XI. Ueber die Brechung des Lichtes durch Metallprismen; von P. Drude.

Hr. Voigt¹⁾ hat früher darauf hingewiesen, dass es im allgemeinen keineswegs richtig ist, die Brechung in absorbirenden Prismen nach denselben Formeln zu berechnen, wie in durchsichtigen. Nur falls der Prismen- und der Einfallswinkel klein sind, ist dieses gestattet. — Die von Hrn. Voigt gegebenen Formeln sind für den Fall, dass der Einfallswinkel gross ist, complicirter Natur. Sie sind besonders für den Einfallswinkel $\varphi = 0$ specialisirt. Im Folgenden sollen durch Einführung zulässiger Näherungen vereinfachte und für die Rechnung bequeme Formeln aufgestellt werden, welche aber auch für grosse Einfallswinkel gültig bleiben. Dieses hat deshalb jetzt mehr Interesse gewonnen, weil neuerdings von den Herren Du Bois und Rubens²⁾ die Abhängigkeit der Brechung in Metallprismen vom Einfallswinkel einer experimentellen Forschung unterworfen ist. Diese bestätigt vollständig die nach der Theorie sich ergebenden Gesetze.

Das Medium, in welchem das Licht einfällt, sei durch den Index 0, das Metall durch den Index 1, das Medium, in welches das Licht austritt, durch den Index 2 bezeichnet. Die optischen Constanten der drei Medien seien charakterisirt durch die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, wobei α_0 und α_2 reell sind und die reciproken Quadrate der Brechungsexponenten der beiden Medien gegen den leeren Raum bedeuten, falls man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in demselben gleich 1 setzt, und wobei ist:

$$\frac{1}{V_{\alpha_1}} = n(1 - i\kappa), \quad i = \sqrt{-1},$$

unter n den Brechungsexponenten des Metalls gegen den leeren Raum verstanden, unter κ seinen Absorptionsindex.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 24. p. 144. 1885.

2) H. E. J. G. du Bois u. H. Rubens, Berl. Ber. 38. p. 955. 1890. Wied. Ann. 41. p. 507. 1890.

Die Elongation des Lichtäthers in einem der drei Medien ist gegeben als der reelle Theil einer Grösse:

$$A_m e^{\frac{i}{2} (t - (\mu_m x + \pi_m z))}, \quad m = 0, 1, 2,$$

falls die xz -Ebene in die Einfallsebene fällt, und die Prismenkante in die y -Axe. Dabei muss wegen der Differentialgleichungen der Bewegung des Aethers sein:

$$(1) \quad \mu_m^2 + \pi_m^2 = \frac{1}{\alpha_m}, \quad m = 0, 1, 2.$$

Da wir hier nur die Richtungen der Wellennormalen kennen lernen wollen, so kommt es uns nur auf die Kenntniss der Grössen μ und π , nicht auf die der Amplituden an. Für diesen Zweck genügt als Grenzbedingungen die Gleichheit der Elongation der Aethertheilchen zu beiden Seiten einer Grenze.

Bezeichnen wir den Prismenwinkel durch γ und legen die z -Axe senkrecht zur Grenze (12), so ist für letztere $z=0$, für die Grenze (01):

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tg} \gamma.$$

Aus den Grenzbedingungen folgt daher:

$$(2) \quad \begin{cases} \mu_0 \cos \gamma + \pi_0 \sin \gamma \\ = \mu_1 \cos \gamma + \pi_1 \sin \gamma, \\ \mu_1 = \mu_2. \end{cases}$$

Wir wollen annehmen, dass das Licht im Medium 0 ein falle. Es ist dann μ_0 und π_0 reell und zwar ist:

$$\frac{\mu_0 \cos \gamma + \pi_0 \sin \gamma}{\sqrt{\mu_0^2 + \pi_0^2}} = \sin \varphi,$$

wo φ den Winkel der einfallenden Wellennormale N_e mit dem Lothe auf der ersten Prismenfläche N_0 bezeichnet, d. h. den Einfallswinkel.

Unter Rücksicht auf die Gl. (1) folgt aus (2):

$$\left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{\alpha_0}} - \mu_2 \cos \gamma \right)^2 = \pi_1^2 \sin^2 \gamma = \left(\frac{1}{\alpha_1} - \mu_2^2 \right) \sin^2 \gamma,$$

Fig. 1.

$$\text{d. h. (3)} \quad \mu_2^2 - 2 \cos \gamma \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\alpha_0}} \mu_2 + \frac{\sin^2 \varphi}{\alpha_0} - \frac{\sin^2 \gamma}{\alpha_1} = 0.$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich μ_2 , wenn φ bekannt ist, und da $\pi_2^2 = 1/\alpha_2 - \mu_2^2$ ist, so ist in dem Problem alles durch φ und γ ausgedrückt, d. h. dasselbe ist gelöst.

Setzt man:

$$(4) \quad \mu_2 = m_2 - i m_2', \quad \pi_2 = p_2 - i p_2',$$

so wird die Lichtbewegung im Medium 2 dargestellt durch den reellen Theil der Grösse:

$$A_2 e^{-\frac{m_2' x + p_2' z}{\tau}} e^{\frac{i}{\tau} (t - (m_2 x + p_2 z))}.$$

Aus der Gl. (3) folgt ein complexer Werth von μ_2 . Es ist daher m_2' von Null verschieden. Dies ist auf den ersten Anblick überraschend, da man hiernach an eine Absorption im Medium 2 denken sollte. Indess ist dies nicht der Fall. Die Wellennormale N_d im Medium 2 hat die Richtungscosinus $m_2/\sqrt{m_2^2 + p_2^2}$ gegen die x -Axe, $p_2/\sqrt{m_2^2 + p_2^2}$ gegen die z -Axe. Wenn man daher auf N_d um das Stück ρ fortschreitet, so ändert sich der Exponent von e um die Grösse:

$$-\frac{m_2 m_2' + p_2 p_2'}{\tau \sqrt{m_2^2 + p_2^2}} \rho.$$

Diese hat aber den Werth Null, weil $\mu_2^2 + \pi_2^2$ eine reelle Grösse ist, d. h. die Lichtwelle pflanzt sich mit längs ihrer Wellennormalen constanter Amplitude fort; letztere variirt aber in der Wellenebene.¹⁾

Nennt man den Austrittswinkel der Wellennormale, d. h. den Winkel zwischen N_d und der Normale N_2 der zweiten Prismenfläche, welche ja die z -Axe ist, φ' , so ist:

$$(5) \quad \sin \varphi' = \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 + p_2^2}}.$$

Wir wollen jetzt die Formeln für den Fall specialisiren, dass der Prismenwinkel γ sehr klein ist. Dieser Fall ist in praxi stets erfüllt, weil die Prismen sonst nicht durchsichtig sind.

In der Formel (3) kann daher γ^2 für $\sin^2 \gamma$ gesetzt werden, für $\cos \gamma$ muss man bis zu γ^2 in der Entwicklung gehen,

1) Cf. W. Voigt, l. c. p. 153.

weil Glieder der Ordnung γ^2 in (3) auftreten. In dem Coefficienten $2 \sin \varphi / \sqrt{\alpha_0} \cdot \mu_2$ von dem Gliede γ^2 kann man aber unbedenklich denjenigen Näherungswerth von μ_2 einführen, welcher sich für $\gamma=0$ ergibt. Es ist dies $\mu_2 = \sin \varphi / \sqrt{\alpha_0}$. Gl. (3) wird daher:

$$(6) \quad \left(\mu_2 - \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\alpha_0}} \right)^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sin^2 \varphi \right), \quad \text{oder:}$$

$$\mu_2 = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\alpha_0}} - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha_1}} \sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sin^2 \varphi}.$$

Die Wurzel, mit welcher γ multiplicirt ist, ist positiv zu nehmen, wie sich aus dem Sinne ergibt, in welchem φ positiv gerechnet ist (cf. die Fig. 1 auf p. 667).

Setzt man:

$$(7) \quad \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\alpha_1}} = a + b i,$$

so ist nach (4) und (6):

$$(8) \quad m_2 = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\alpha_0}} - a \gamma, \quad m_2' = b \gamma.$$

Nach (1) und (4) ist nun:

$$p_2^2 - p_2'^2 = \frac{1}{\alpha_2} - (m_2^2 - m_2'^2), \quad p_2 p_2' = m_2 m_2'.$$

Für p_2^2 erhält man daher eine quadratische Gleichung durch Elimination von p_2' aus diesen beiden Gleichungen. Berücksichtigt man nur diejenige Wurzel der quadratischen Gleichung, welche positives p_2^2 , d. h. reelles p_2 liefert, so erhält man:

$$2p_2^2 = \frac{1}{\alpha_2} - m_2^2 + m_2'^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_2} - m_2^2 - m_2'^2 \right)^2 + \frac{4m_2'^2}{\alpha_2}}.$$

Der Ausdruck $1/\alpha_2 - m_2^2 - m_2'^2$ ist nun im allgemeinen gross gegen m_2' . Nur für solche Einfallswinkel φ sind beide Ausdrücke von gleicher Grössenordnung, für welche ist:

$$\sin^2 \varphi = \frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \frac{n_2^2}{n_0^2},$$

d. h. für den Grenzwinkel der Totalreflexion an dem Medium 2. In den unten zu berechnenden Versuchen ist $n_0 = n_2$ zu setzen. Für nahezu streifende Incidenz würden daher jene beiden Ausdrücke gleiche Grössenordnung erhalten.

Indess müssen bei der Kleinheit der noch die Durchsicht gestattenden Prismenwinkel γ die Einfallswinkel sehr nahe an 90° fallen, damit beide Ausdrücke vergleichbar werden. Bei den zu berechnenden Versuchen ist γ kleiner als $15''$. Für $\varphi = 87^\circ$ würde sein bei den untersuchten Metallen:

$$\left(\frac{1}{\alpha_2} - m_2^2 - m_2'^2\right)^2 = 10^{-6}, \quad \frac{4m_2'^2}{\alpha_2} = 0,2 \cdot 10^{-6},$$

daher ist der letztere Ausdruck unbedenklich gegen den ersteren zu vernachlässigen, wenn man eben Einfallswinkel ausschliesst, die sich der streifenden Incidenz, resp. dem Winkel der Totalreflexion um mehr als 3° nähern.

Unter dieser Voraussetzung wird:

$$p_2^2 = \frac{1}{\alpha_2} - m_2^2,$$

und nach (5):

$$(9) \quad \sin \varphi' = m_2 \sqrt{\alpha_2} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{n_0}{n_2} \left(\sin \varphi - \frac{\alpha \gamma}{n_0} \right).$$

Die Grösse α ist durch die Gl. (7) definirt. Die dort auftretende complexe Grösse α_1 , welche die optische Natur des Metalles angibt, ist nun bei allen Metallen so klein, dass das Quadrat ihres Moduls gegen 1 vernachlässigt werden kann. Es ist also zu setzen:

$$a + bi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sin^2 \varphi \right),$$

d. h. nach der Bedeutung von $\sqrt{\alpha_1}$ nach p. 666:

$$a = n \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \frac{n_0^2}{n^2 (1 + \kappa^2)} \right)$$

und nach (9):

$$(10) \quad \sin \varphi' = \frac{n_0}{n_2} \left\{ \sin \varphi - \gamma \frac{n}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \frac{n_0^2}{n^2 (1 + \kappa^2)} \right) \right\}.$$

Wir erhalten einen Ausdruck für φ' , wie er aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz folgen würde, ein Gesetz, welches Gültigkeit hätte, falls κ Null wäre, wenn man in dem nach Gl. (7) definirten Ausdruck für a den Werth von α_1 reell annimmt, d. h. $\kappa = 0$ setzt und diesen Werth von a in (9) substituirt. Es würde folgen:

$$(10') \quad (\sin \varphi') = \frac{n_0}{n_2} \left\{ \sin \varphi - \gamma \frac{n}{n_0} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \frac{n_0^2}{n^2}} \right\}.$$

Da man (10) auch schreiben kann:

$$(10'') \quad \sin \varphi' = \frac{n_0}{n_2} \left\{ \sin \varphi - \gamma \frac{n}{n_0} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \frac{n_0^2}{n^2(1+x^2)}} \right\},$$

so sieht man, dass durch Wirkung der Absorption das Licht mehr von der brechenden Kante des Prismas weg — gebrochen wird, d. h. dass für $n > n_0$ die Ablenkung des Lichtstrahles verstärkt wird.

In den genannten Versuchen von Du Bois und Rubens fiel das Licht nicht direct auf die Metallkeile, sondern durchsetzte zunächst eine Glasplatte. Auf derselben war ein Metaldoppelkeil niedergeschlagen, dessen Prismenwinkel γ_1 und γ_2 sein mögen; direct gemessen war der Einfallswinkel in Luft (i), die Summe der Prismenwinkel

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \beta,$$

und die Richtungs-
differenz α der austretenden Lichtstrahlen.

Fig. 2.

Führt man in der

Gl. (10) den Einfallswinkel i in Luft ein an Stelle des Einfallswinkels φ in Glas, so wird dieselbe:

$$(11) \quad \sin \varphi' = \sin i - \gamma n_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 i}{n_1^2(1+x^2)} \right),$$

wo unter n_1 der Brechungsexponent des Metalles gegen Luft verstanden ist.

Nennt man die Austrittswinkel des Lichtes an beiden Metallprismen resp. φ_1' und φ_2' , so ist:

$$\sin \varphi_1' = \sin i - \gamma_1 n_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 i}{n_1^2(1+x^2)} \right),$$

$$\sin \varphi_2' = \sin i + \gamma_2 n_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 i}{n_1^2(1+x^2)} \right).$$

Setzt man $\varphi_1' = i + \varepsilon_1$, $\varphi_2' = i + \varepsilon_2$, wo ε kleine Winkel sind, für deren cos man 1 setzen kann, so ist:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1' &= \sin i + \varepsilon_1 \cos i, & \sin \varphi_2' &= \sin i + \varepsilon_2 \cos i, \\ \text{d. h.} \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \varphi_1' - \varphi_2' = \frac{\sin \varphi_1' - \sin \varphi_2'}{\cos i} \\ &= -\frac{\beta n_1}{\cos i} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 i}{n_1^2 (1 + \kappa^2)} \right). \end{aligned}$$

Die Richtungsdivergenz α der beiden austretenden Wellennormalen ist offenbar gegeben durch:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi_2' - \varphi_1' - \beta, & \text{daher:} \\ (12) \quad \alpha + \beta &= \frac{\beta n_1}{\cos i} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 i}{n_1^2 (1 + \kappa^2)} \right). \end{aligned}$$

Nach dem Snellius'schen Gesetz würde die entsprechende Formel lauten:

$$(\alpha + \beta) = \frac{\beta n_1}{\cos i} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_1^2}}.$$

Man sieht, dass die hiernach aus i und β berechneten Werthe für α zu klein ausfallen müssen, und zwar um so mehr, je kleiner n_1 ist. Du Bois und Rubens haben in der That eine Abweichung in diesem Sinne vom Snellius'schen Brechungsgesetz gefunden, und zwar von den drei untersuchten Metallen: Eisen, Kobalt und Nickel am stärksten bei letzterem, welches auch den kleinsten Brechungsexponenten besitzt.

Infolge des beträchtlichen Werthes, welchen $n_1^2(1 + \kappa^2)$ bei diesen Metallen besitzt, lässt sich die Formel (12) noch dadurch vereinfachen, dass man das jene Grösse im Nenner enthaltende Glied ganz fortlässt. Es wird dadurch höchstens ein Fehler von $2^{1/2}$ Proc. herbeigeführt, und zwar erreicht er diesen Betrag nur beim Nickel, für welches $n^2(1 + \kappa^2)$ am kleinsten ist (für rothes Licht ca. 16), und auch dort nur für den grössten, bei den Untersuchungen angewandten Einfallswinkel ($\varphi = 65^\circ$). Die Formel (12) schreibt sich dann:

$$(13) \quad \alpha + \beta = n_1 \frac{\beta}{\cos i}.$$

In der folgenden Tabelle stelle ich die nach dieser Formel berechneten Werthe mit den von den Herren Du Bois und Rubens beobachteten zusammen. Es ist so verfahren, dass für n_1 zunächst der Mittelwerth der sich aus den Einzelbeobachtungen nach Formel (13) berechneten Werthen ange-

nommen wurde (er ist neben die Namen der Metalle gesetzt), und dann mit Hülfe dieses Mittelwerthes die Ablenkungen α zurückberechnet wurden.

Eisen. $n_1 = 3,01$.

i	0°	30°	40°	50°	55°	60°	65°
α beob.	51,7''	66,7	73,3	98,5	107,3	125,7	153,9
α ber.	51,7	68,8	75,3	94,6	108,9	129,0	156,7

Cobalt. $n_1 = 3,18$.

α beob.	47,0	61,2	72,2	95,1	113,0	124,0	152,4
α ber.	51,0	62,5	73,6	92,2	106,1	125,3	152,4

Nickel. $n_1 = 1,91$.

α beob.	27,3	31,3	36,8	51,0	61,2	84,4	114,4
α ber.	25,2	33,3	41,3	54,6	64,7	75,5	97,7

Die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen ist eine sehr gute, sodass die Formel (13) als durch den Versuch bestätigt anzusehen ist.

Die nach (13) berechneten Mittelwerthe von n_1 weichen nur wenig ab von denjenigen Werthen, welche Du Bois und Rubens aus den Beobachtungen unter kleineren Einfallswinkeln bei Zugrundelegung der gewöhnlichen Brechungsförmel gefunden haben.

Da die Formel (13) durch die Beobachtungen vollaus bestätigt wird, wodurch man in den Stand gesetzt ist, auch bei schiefe Einfall den Brechungsexponenten streng zu berechnen, so empfiehlt sich, zu seiner Bestimmung die Brechung bei schiefe Einfall zu beobachten, wie die Herren Du Bois und Rubens vorschlugen, weil dadurch die Ablenkungen vergrössert werden. Es ist allerdings dabei nicht ausser acht zu lassen, dass kleine Unebenheiten des Prismas dann auch grössere Fehler in α hervorrufen.

Bei Anwendung der Formel (13) ist jedesmal zu prüfen, ob $n^2(1 + \kappa^2)$ für das betreffende Metall genügend gross ist. Wenn dies auch für die bei weitem meisten zutrifft, so gibt es doch einige Ausnahmen, z. B. Kupfer und Gold. Für diese Metalle ist die strengere Formel (12) anzuwenden.

Göttingen, November 1890.