Mr. Tucker read the following papers :—

Sur les figures semblablement variables : Prof. J. Neuberg, of Liège;

On the Extension of Ivory's and Jacobi's Distance-Correspondences for Quadric Surfaces: Prof. J. Larmor; and

Some Properties of a Quadrilateral in a Circle the Rectangles under whose Opposite Sides are equal: Mr. Tucker.

Messrs. Jenkins and S. Roberts spoke on the subject of Prof. Neuberg's paper.

The following presents were received :—

Cabinet likeness of Mr. W. S. B. Woolhouse, and two photographs of geometrical figures from Mr. Woolhouse.

"Educational Times," for February.

"Physical Society of London—Proceedings," Vol. vi., Part iii., September to December, 1884.

"Johns Hopkins University Circulars," Vol. iv., No. 36, January, 1885.

"Report of the Superintendent of the United States Naval Observatory," for the year ending October 30th, 1884, 8vo; Washington, 1884.

"Bulletin de la Société Mathématique de France," Tome xii., No. 5; Paris, 1884.

"Atti della R. Accademia dei Lincei," Serie quarta, Vol. i., F. 1, 2, and 3; Roma, 1884, 1885.

"Journal für die reine und angewandte Mathematik," B. xcvi., H. 1; Berlin, 1885.

"Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft," 1^{re} liv., 4to; Leide, 1884.

"Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques," T. ix., Jan. 1885; Paris.

"Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie," Bd. ix., St. 1.; Leipzig, 1885.

"Tesis leída en el Examen profesional de ingeniero geógrafo," por J. de Mendizabal Tamborrel, 8vo; Mexico, 1884.

"Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Societät zu Erlangen," 16 Heft, Oktober 1882—Oktober 1884.

"American Journal of Mathematics," Vol. vii., No. 2.

Sur les figures semblablement variables. Par M. J. NEUBERG,
Professeur à l'Université de Liège.

[Read February 12th, 1885.]

M. H. M. Taylor, dans les *Proc. of the Lond. Math. Soc.*, Vol. xv., p. 122, a signalé des relations fort intéressantes entre les intersections d'un cercle avec les côtés d'un triangle. La présente Note a pour objet de préciser et de compléter ces relations en les rattachant à la

théorie des figures semblablement variables et à celle des podaires obliques d'un foyer d'une conique.

1. Soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle variable sous les conditions de rester constant de forme et inscrit au triangle fixe ABC . Les cercles circon-

scrits aux triangles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $Ca\beta$ se coupent en un même point F ,

tel que $\beta F\gamma = \pi - A$, $\gamma F\alpha = \pi - B$, $\alpha F\beta = \pi - C$,

$BFC = BF\alpha + CF\alpha = B\gamma\alpha + C\beta\alpha = \pi - B - B\alpha\gamma + \pi - C - C\alpha\beta = A + \alpha$,

$AFC = B + \beta$, $AFB = C + \gamma$.

Ces égalités montrent que le point F est fixe par rapport au triangle donné ABC et par rapport au triangle mobile $\alpha\beta\gamma$.

Donc, lorsqu'un triangle $\alpha\beta\gamma$ reste semblable à lui-même et inscrit à un triangle fixe ABC , il existe un point du triangle mobile qui est fixe; ce point est celui d'où l'on voit les côtés de $\alpha\beta\gamma$ sous des angles supplémentaires de ceux de ABC , et les côtés de ABC sous des angles respectivement égaux aux sommes des angles correspondants des deux triangles.*

2. Menons FM , FN , FP perpendiculaires à BC , CA , AB . Le tri-

* Voir *Nouvelles Annales*, t. xvii., p. 48; *Nouvelle Correspondance*, t. vi., pp. 65, 72, 219, 321; *Mathesis*, t. i., p. 106.

angle MNP est une position particulière de $a\beta\gamma$; c'est le minimum de $a\beta\gamma$.

Soit θ l'angle $aFM = \beta FN = \gamma FP$. Si l'on fait tourner le système des trois droites FM , FN , FP autour de F de l'angle θ et qu'on prenne les intersections avec BC , CA , AB , on aura les sommets du triangle $a\beta\gamma$.

Plus généralement, étant tracées une figure S dans le plan MNP et la figure semblable σ dans le plan $a\beta\gamma$, on transforme S en σ en faisant tourner S de l'angle θ autour de F et en modifiant les distances des points de S au point F dans le rapport $\cos \theta : 1$.

Autrement dit, on passe de S à σ en construisant, sur les droites joignant F aux différents points de S , des triangles rectangles semblables ayant en F le même angle θ .

De là résulte que, si D et d sont deux points homologues par rapport à MNP et $a\beta\gamma$, le triangle dFD est semblable à aFM . Donc tout point du plan mobile MNP décrit une droite. En particulier, si D est le centre du cercle MNP , le centre d du cercle $a\beta\gamma$ décrit une droite perpendiculaire à FD .

F est un centre permanent de similitude du triangle mobile $a\beta\gamma$.

Deux lignes homologues quelconques des figures S et σ sont dans le rapport $\cos \theta : 1$.

3. On sait qu'une tangente quelconque à une parabole, limitée à deux tangentes fixes, est vue du foyer sous un angle supplémentaire de celui des tangentes fixes; la réciproque de ce théorème est également vraie. Si on applique cette proposition aux angles MFN , NFP , PFM tournant autour de F , on voit que les côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ du triangle mobile $a\beta\gamma$ enveloppent trois paraboles touchant deux côtés du triangle ABC et ayant pour foyer commun le point F ; les sommets de ces courbes sont les projections de F sur les lignes NP , PM , MN .

Plus généralement, toute droite de la figure S enveloppe une parabole de foyer F ; car deux points de cette droite décrivent des droites (2°), et la distance de ces points est vue de F sous un angle constant.

4. Le cercle MNP rencontre les côtés de ABC en trois nouveaux points M' , N' , P' , qui sont les projections du point F symétrique de F par rapport au centre D . Les points F , F' sont les foyers d'une conique U inscrite au triangle ABC ; le cercle MNP est la podaire de F et F' par rapport à U , le diamètre EFE' du cercle est un axe de U ; le second axe de U est dirigé suivant la droite Dd .

Soient α' , β' , γ' les intersections de BC , CA , AB avec le cercle $a\beta\gamma$. Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ reste toujours semblable à lui-même, lorsque le triangle $a\beta\gamma$ est constant de forme, car on a

$$\alpha + \alpha' = B + C, \quad \beta + \beta' = C + A, \quad \gamma + \gamma' = A + B,$$

α, β , etc. désignant les angles des triangles $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma'$. Il est intéressant d'observer que

$$BFO = \alpha + A = \pi - \alpha', \quad CFA = \pi - \beta', \quad AFB = \pi - \gamma',$$

$$BF'O = \alpha' + A = \pi - \alpha, \quad CF'A = \pi - \beta, \quad AF'B = \pi - \gamma.$$

F' est le centre permanent de similitude du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$.

Le cercle MNP est le lieu des projections des points F, F' sur les tangentes à la conique U (podaïre de F et F'). Si l'on mène par F des droites faisant dans le même sens avec les tangentes à U l'angle $\frac{1}{2}\pi - \theta$, le lieu des extrémités de ces droites sera le cercle $\alpha\beta\gamma$, dont le centre d est sur le second axe de U ; l'angle $dFD = \theta$. Mais l'angle $dFD = dF'D$; donc le même cercle $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ est aussi le lieu des projections de F' sur les tangentes à U , les projetantes faisant avec ces tangentes l'angle $\frac{1}{2}\pi - \theta$.

On peut énoncer autrement ces résultats : Si les triangles $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma'$ tournent respectivement autour de F et F' avec la même vitesse angulaire, mais en sens contraire, leurs sommets sont toujours sur une même circonférence.

5. Le cercle $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ a pour diamètres les droites II', KK' , qui passent par les foyers F, F' et sont limitées aux tangentes menées par les sommets E, E' de l'ellipse U .

Je dis que ce cercle touche l'ellipse U . En effet, soit dQ l'une des normales menées de d à U ; cette droite est la bissectrice de l'angle FQF' , et la perpendiculaire ff' à dQ par le point Q est tangente à U . La circonférence circonscrite au triangle QFF' passe nécessairement par d ; car les lignes dQ et dD passent toutes deux par le milieu de l'arc sous-tendu par la corde FF' de ce cercle. Il en résulte que

$$FQf = FdD = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad F'Qf' = F'dD = \frac{\pi}{2} - \theta;$$

donc Q est la projection de F ou F' sur ff' , les projetantes faisant l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec ff' ; par suite Q est un point du cercle $\alpha\beta\gamma$.

D'après cela, la conique U est l'enveloppe du cercle $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$.

6. Examinons maintenant deux cas particuliers remarquables.

I. Lorsque $\alpha = A, \beta = B, \gamma = C$,

on a $\alpha' = \pi - 2A, \beta' = \pi - 2B, \gamma' = \pi - 2C$,

$$BFO = \alpha + A = 2A, \quad BF'O = \alpha' + A = \pi - A, \text{ etc.}$$

Le point F est le centre du cercle circonscrit à ABC et le point de

concours des hauteurs de $\alpha\beta\gamma$; F' est le point de concours des hauteurs de ABC et le centre du cercle inscrit à $\alpha'\beta'\gamma'$. Le cercle MNP est celui des neuf points de ABC .

II. Supposons $\alpha = B, \beta = C, \gamma = A$;
alors $\alpha' = C, \beta' = A, \gamma' = B$,

$$BFC = \alpha + A = B + A = \pi - C, \quad BF'C = \alpha' + A = \pi - B, \text{ etc.},$$

F et F' sont les points de Brocard de ABC ; les points de contact de U avec BC, CA, AB sont les pieds des symédianes de ABC . F est aussi un point de Brocard de $\alpha\beta\gamma$, F' un point de Brocard de $\alpha'\beta'\gamma'$.

7. Soient $A'B'O'$ le triangle formé par les droites $\alpha\beta', \beta\gamma', \gamma\alpha'$, et $A''B''C''$ le triangle formé par les droites $\alpha\gamma', \beta\alpha', \gamma\beta'$. M. Taylor a démontré que les directions des côtés de ces triangles sont constantes, et que ces triangles ont, avec ABC , un même centre d'homologie O .

Les distances de O aux côtés de ABC sont inversement proportionnelles aux produits

$$\sin \alpha \sin \alpha', \quad \sin \beta \sin \beta', \quad \sin \gamma \sin \gamma'.$$

Les droites AO, BO, CO rencontrent BC, CA, AB aux points de contact de U ; car on trouve ces points en faisant coïncider α avec α' , β avec β' , γ avec γ' .

Lorsque $\alpha = B, \beta = C, \gamma = A$,

O est le centre des symédianes de ABC ; les côtés de $A'B'O'$ sont parallèles à ceux de ABC ; les côtés de $A''B''C''$ sont parallèles aux tangentes menées par A, B, C au cercle ABC .

Lorsque $\alpha = A, \beta = B, \gamma = C$,

et que $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c$ sont les milieux des côtés et les pieds des hauteurs du triangle ABC , les côtés du triangle $A'B'O'$ sont parallèles aux droites M_bH_c, M_cH_a, M_aH_b , et ceux de $A''B''C''$ sont parallèles aux droites M_cH_b, M_aH_c, M_bH_a . Les distances du point O aux côtés du triangle ABC sont inversement proportionnelles aux produits $\sin A \sin 2A, \sin B \sin 2B, \sin C \sin 2C$. La ligne AO et le rayon du cercle ABC qui passe par A rencontrent BC à des distances égales de M_a , etc.

Si les triangles $A'B'O'$ ou $A''B''C''$ se réduisent à ce point O , on a le théorème suivant: Par le point O , on mène trois droites parallèles à M_bH_c, M_cH_a, M_aH_b (ou à M_cH_b, M_aH_c, M_bH_a); les points d'intersection de ces droites avec les côtés du triangle ABC sont situés, six sur une circonférence et trois sur une droite.