $\frac{dF}{dt}$ immer sehr klein bleibt, vorausgesetzt, dass F immer positive Werthe hat. Da diese Bedingung wohl in der Natur erfullt ist, und der Fall selbst von Interesse in kosmologischer Hinsicht sein dürfte, so werde ich ihn etwas näher auseinander setzen.

Man bezeichne die halbe grosse Axe der intermediären Ellipse durch a, die Excentricität durch e, die wahre Anomalie durch f; alsdann hat man:

$$\xi \frac{d\eta}{d\tau} - \eta \frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{\mu_1 a (1-e^2)}\,;$$

und, wenn man die Achse der ξ mit der Apsidenlinie zusammenfallen lässt, gelten die Gleichungen:

$$= \varrho \cos f; \qquad \eta = \varrho \sin f$$

Ferner setze ich:

$$n = \sqrt{\mu_1}\, a^{-3/2}$$

Die Grössen ξ, η, $\frac{\xi}{\varrho^3}$, $\frac{\eta}{\varrho^3}$ sind nun durch trigonometrische Reihen darzustellen; wählt man dabei $n\tau$ als Argument, so fallen bekanntlich bei den beiden letzteren die constanten Glieder weg. — Es wird sich hierauf um die Entwicklung des Integrales

$$\int \cos sn\tau \,.\, F d\tau$$

handeln, wo s eine ganze Zahl bedeutet. Man erhält sogleich:

$$\int \cos sn\tau \,.\, F d\tau = \frac{1}{sn} \sin sn\tau \,.\, F - \frac{1}{sn} \int \sin sn\tau \,.\, \frac{dF}{d\tau} d\tau$$

Nun ist aber:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{(1+\psi)^2};$$

bezeichnet man also

$$\frac{\frac{dF}{dt}}{(1+\psi)^2} = F_1\,,$$

so erhält man:

$$\int \cos sn\tau \,.\, F d\tau = \frac{1}{sn} \sin sn\tau \,.\, F - \frac{1}{sn} \int \sin sn\tau \,.\, F_1 d\tau$$

und in derselben Weise findet sich:

$$\int \sin sn\tau \,.\, F d\tau = -\frac{1}{sn} \cos sn\tau \,.\, F + \frac{1}{sn} \int \cos sn\tau \,.\, F_1 d\tau$$

Untersuchen wir jetzt, auf Grund der angeführten Ausdrücke, die Glieder in ψ, welche von der Excentricität unabhängig sind. Man hat, wenn nur diese Glieder berücksichtigt werden,

$$\xi = a \cos n\tau\,; \qquad \eta = a \sin n\tau$$
$$\frac{\xi}{\varrho^3} = \frac{1}{a^2} \cos n\tau\,; \qquad \frac{\eta}{\varrho^3} = \frac{1}{a^2} \sin n\tau$$

Hiermit ergiebt sich, wenn die Relation zwischen n und a berücksichtigt wird,

$$\psi = \frac{1}{\mu_1} [\sin n\tau (\sin n\tau \,.\, F - \int \sin n\tau \,.\, F_1 d\tau) + \cos n\tau (\cos n\tau \,.\, F - \int \cos n\tau \,.\, F_1 d\tau)]$$

Wir setzen, in Analogie mit dem Früheren,

$$\frac{\frac{dF_1}{dt}}{(1+\psi)^2} = F_2$$

und erhalten somit:

$$\psi = \frac{F}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1 n} [\sin n\tau \int \cos n\tau \,.\, F_2 d\tau - \cos n\tau \int \sin n\tau \,.\, F_2 d\tau]$$

Diese Formel soll auf ein Beispiel angewendet werden. Unter der Voraussetzung, dass γ eine im Vergleich mit μ_1 sehr kleine Grösse bezeichnet, nehme ich für F den Ausdruck

$$F = \gamma t$$

an. Die erste Annäherung giebt uns sogleich:

$$\psi = \frac{\gamma}{\mu_1} t$$

und dieses Resultat wird, wie wir sehen werden, durch die folgenden Annäherungen nicht wesentlich abgeändert. Wir finden nämlich:

$$F_1 = \frac{\gamma}{\left(1+\frac{\gamma}{\mu_1}t\right)^2}$$

$$F_2 = -\frac{2\mu_1\left(\frac{\gamma}{\mu_1}\right)^2}{\left(1+\frac{\gamma}{\mu_1}t\right)^3}$$

womit wir in zweiter Annäherung erhalten:

$$\psi = \frac{\gamma}{\mu_1}t + \frac{1}{n^2}\frac{2\left(\frac{\gamma}{\mu_1}\right)^2}{\left(1+\frac{\gamma}{\mu_1}t\right)^3}$$

Das zweite Glied ist mithin immer eine kleine Grösse zweiter Ordnung und wird überdies mit wachsendem t verkleinert.

Die von der ersten Potenz der Excentricität abhängigen Glieder sollen nun auch untersucht werden. Man hat:

$$\begin{aligned}
\xi &= a\left(-\tfrac{3}{2}e + \cos n\tau + \tfrac{1}{2}e\cos 2n\tau\right)\\
\eta &= a\left(\sin n\tau + \tfrac{1}{2}e\sin 2n\tau\right)\\
\frac{\xi}{\varrho^3} &= \frac{1}{a^2}\left(\cos n\tau + 2e\cos 2n\tau\right)\\
\frac{\eta}{\varrho^3} &= \frac{1}{a^2}\left(\sin n\tau + 2e\sin 2n\tau\right)
\end{aligned}$$

Mittelst dieser Ausdrücke finden sich die mit e multiplicirten Glieder, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\psi = \frac{ne}{\mu_1}\Big(&\tfrac{1}{2}\sin 2n\tau\int\cos n\tau\,.\,F\,d\tau + 2\sin n\tau\int\cos 2n\tau\,.\,F\,d\tau\\
&+\tfrac{3}{2}\int\sin n\tau\,.\,F\,d\tau\\
&-\tfrac{1}{2}\cos 2n\tau\int\sin n\tau\,.\,F\,d\tau - 2\cos n\tau\int\sin 2n\tau\,.\,F\,d\tau\Big)
\end{aligned}$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die obigen Formeln der theilweisen Integration an, so heben sich zunächst alle vom Integralzeichen befreiten Glieder, und es bleibt:

$$\begin{aligned}
\psi = \frac{e}{\mu_1}\Big(&-\tfrac{1}{2}\sin 2n\tau\int\sin n\tau\,.\,F_1 d\tau - \sin n\tau\int\sin 2n\tau\,.\,F_1 d\tau\\
&+\tfrac{3}{2}\int\cos n\tau\,.\,F_1 d\tau\\
&-\tfrac{1}{2}\cos 2n\tau\int\cos n\tau\,.\,F_1 d\tau - \cos n\tau\int\cos 2n\tau\,.\,F_1 d\tau\Big)
\end{aligned}$$

und, nachdem man dieselbe Operation wiederholt hat, ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\psi = {}&\frac{3}{2}\frac{e}{n\mu_1}\sin n\tau\,.\,F_1\\
&+\frac{e}{n\mu_1}\Big(-\tfrac{1}{2}\sin 2n\tau\int\cos n\tau\,.\,F_2 d\tau - \tfrac{1}{2}\sin n\tau\int\cos 2n\tau\,.\,F_2 d\tau\\
&-\tfrac{3}{2}\int\sin n\tau\,.\,F_2 d\tau\\
&+\tfrac{1}{2}\cos 2n\tau\int\sin n\tau\,.\,F_2 d\tau\\
&+\tfrac{1}{2}\cos n\tau\int\sin 2n\tau\,.\,F_2 d\tau\Big)
\end{aligned}$$

Da nun F_2 neben F_1 als eine sehr kleine Grösse anzusehen ist, so bleibt der mit e multiplicirte Theil von ψ wesentlich auf das erste Glied beschränkt, und auch dieses muss als verschwindend neben dem von e unabhängigen Theile angesehen werden; nicht sowohl wegen des geringen Betrages von e, sondern weil F_1 nicht wie F mit der Zeit multiplicirt erscheint. — Die Glieder noch höherer Ordnung zu untersuchen, erscheint gegenwärtig kaum von Interesse; ich schliesse daher diese Mittheilung, indem ich die gewonnenen Resultate zusammenstelle.

Aus der Gleichung

$$d\tau = \left[1 + \frac{\gamma}{\mu_1}t + \frac{1}{n^2}\frac{2\left(\frac{\gamma}{\mu_1}\right)^2}{\left(1+\frac{\gamma}{\mu_1}t\right)^3}\right]^2 dt$$

findet sich, mit Hinweglassung kleinerer Glieder,

$$\tau = \left[1 - \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu_1}\right)^2}{n^2\left(1+\frac{\gamma}{\mu_1}t\right)^4}\right]t + \frac{\gamma}{\mu_1}t^2;$$

und mit diesem τ sind die Coordinaten ξ und η nach der für die Kepler'sche Ellipse geltenden Theorie zu berechnen. Die wahren Coordinaten finden sich alsdann mittelst der Formeln:

$$x = \frac{\xi}{1+\frac{\gamma}{\mu_1}t}; \qquad y = \frac{\eta}{1+\frac{\gamma}{\mu_1}t}$$

Die gefundene Lösung ist zwar auf dem Wege der successiven Annäherungen erhalten worden, muss aber doch als eine absolute Lösung bezeichnet werden, weil sie den Verlauf der Bewegung während unbestimmt wachsender Zeiten so nahe wiedergiebt, dass die Unterschiede von der wirklichen Bewegung immer sehr kleine Grössen bleiben, die man überdies beliebig verkleinern kann. — Bliebe die Quantität der aus dem Weltraume auf die Sonne und die Planeten herunterströmenden Materie immer dieselbe, so müssten die Planeten endlich in die Sonne stürzen.

Stockholm 1884 Mai 10.

Hugo Gyldén.