Über die Lösung des Grundproblem^{es} der Elastizitätstheorie.

Von

ARTHUR KORN in Charlottenburg.

Die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie habe ich mit Hilfe der Methode der sukzessiven Näherungen zum ersten Male im Jahre 1906*) gegeben; ich habe seitdem die bei dieser Lösung benützten Hilfsmittel teils zum Zwecke einfacherer und eleganterer Behandlung der Probleme der Elastizitätstheorie, teils zum Zwecke der Lösung neuer Aufgaben erweitert und für den Gebrauch geeigneter gemacht.**)

Ich will in dieser Abhandlung zeigen, wie einfach (mit Rücksicht auf die Schwierigkeit des Problems) sich nunmehr — nach der Zurechtlegung jener Hilfsmittel — die Lösung des „Grundproblem^{es} der Elastizitätstheorie“ gestaltet.

Ich bezeichne dabei als „Grundproblem der Elastizitätstheorie“, auf welches sich nicht bloß die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, sondern auch z. B. das biharmonische Problem und das erste Randwertproblem in der Theorie der stationären Strömungen mit Reibung begabter Flüssigkeiten zurückführen läßt, die folgende Aufgabe:

Wir suchen drei Potentialfunktionen***) u, v, w eines Raumgebietes τ †), welche bei Benützung der Abkürzungen:

*) A. Korn, Abhandlungen zur Elastizitätstheorie I. Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche. Münch. Ber. 36, S. 37, 1906.

**) Man vgl. z. B. Ann. Ec. Norm. (3) 24, S. 9, 1907; 25, S. 529, 1908; Krakauer Anz. 1907, S. 837; Rend. Circ. Mat. Palermo 25, S. 253, 1908; 30, S. 138, 336, 1910; Acta Math. 32, S. 26, 1909; Compt. Rend. 151, S. 50, 299, 1910; 155, S. 1605, 1912.

***) Wir verstehen unter Potentialfunktionen des Gebietes τ solche Funktionen der Stelle (x, y, z) des Gebietes, welche in demselben mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind und der Laplaceschen Differentialgleichung genügen. Man vgl. Ann. * S. 536.

†) Wir setzen die Oberfläche ω von τ als im Endlichen geschlossen und stetig

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

an der Oberfläche ω die folgenden Grenzbedingungen erfüllen:

$$(1) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = \frac{\kappa}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} \right\} + F_1(x, y, z), \\ v(x, y, z) = \frac{\kappa}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} \right\} + F_2(x, y, z), \\ w(x, y, z) = \frac{\kappa}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} \right\} + F_3(x, y, z). \end{cases}$$

Dabei bezeichne κ eine gegebene Zahl, F_1, F_2, F_3 drei gegebene Funktionen der Stelle (x, y, z) der Oberfläche ω , welche mit ihren ersten Ableitungen stetig sind und (im allgemeinen) stetige zweite Ableitungen besitzen.

An Stelle der Voraussetzungen über die zweiten Ableitungen genügt es für die Zwecke der vorliegenden Abhandlung, über die Stetigkeit der ersten Ableitungen eine Höldersche Bedingung vorzusetzen, die Bedingung, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Oberfläche im Abstände r_{12} :

$$|D_1 F_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 F_j(x_1, y_1, z_1)| \leq A r_{12}^{\bar{\omega}}, \quad (j=1, 2, 3),$$

wenn A eine endliche Konstante, $\bar{\omega}$ eine positive Zahl > 0 bezeichnet, und wenn wir unter $D_1 F_j$ irgend eine der ersten Ableitungen von F_j ($j=1, 2, 3$) verstehen.

Mit r bezeichnen wir stets die Entfernung und Richtung:

$$d\tau \rightarrow \text{einem variablen Punkte } (x, y, z)$$

bzw. bei Integralen über die Oberfläche ω die Entfernung und Richtung:

$$d\omega \rightarrow \text{einem variablen Punkte } (x, y, z).$$

In den Raumintegralen der Formeln (1) sind unter

$$u, v, w$$

die Werte dieser Funktionen an den Stellen der Raumelemente $d\tau$ zu verstehen.

gekrümmt voraus, d. h. wir setzen voraus, daß die Richtungskosinus der inneren Normalen

$$\cos(vx), \quad \cos(vy), \quad \cos(vz),$$

als Funktionen der Stelle (ξ, η, ζ) der Oberfläche ω betrachtet, eindeutig und stetig sind und (im allgemeinen) eindeutige und stetige erste Ableitungen besitzen.

Diese Aufgabe, welche wir auch in der Form:

$$(1') \quad \begin{cases} u(x, y, z) = \lambda \left\{ -u(x, y, z) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} \right\} + f_1(x, y, z), \\ v(x, y, z) = \lambda \left\{ -v(x, y, z) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} \right\} + f_2(x, y, z), \\ w(x, y, z) = \lambda \left\{ -w(x, y, z) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} \right\} + f_3(x, y, z) \end{cases}$$

(an ω) schreiben können, wenn wir

$$(1'') \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \\ F_1 = \frac{f_1}{1+\lambda}, \quad F_2 = \frac{f_2}{1+\lambda}, \quad F_3 = \frac{f_3}{1+\lambda} \end{cases}$$

setzen*), soll in dieser Abhandlung vollständig gelöst werden; die aus der Lösung sich ergebenden Resultate stelle ich in dem letzten Abschnitte übersichtlich zusammen.

I. Abschnitt.

Die zu benützenden Hilfssätze aus der Potentialtheorie.

§ 1.

Hilfssatz 1. Es sei $\bar{\theta}$ eine gegebene, eindeutige und stetige Funktion der Stelle (x, y, z) der Oberfläche ω , und zwar genüge ihre Stetigkeit einer Hölderschen Bedingung:

$$(2) \quad |\bar{\theta}(x_2, y_2, z_2) - \bar{\theta}(x_1, y_1, z_1)| \leq A r_{12}^{\bar{\omega}}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} , wenn A eine endliche Konstante und $\bar{\omega}$ einen echten Bruch darstellt; es sei θ die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für das Innengebiet τ der Fläche ω mit den Randwerten $\bar{\theta}$ an ω ; dann genügt die Stetigkeit der Funktion $\theta(x, y, z)$ in ganzer Erstreckung des Innengebietes τ der Bedingung:

$$(3) \quad |\theta(x_2, y_2, z_2) - \theta(x_1, y_1, z_1)| \leq c A r_{12}^{\bar{\omega}}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} , wenn c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von $\bar{\omega}$ abhängt.

*) Der Fall $\lambda = -1$, bzw. $\lim \lambda = -1$ bedarf dabei natürlich einer besonderen Behandlung.

Hilfssatz 2. Besitzen die Randwerte $\bar{\theta}$ einer Potentialfunktion θ des Gebietes τ an der Oberfläche derart stetige erste Ableitungen $D_1 \bar{\theta}$, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} :

$$(4) \quad |D_1 \bar{\theta}(x_2, y_2, z_2) - D_1 \bar{\theta}(x_1, y_1, z_1)| \leq A r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wo A eine endliche Konstante und $\bar{\omega}$ einen echten Bruch vorstellt, dann gilt in ganzer Erstreckung des Gebietes τ für die Stetigkeit der ersten Ableitungen $D_1 \theta$ der Potentialfunktion θ die Beziehung:

$$(5) \quad |D_1 \theta(x_2, y_2, z_2) - D_1 \theta(x_1, y_1, z_1)| \leq c(A + M) r_{12}^{\bar{\omega}}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} , wenn M eine obere Grenze der $|D_1 F|$ und c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von $\bar{\omega}$ abhängt.

Hilfssatz 3. Das Potential einer Doppelbelegung der Fläche ω :

$$(6) \quad W(x, y, z) = \int_{\omega} \kappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

über deren Dichtigkeit κ wir lediglich voraussetzen, daß sie eine (im allgemeinen) stetige Funktion der Stelle der Fläche ω ist, besitzt auf der Fläche ω Werte:

$$(7) \quad W_{\omega} = \frac{1}{2} (W_a + W_i)^*,$$

deren Stetigkeit für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} der Bedingung genügt:

$$(8) \quad |W_{\omega}(x_2, y_2, z_2) - W_{\omega}(x_1, y_1, z_1)| \leq cM |\kappa| r_{12}^{\Pi},$$

wo Π einen beliebigen echten Bruch, c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Π abhängt; mit $M|\kappa|$ bezeichnen wir eine obere Grenze der absoluten Werte von κ , sodaß

$$(8') \quad |\kappa| \leq M|\kappa|, \quad |W_{\omega}| \leq cM|\kappa|.$$

Hilfssatz 4. Das Potential einer Doppelbelegung der Fläche ω :

$$(9) \quad W(x, y, z) = \int_{\omega} \kappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

über deren Dichtigkeit κ wir die Stetigkeitsvoraussetzung:

$$(10) \quad |\kappa(x_2, y_2, z_2) - \kappa(x_1, y_1, z_1)| \leq A r_{12}^{\bar{\omega}}$$

*) Indem wir unter W_a bzw. W_i die Randwerte von W an der äußeren bzw. inneren Seite von ω verstehen.

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} machen, wobei wir unter A eine endliche Konstante, unter ϖ einen echten Bruch verstehen, besitzt auf der Oberfläche ω Werte

$$(11) \quad W_{\omega} = \frac{1}{2} (W_a + W_i),$$

deren erste Ableitungen $D_1 W_{\omega}$ derart auf der Fläche stetig sind, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} :

$$(12) \quad |D_1 W_{\omega}(x_2, y_2, z_2) - D_1 W_{\omega}(x_1, y_1, z_1)| \leq c A r_{12}^{\varpi},$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt.

Hilfssatz 5. Das Raumpotential:

$$(13) \quad V(x, y, z) = \int_{\tau} E \frac{d\tau}{r},$$

von dessen Dichtigkeit E man lediglich voraussetzt, daß sie in dem Gebiete eine (im allgemeinen) stetige Funktion der Stelle sei, besitzt in ganzer Erstreckung des Gebietes τ erste Ableitungen $D_1 V$, welche derart stetig sind, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} :

$$(14) \quad |D_1 V(x_2, y_2, z_2) - D_1 V(x_1, y_1, z_1)| \leq c M |E| r_{12}^H,$$

wo Π einen beliebigen echten Bruch, c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Π abhängt. Mit $M|E|$ bezeichnen wir eine obere Grenze der absoluten Werte von E , sodaß

$$(14') \quad |E| \leq M|E|, \quad |D_1 V| \leq c M |E|.$$

Hilfssatz 6. Das Raumpotential:

$$(15) \quad V(x, y, z) = \int_{\tau} E \frac{d\tau}{r},$$

über dessen Dichtigkeit E man die Stetigkeitsvoraussetzung macht, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} :

$$(16) \quad |E(x_2, y_2, z_2) - E(x_1, y_1, z_1)| \leq A r_{12}^{\varpi},$$

wo A eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch vorstellt, besitzt in ganzer Erstreckung des Gebietes τ derart stetige zweite Ab-

leitungen $D_2 V$, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} :

$$(17) \quad |D_2 V(x_2, y_2, z_2) - D_2 V(x_1, y_1, z_1)| \leq c(A + M|E|)r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und $\bar{\omega}$ abhängt.

Für die absoluten Werte der zweiten Ableitungen von V gilt bei den Voraussetzungen dieses Hilfssatzes die Ungleichheitsbedingung:

$$(17') \quad |D_2 V| \leq \varepsilon A + \frac{c}{\varepsilon} M|E|,$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von $\bar{\omega}$ abhängt, ε eine beliebige, im übrigen beliebige kleine, positive Zahl.

In bezug auf diese Hilfssätze verweise ich auf die beiden ersten Kapitel (S. 12—30) meiner Abhandlung „Sur les équations de l'élasticité“, Ann. Ec. Norm. (3) 24, 1907.

§ 2.

Hilfssatz 7a. Es sei $\bar{\theta}$ eine gegebene, eindeutige und stetige Funktion der Stelle der Fläche ω , und zwar genüge ihre Stetigkeit einer Hölderschen Bedingung:

$$(18) \quad |\bar{\theta}(x_2, y_2, z_2) - \bar{\theta}(x_1, y_1, z_1)| \leq A r_{12}^{\bar{\omega}}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} , wo A eine endliche Konstante und $\bar{\omega}$ einen echten Bruch vorstellt; es sei θ die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für das Innengebiet τ von ω bei den Randwerten $\bar{\theta}$ an ω . Wir bilden das Raumpotential:

$$(19) \quad V(x, y, z) = \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}$$

und an der Oberfläche ω die Werte:

$$(20) \quad \psi = \bar{\theta} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left| \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \right|_i^* + \left| \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \right|_a \right\} \equiv \bar{\theta} + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \right|_{i+a},$$

* Unter n verstehen wir die innere Normale in einem Punkte (x, y, z) der Oberfläche und schreiben zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cos^2(nx) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cos^2(ny) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cos^2(nz) + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \cos(ny) \cos(nz) \\ &+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \cos(nz) \cos(nx) + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos(nx) \cos(ny). \end{aligned}$$

dann ist:

$$(21) \quad |\psi| \leq a M |\bar{\theta}|,$$

wo a eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt, $M|\bar{\theta}|$ eine obere Grenze der absoluten Werte von $\bar{\theta}$, sodaß:

$$|\bar{\theta}| \leq M |\bar{\theta}|,$$

und die Funktion ψ ist auf der Oberfläche ω derart stetig, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} :

$$(22) \quad |\psi(x_2, y_2, z_2) - \psi(x_1, y_1, z_1)| \leq \left\{ \varepsilon A + \frac{c}{\varepsilon} M |\bar{\theta}| \right\} r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wenn c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von $\bar{\omega}$ abhängt, ε eine beliebige, im übrigen beliebig kleine positive Zahl.

Hilfssatz 7b. Es seien $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ drei gegebene, eidentige und stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω , und zwar genüge ihre Stetigkeit Hölderschen Bedingungen:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}(x_2, y_2, z_2) - \bar{u}(x_1, y_1, z_1)| \\ |\bar{v}(x_2, y_2, z_2) - \bar{v}(x_1, y_1, z_1)| \\ |\bar{w}(x_2, y_2, z_2) - \bar{w}(x_1, y_1, z_1)| \end{array} \right\} \leq A r_{12}^{\bar{\omega}}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} , wo A eine endliche Konstante und $\bar{\omega}$ einen echten Bruch vorstellt; es seien u , v , w die Lösungen der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für das Innengebiet τ von ω bei den Randwerten $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ an ω . Wir bilden die Raumpotentiale:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r}, \\ V_2 = \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r}, \\ V_3 = \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} \end{array} \right.$$

und an der Oberfläche ω die Werte:

$$(25) \quad u_v = \bar{u} \cos(vx) + \bar{v} \cos(vy) + \bar{w} \cos(vz),$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1(x, y, z) &= \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} u_r \frac{d\omega}{r} \right|_i \\ &- \left\{ \cos(nx) \left| \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial n} \right|_{i+a} + \cos(ny) \left| \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial n} \right|_{i+a} + \cos(nz) \left| \frac{\partial^2 V_3}{\partial x \partial n} \right|_{i+a} \right\}, \\ \psi_2(x, y, z) &= \left| \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} u_r \frac{d\omega}{r} \right|_i \\ &- \left\{ \cos(nx) \left| \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial n} \right|_{i+a} + \cos(ny) \left| \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \partial n} \right|_{i+a} + \cos(nz) \left| \frac{\partial^2 V_3}{\partial y \partial n} \right|_{i+a} \right\}, \\ \psi_3(x, y, z) &= \left| \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} u_r \frac{d\omega}{r} \right|_i \\ &- \left\{ \cos(nx) \left| \frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial n} \right|_{i+a} + \cos(ny) \left| \frac{\partial^2 V_2}{\partial z \partial n} \right|_{i+a} + \cos(nz) \left| \frac{\partial^2 V_3}{\partial z \partial n} \right|_{i+a} \right\}; \end{aligned} \right.$$

dann ist:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} |\psi_1| \\ |\psi_2| \\ |\psi_3| \end{aligned} \right\} \leq a M(|\bar{u}|, |\bar{v}|, |\bar{w}|),$$

wo a eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt, $M(|\bar{u}|, |\bar{v}|, |\bar{w}|)$ eine obere Grenze der absoluten Werte von $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, sodaß:

$$\left\{ \begin{aligned} |\bar{u}| \\ |\bar{v}| \\ |\bar{w}| \end{aligned} \right\} \leq M(|\bar{u}|, |\bar{v}|, |\bar{w}|),$$

und die Funktionen ψ_1, ψ_2, ψ_3 sind auf der Oberfläche ω derartig stetig, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} |\psi_1(x_2, y_2, z_2) - \psi_1(x_1, y_1, z_1)| \\ |\psi_2(x_2, y_2, z_2) - \psi_2(x_1, y_1, z_1)| \\ |\psi_3(x_2, y_2, z_2) - \psi_3(x_1, y_1, z_1)| \end{aligned} \right\} \leq \left\{ \varepsilon A + \frac{c}{\varepsilon} M(|\bar{u}|, |\bar{v}|, |\bar{w}|) \right\} r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wenn c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von $\bar{\omega}$ abhängt, ε eine beliebige, im übrigen beliebige kleine positive Zahl. —

Den Beweis des Hilfssatzes 7a habe ich in meiner oben zitierten Abhandlung „Sur les équations de l'élasticité“, Ann. Ec. Norm. (3) 24,

1907, S. 31—40 ausführlich gegeben*); der Beweis des Hilfssatzes 7b ist einigermaßen analog; man erkennt dies leicht, und man kann so die Beweise der beiden Hilfssätze zusammenfassen, indem man mit Hilfe der Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen die folgenden Formeln für den Fall beweist, daß die Fläche ω eine Kugel vom Radius R ist:

$$(29) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial n} \right|_{i+a} = \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{d\omega}{r} \right|_i + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2}{R} \cos(nx) \frac{\partial V}{\partial n}, \\ \left| \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial n} \right|_{i+a} = \left| \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{d\omega}{r} \right|_i + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{R} \cos(ny) \frac{\partial V}{\partial n}, \\ \left| \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial n} \right|_{i+a} = \left| \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{d\omega}{r} \right|_i + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{2}{R} \cos(nz) \frac{\partial V}{\partial n}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich einerseits:

$$(30) \quad \psi = \bar{\theta} + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{d\omega}{r} \right|_i - \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial V}{\partial n},$$

andererseits, wenn man die Formeln für V_1 , für V_2 und für V_3 bildet und die so entstehenden Formeln bzw. mit

$$\cos(nx), \quad \cos(ny), \quad \cos(nz)$$

multipliziert und addiert:

$$\begin{aligned} & \cos(nx) \left| \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial n} \right|_{i+a} + \cos(ny) \left| \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial n} \right|_{i+a} + \cos(nz) \left| \frac{\partial^2 V_3}{\partial x \partial n} \right|_{i+a} \\ &= \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial V_2}{\partial x} \cos(ny) + \frac{\partial V_3}{\partial x} \cos(nz) \right\} \\ & - \frac{2 \cos(nx)}{R} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial n} \cos(nx) + \frac{\partial V_2}{\partial n} \cos(ny) + \frac{\partial V_3}{\partial n} \cos(nz) \right\} \\ & + \cos(nx) \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{u} \frac{d\omega}{r} \right|_i + \cos(ny) \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{v} \frac{d\omega}{r} \right|_i + \cos(nz) \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{w} \frac{d\omega}{r} \right|_i, \end{aligned}$$

und die beiden entsprechenden Formeln; also:

$$(31) \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{\omega} \bar{u} (\cos(vx) - \cos(nx)) \frac{d\omega}{r} + \int_{\omega} \bar{v} (\cos(vy) - \cos(ny)) \frac{d\omega}{r} \right. \\ \quad \left. + \int_{\omega} \bar{w} (\cos(vz) - \cos(nz)) \frac{d\omega}{r} \right\} \\ \quad - \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial V_2}{\partial x} \cos(ny) + \frac{\partial V_3}{\partial x} \cos(nz) \right\} \\ \quad + \frac{2 \cos(nx)}{R} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial n} \cos(nx) + \frac{\partial V_2}{\partial n} \cos(ny) + \frac{\partial V_3}{\partial n} \cos(nz) \right\}, \end{cases}$$

*) Formal geht der Hilfssatz 7a in den dort bewiesenen Satz III über, wenn man bedenkt, daß

$$\bar{\theta} + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \right|_{i+a} = - \left\{ \bar{\theta} - \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \right|_a \right\}.$$

analog ψ_2 und ψ_3 . Bedenkt man, daß Integrale von der Form

$$\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{d\omega}{r} \right|_i + \bar{\theta} = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{d\omega}{r} \right|_{i+a},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{u} \cdot (\cos(vx) - \cos(nx)) \frac{d\omega}{r}, \dots \quad \text{an } \omega,$$

genau wie die Integrale

$$\left| \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{\cos(rv)}{r^2} d\omega \right|_{i+a}$$

(nach Hilfssatz 1) und wie die Integrale

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \dots, \frac{\partial V_1}{\partial x}, \dots$$

(nach Hilfssatz 5) die von den Funktionen ψ bzw. ψ_1, ψ_2, ψ_3 in den Formeln (21), (22) bzw. (27), (28) behaupteten Eigenschaften haben*), so erkennt man zunächst, daß die Behauptungen der Sätze 7a und 7b für den Fall richtig sind, daß die Fläche eine Kugel vom Radius R ist; die Verallgemeinerung der Sätze für beliebige, im Endlichen geschlossene, stetig gekrümmte Flächen ω folgt darauf Schritt für Schritt in derselben Weise, wie ich dies für die Funktion ψ in der oben zitierten Abhandlung „Sur les équations de l'élasticité“, Ann. Ec. Norm. (3) 24, 1907, S. 33—40 gezeigt habe.

§ 3.

Hilfssatz 8. Es seien

$$u_j, v_j, w_j \quad (j=0, 1, 2, \dots, p),$$

$p+1$ Tripel von Potentialfunktionen des Gebietes τ , und wir setzen die Stetigkeit der ersten Ableitungen dieser Funktionen derart voraus, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ in dem Abstände r_{12} :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta_j(x_2, y_2, z_2) - \theta_j(x_1, y_1, z_1)| \leq B_j r_{12}^{\bar{\omega}}; \\ |u_j(x_2, y_2, z_2) - u_j(x_1, y_1, z_1)| \\ |v_j(x_2, y_2, z_2) - v_j(x_1, y_1, z_1)| \\ |w_j(x_2, y_2, z_2) - w_j(x_1, y_1, z_1)| \end{array} \right\} \leq B_j r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wo die B_j Konstanten bedeuten, und $\bar{\omega}$ einen echten Bruch.

*) Ja, es kann für diese Funktionen in den für sie geltenden Hölderschen Stetigkeitsbeziehungen in den $\{ - \}$ der Beziehungen (32), (28) der Summand εA fortgelassen werden.

Wir setzen:

$$(33) \quad \begin{cases} u = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p, \\ v = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p, \\ w = \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p, \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} |\theta(x_2, y_2, z_2) - \theta(x_1, y_1, z_1)| \leq Br_{12}^{\bar{\omega}}, \\ |u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1)| \leq Br_{12}^{\bar{\omega}}, \dots, \end{cases}$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ reelle Konstanten sein mögen, welche der Gleichung:

$$(35) \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

genügen; wir definieren die drei Potentialfunktionen u', v', w' des Gebietes τ durch die Grenzbedingungen:

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= -u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r}, \\ v' &= -v + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r}, \\ w' &= -w + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega;$$

wir können stets die Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$$

so bestimmen, daß

$$(37) \quad \int_{\tau} \{ \theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2 \} d\tau \leq \varepsilon_p \int_{\omega} \{ \theta^2 + u^2 + v^2 + w^2 \} d\tau + \varepsilon'_p B^2,$$

wo ε_p und ε'_p positive Zahlen sind, welche man durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken kann, oder:

$$(38) \quad J' \leq \varepsilon_p J + \varepsilon'_p B^2,$$

wenn wir

$$(39) \quad \begin{cases} J = \int_{\tau} \{ \theta^2 + u^2 + v^2 + w^2 \} d\tau, \\ J' = \int_{\tau} \{ \theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2 \} d\tau \end{cases}$$

setzen. —

Zum Beweise teilen wir das Gebiet τ in m Teile, wo m die größte ganze Zahl $\leq \frac{p}{4}$ bedeuten möge, in solcher Weise, daß die größte Entfernung zweier in ein und demselben Teilgebiete gelegener Punkte

$$(40) \quad r_{12} \leq \frac{\alpha}{\sqrt[p]{p}}$$

wird, wo α eine endliche Konstante vorstelle, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt; wir bestimmen die Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$$

derart, daß die Gleichungen stattfinden:

$$(41) \quad \int_{\tau_i} \theta' d\tau = 0,$$

$$(42) \quad \int_{\tau_i} u' d\tau = \int_{\tau_i} v' d\tau = \int_{\tau_i} w' d\tau = 0,$$

für jedes der kleinen Teilgebiete τ_i ; es sind dies in der Tat p oder weniger lineare und homogene Gleichungen für die $p + 1$ Konstanten:

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p,$$

welche noch der Bedingung:

$$(43) \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

zu genügen haben; ihre Bestimmung ist also stets möglich.

Nach den Voraussetzungen und nach den Hilfssätzen 2 und 6 genügen die ersten Ableitungen von u' , v' , w' in τ derartigen Stetigkeitsbedingungen, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) von τ im Abstände r_{12} :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \\ |u'(x_2, y_2, z_2) - u'(x_1, y_1, z_1)| \\ |v'(x_2, y_2, z_2) - v'(x_1, y_1, z_1)| \\ |w'(x_2, y_2, z_2) - w'(x_1, y_1, z_1)| \end{array} \right\} \leq (c_1 M + c_2 B) r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche, positive Konstanten vorstellen, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von $\bar{\omega}$ abhängen, und wo wir mit M eine obere Grenze der absoluten Werte von

$$\theta, u, v, w$$

bezeichnen. Mit Rücksicht auf (41) und (42) ist für jeden Punkt (ξ, η, ζ) des Gebietes τ_i :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\tau_i} \int_{\tau_i} \{ \theta'(\xi, \eta, \zeta) - \theta'(x, y, z) \} d\tau, \\ u'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\tau_i} \int_{\tau_i} \{ u'(\xi, \eta, \zeta) - u'(x, y, z) \} d\tau, \dots, \end{array} \right.$$

folglich nach (40) und (44):

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta'| \\ |u'| \\ |v'| \\ |w'| \end{array} \right\} \leq (c_1 M + c_2 B) \left(\frac{\alpha}{\sqrt{p}} \right)^{\bar{\omega}},$$

somit:

$$(47) \quad \int_{\tau} \{ \theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2 \} d\tau \leq (C_1 M^2 + C_2 B^2) \frac{1}{\sqrt{p^2 \bar{\omega}}},$$

wo wieder C_1 und C_2 zwei endliche, positive Konstanten sind, welche lediglich von der Fläche ω und von $\bar{\omega}$ abhängen. Nun ist, da θ, u, v, w in dem Innengebiete τ von ω harmonische Funktionen sind, welche nach (32) einer Hölderschen Bedingung genügen*):

$$(48) \quad M \leq \frac{c'}{\sqrt{\rho^3}} \sqrt{\int_{\tau} (\theta^2 + u^2 + v^2 + w^2) d\tau} + B \rho^{\bar{\omega}},$$

wo c' einen endlichen Zahlenfaktor vorstellt und man unter ρ irgend eine, im übrigen beliebig kleine Länge verstehen kann. Setzt man dies in (47) ein, so ergibt sich eine Beziehung von der Form:

$$(49) \quad \int_{\tau} \{ \theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2 \} d\tau \leq \varepsilon \int_{\tau} \{ \theta^2 + u^2 + v^2 + w^2 \} d\tau + \varepsilon' B^2,$$

wo man die Größen ε und ε' dadurch, daß man zunächst ρ genügend klein und dann p genügend groß macht, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken kann.

Hilfssatz 9. Es seien u, v, w drei Potentialfunktionen des Gebietes τ ; wir setzen die Stetigkeit der ersten Ableitungen dieser Funktionen derart

*) Sei in der Tat (ξ, η, ζ) irgend ein Punkt der Oberfläche; wir konstruieren in demselben die innere Normale und auf derselben in einem genügend kleinen Abstände ρ den Punkt 0 so, daß die um 0 als Zentrum mit dem Radius ρ geschlossene Kugel ganz in dem Gebiete τ liegt, dann ist für jede Potentialfunktion φ von τ

$$\frac{4\pi}{3} \rho^3 \varphi(0) = \int \varphi d\tau \quad (\text{das Integral über die Kugel vom Radius } \rho \text{ zu erstrecken}),$$

und wenn allgemein für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) von τ im Abstand r_{12}

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \leq B r_{12}^{\bar{\omega}},$$

$$|\varphi(\xi, \eta, \zeta)| \leq B \rho^{\bar{\omega}} + \frac{3}{4\pi \rho^3} \int \varphi d\tau.$$

Hieraus folgt leicht die obige Ungleichheitsbedingung. (Man vgl. analoge Betrachtungen, Münch. Ber. 36, S. 375–376, 1906; Krakauer Anz. 1907, S. 847).

voraus, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta(x_2, y_2, z_2) - \theta(x_1, y_1, z_1)| \\ |u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1)| \\ |v(x_2, y_2, z_2) - v(x_1, y_1, z_1)| \\ |w(x_2, y_2, z_2) - w(x_1, y_1, z_1)| \end{array} \right\} \leq B r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wo B eine endliche Konstante und $\bar{\omega}$ einen echten Bruch vorstellt; wir definieren die drei Potentialfunktionen u', v', w' des Gebietes τ durch die Randwerte

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = -u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r}, \\ v' = -v + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r}, \\ w' = -w + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r}, \end{array} \right\} \text{ an } \omega;$$

dann ist für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} :

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \\ |u'(x_2, y_2, z_2) - u'(x_1, y_1, z_1)| \\ |v'(x_2, y_2, z_2) - v'(x_1, y_1, z_1)| \\ |w'(x_2, y_2, z_2) - w'(x_1, y_1, z_1)| \end{array} \right\} \leq \left\{ \frac{c}{1 + \frac{3}{\bar{\omega}}} \sqrt{\int_{\tau} (\theta^2 + u^2 + v^2 + w^2) d\tau} + \varepsilon B \right\} r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt und von dem echten Bruche $\bar{\omega}$, ε eine positive Zahl, welche man beliebig klein wählen kann. —

Zum Beweise bemerken wir, daß nach (51)

$$u' + u, \quad v' + v, \quad w' + w$$

die Potentialfunktionen des Gebietes τ sind, welche an ω die Randwerte:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r}, \dots$$

besitzen, und es ist

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} u' + u &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (u' + u) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + X_1, \\ v' + v &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (v' + v) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + X_2, \\ w' + w &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (w' + w) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + X_3, \end{aligned} \right\} \text{ in } \tau,$$

wobei nach den Hilfssätzen 5, 4, 2 die ersten Ableitungen

$$D_1 X_1, \quad D_1 X_2, \quad D_1 X_3$$

der Funktionen X_1, X_2, X_3 in τ derartig stetig sind, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) von τ im Abstände r_{12} :

$$(54) \quad |D_1 X_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 X_j(x_1, y_1, z_1)| \leq \frac{1}{2} C M r_{12}^{\Pi}, \quad (j=1, 2, 3),$$

wo Π einen beliebigen echten Bruch darstellt, C eine endliche Konstante, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von der Wahl des echten Bruches Π abhängt. Andererseits ist im ganzen Außenraume von ω :

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} &= - \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (u' + u) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + Y_1, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} &= - \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (v' + v) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + Y_2, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} &= - \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (w' + w) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + Y_3, \end{aligned} \right.$$

wobei wiederum in irgend einem ganz im Endlichen gelegenen, keinen Punkt von τ in seinem Inneren enthaltenden Gebiete die ersten Ableitungen

$$D_1 Y_1, \quad D_1 Y_2, \quad D_1 Y_3$$

der Funktionen Y_1, Y_2, Y_3 derart stetig sind, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} :

$$(56) \quad |D_1 Y_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 Y_j(x_1, y_1, z_1)| \leq \frac{1}{2} C M r_{12}^{\Pi}, \quad (j=1, 2, 3)$$

wobei wir den Größen C und Π dieselben Werte beilegen können, wie in (54).

Da*)

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} (u' + u) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_a = \left| \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} (u' + u) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_i,$$

*) Vgl. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 394 (Ferd. Dümmlers-Verlag, Berlin 1899).

so ergibt sich aus (54) und (55):

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{\partial(u' + u)}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial y \partial n_\tau} \int u \frac{d\tau}{r} \right|_a - \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n_\tau} \int v \frac{d\tau}{r} \right|_a \right\} + Z_1, \\ \frac{\partial(v' + v)}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial z \partial n_\tau} \int u \frac{d\tau}{r} \right|_a - \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n_\tau} \int w \frac{d\tau}{r} \right|_a \right\} + Z_2, \\ \frac{\partial(w' + w)}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n_\tau} \int v \frac{d\tau}{r} \right|_a - \left| \frac{\partial^2}{\partial y \partial n_\tau} \int u \frac{d\tau}{r} \right|_a \right\} + Z_3, \end{cases}$$

wenn wir unter Z_1, Z_2, Z_3 drei Funktionen der Stelle der Oberfläche ω verstehen, von solcher Stetigkeit, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} :

$$(58) \quad |Z_j(x_2, y_2, z_2) - Z_j(x_1, y_1, z_1)| \leq CM r_{12}^H \quad (j=1, 2, 3).$$

Da an der Oberfläche ω :

$$u' + u - \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int u \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int v \frac{d\tau}{r} \right\} = 0, \dots,$$

folgt:

$$(59) \quad \begin{cases} u' + u - \frac{1}{2\pi} \left\{ 4\pi u + \frac{\partial}{\partial x} \int u \frac{d\omega}{r} \right\} \\ = \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (w + w') - \frac{1}{2\pi} \left(\left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n_\tau} \int v \frac{d\tau}{r} \right|_i - \left| \frac{\partial^2}{\partial y \partial n_\tau} \int u \frac{d\tau}{r} \right|_i \right) \right\} \cos(ny) \\ - \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (v + v') - \frac{1}{2\pi} \left(\left| \frac{\partial^2}{\partial z \partial n_\tau} \int u \frac{d\tau}{r} \right|_i - \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n_\tau} \int w \frac{d\tau}{r} \right|_i \right) \right\} \cos(nz), \dots, \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf (57):

$$(60) \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n_\tau} \int v \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial n_\tau} \int u \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} \cos(ny) \\ + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial z \partial n_\tau} \int u \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial n_\tau} \int w \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} \cos(nz) \\ + u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int u \frac{d\omega}{r} + \Xi_1, \dots, \end{cases}$$

wo Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 drei Funktionen der Stelle der Fläche ω darstellen, deren Stetigkeit der Bedingung genügt:

$$(61) \quad |\Xi_j(x_2, y_2, z_2) - \Xi_j(x_1, y_1, z_1)| \leq 2CM r_{12}^H \quad (j=1, 2, 3),$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} .

Wir können (60) auch so schreiben:

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= u + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial n^2} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} + \Xi_1 + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial x_{\omega}} \int_{\omega} u \frac{d\omega}{r} \right|_i \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} \cos(nx) + \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} \cos(ny) \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} \cos(nz) \right\}, \dots, \end{aligned} \right.$$

oder unter Benützung der Hilfssätze 7a und 7b:

$$(63) \quad \begin{cases} u' = H_1, \\ v' = H_2, \\ w' = H_3, \end{cases}$$

wo H_1, H_2, H_3 drei Funktionen der Stelle der Fläche ω darstellen, deren Stetigkeit der Bedingung genügt:

$$(64) \quad |H_j(x_2, y_2, z_2) - H_j(x_1, y_1, z_1)| \leq \left(\varepsilon' B + \frac{b}{\varepsilon} M \right) r_{12}^{\varepsilon}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} , wo b eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ω abhängt, ε' irgend eine positive Zahl, die im übrigen beliebig klein gewählt werden kann.

Um die analoge Stetigkeitsbedingung für θ' abzuleiten, schreiben wir die Gleichungen (51) in der Form:

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} + \Phi, \\ v' &= v + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} + X, \\ w' &= w + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} + \Psi, \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega,$$

wo Φ, X, Ψ drei Potentialfunktionen des Gebietes ω vorstellen, die der Gleichung:

$$(66) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$$

genügen. In der Tat, bezeichnen wir mit Φ, X, Ψ die drei Potentialfunktionen des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$\Phi = -2u - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r}, \dots \text{ an } \omega,$$

so ist in dem ganzen Gebiete τ :

$$\Phi = -2u - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \varpi \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \vartheta \frac{d\tau}{r}, \dots,$$

und es folgt die Gleichung (66). Es sind also

$$u' - u - \Phi, \quad v' - v - X, \quad w' - w - \Psi$$

Potentialfunktionen des Gebietes τ , welche an ω die Randwerte:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}, \dots,$$

besitzen, und es ist entsprechend der Untersuchung (53)—(57):

$$(67) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial n} (u' - u - \Phi) = -\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right|_a + Z_1, \\ \frac{\partial}{\partial n} (v' - v - X) = -\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial y \partial n} \int_{\tau} \varpi \frac{d\tau}{r} \right|_a + Z_2, \\ \frac{\partial}{\partial n} (w' - w - \Psi) = -\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial z \partial n} \int_{\tau} \vartheta \frac{d\tau}{r} \right|_a + Z_3, \end{cases}$$

worin wir unter Z_1, Z_2, Z_3 drei Funktionen der Stelle der Fläche ω verstehen, deren Stetigkeit der Bedingung genügt:

$$(68) \quad |Z_j(x_2, y_2, z_2) - Z_j(x_1, y_1, z_1)| \leq CM r_{12}^{\Pi}; \quad (j=1, 2, 3),$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} , wo Π einen beliebigen echten Bruch vorstellt, und C eine endliche, positive Zahl, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von der Wahl des echten Bruches Π abhängt.

Da an der Oberfläche ω :

$$u' - u - \Phi - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} = 0, \dots,$$

so ist:

$$\begin{aligned} \theta' - \theta + 2\theta &= \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (u' - u - \Phi) - \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial n} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right|_i \right\} \cos(nx) \\ &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (v' - v - X) - \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial y \partial n} \int_{\tau} \varpi \frac{d\tau}{r} \right|_i \right\} \cos(ny) \\ &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (w' - w - \Psi) - \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial z \partial n} \int_{\tau} \vartheta \frac{d\tau}{r} \right|_i \right\} \cos(nz), \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (67):

$$(69) \quad \theta' = -\theta - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial n^2} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right]_{i+a} + Z_1 \cos(nx) + Z_2 \cos(ny) + Z_3 \cos(nz),$$

also unter Benützung des Hilfssatzes 7a:

$$(70) \quad \theta' = \Xi,$$

wo Ξ eine Funktion der Stelle der Fläche ω vorstellt, deren Stetigkeit der Bedingung genügt:

$$(71) \quad |\Xi(x_2, y_2, z_2) - \Xi(x_1, y_1, z_1)| \leq \left(\varepsilon' B + \frac{b}{\varepsilon'} M \right) r_{12}^{\bar{\omega}},$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} , wo b eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von $\bar{\omega}$ abhängt, ε' irgend eine positive Zahl, die im übrigen beliebig klein gewählt werden darf.

Bedenkt man noch, daß nach (48):

$$(72) \quad M \leq \frac{c'}{\sqrt{\varrho^3}} \sqrt{\int_{\tau} (\theta^2 + u^2 + v^2 + w^2) d\tau} + B \varrho^{\bar{\omega}}$$

wo c' einen endlichen Zahlenfaktor, ϱ irgend eine, im übrigen beliebig kleine Länge vorstellt, so kann man die Formeln (63), (64); (70), (71) auch so schreiben:

$$(73) \quad \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \\ |u'(x_2, y_2, z_2) - u'(x_1, y_1, z_1)| \\ |v'(x_2, y_2, z_2) - v'(x_1, y_1, z_1)| \\ |w'(x_2, y_2, z_2) - w'(x_1, y_1, z_1)| \end{array} \right\} \\ & \leq \frac{bc'}{\varepsilon' \sqrt{\varrho^3}} \sqrt{\int_{\tau} (\theta^2 + u^2 + v^2 + w^2) d\tau} + B \left(\frac{b}{\varepsilon'} \varrho^{\bar{\omega}} + \varepsilon' \right), \end{aligned}$$

oder, indem man

$$(74) \quad b \varrho^{\bar{\omega}} = \varepsilon'^2 \equiv \frac{\varepsilon^2}{4}$$

setzt, auch so:

$$(75) \quad \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \\ |u'(x_2, y_2, z_2) - u'(x_1, y_1, z_1)| \\ |v'(x_2, y_2, z_2) - v'(x_1, y_1, z_1)| \\ |w'(x_2, y_2, z_2) - w'(x_1, y_1, z_1)| \end{array} \right\} \\ & \leq \frac{c}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\bar{\omega}}}} \sqrt{\int_{\tau} (\theta^2 + u^2 + v^2 + w^2) d\tau} + \varepsilon B, \end{aligned}$$

wo wieder c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängig ist, und ε eine beliebig kleine, positive Zahl sein kann. Das ist die Behauptung.

Hilfssatz 10. Es seien f_1, f_2, f_3 drei stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω , deren erste Ableitungen

$$D_1 f_1, D_1 f_2, D_1 f_3$$

den Stetigkeitsbedingungen genügen:

$$(76) \quad |D_1 f_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 f_j(x_1, y_1, z_1)| \leq A r_{12}^{\varpi}; \quad (j=1, 2, 3),$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstände r_{12} , wo A eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch vorstelle; wir konstruieren sukzessive die Potentialfunktionen des Gebietes τ :

$$u_j, v_j, w_j; \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

mit den Randwerten:

$$(77a) \quad u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3,$$

$$(77b) \quad \left\{ \begin{aligned} u_j &= -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\ v_j &= -v_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\ w_j &= -w_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u_{j-1} \frac{d\tau}{r} \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, \dots),$$

an ω , dann ist ($j=1, 2, \dots$):

$$(78) \quad \int_{\tau} (\theta_j^2 + u_j^2 + v_j^2 + w_j^2) d\tau = \int_{\tau} (\theta_{j-1} \theta_{j+1} + u_{j-1} u_{j+1} + v_{j-1} v_{j+1} + w_{j-1} w_{j+1}) d\tau.$$

In der Tat, setzen wir ($j=1, 2, \dots$):

$$(79) \quad \hat{u}_j = u_j + u_{j-1} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_{j-1} \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots,$$

so ist:

$$(80a) \quad \Delta \hat{u}_j = 2 \left\{ \frac{\partial w_{j-1}}{\partial y} - \frac{\partial v_{j-1}}{\partial z} \right\}, \dots \text{ in } \tau;$$

$$(80b) \quad \hat{u}_j = \hat{v}_j = \hat{w}_j = 0, \quad \text{an } \omega;$$

ferner, wenn wir:

$$(81) \quad \chi_{j-1} = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} u_{j-1} \frac{d\omega}{r}$$

setzen:

$$(82a) \quad \dot{u}_j = u_j - u_{j-1} + 2 \frac{\partial x_{j-1}}{\partial x},$$

$$(82b) \quad \dot{\theta}_j = \theta_j + \theta_{j-1}.$$

Aus (80a) und (80b) ergibt sich:

$$(83) \quad \int_{\tau} \left\{ \left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x} \right)^2 * + \dots + \left(\frac{\partial \dot{v}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \dot{w}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} d\tau \\ = 2 \int_{\tau} (\dot{u}_j u_{j-1} + \dot{v}_j v_{j-1} + \dot{w}_j w_{j-1}) d\tau,$$

und analog sowohl:

$$(84) \quad \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}_{j+1}}{\partial x} ** + \dots + \frac{\partial \dot{v}_j}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \dot{w}_j}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}_{j+1}}{\partial x} + \dots \right\} d\tau \\ = 2 \int_{\tau} (\dot{u}_j u_j + \dot{v}_j v_j + \dot{w}_j w_j) d\tau,$$

als auch:

$$(85) \quad \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial \dot{u}_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x} *** + \dots + \frac{\partial \dot{v}_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}_j}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \dot{w}_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}_j}{\partial x} + \dots \right\} d\tau \\ = 2 \int_{\tau} (\dot{u}_{j+1} u_{j-1} + \dot{v}_{j+1} v_{j-1} + \dot{w}_{j+1} w_{j-1}) d\tau,$$

somit:

$$\int_{\tau} (\dot{u}_j u_j + \dot{v}_j v_j + \dot{w}_j w_j) d\tau + \int_{\tau} (\dot{u}_{j+1} u_{j-1} + \dot{v}_{j+1} v_{j-1} + \dot{w}_{j+1} w_{j-1}) d\tau,$$

und hieraus, mit Rücksicht darauf, daß

$$\int_{\tau} \left(u_j \frac{\partial x_{j-1}}{\partial x} + \dots \right) d\tau = - \int_{\omega} x_{j-1} u_{j,\nu} d\omega = - \int_{i+a} \left(\frac{\partial x_{j-1}}{\partial x} \frac{\partial x_j}{\partial x} + \dots \right) d\tau \\ = - \int_{\omega} x_j u_{j-1,\nu} d\omega = \int_{\tau} \left(u_{j-1} \frac{\partial x_j}{\partial x} + \dots \right) d\tau,$$

auch (unter Berücksichtigung von (82)):

$$(86) \quad \int_{\tau} (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2) d\tau = \int_{\tau} (u_{j-1} u_{j+1} + v_{j-1} v_{j+1} + w_{j-1} w_{j+1}) d\tau.$$

*) Die Punkte bedeuten die Glieder $\left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial y} \right)^2$, $\left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial z} \right)^2$; analog in der Folge.

**) Die Punkte bedeuten die Glieder $\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial y} \frac{\partial \dot{u}_{j+1}}{\partial y}$, $\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial z} \frac{\partial \dot{u}_{j+1}}{\partial z}$; analog in der Folge.

Wir können die Gleichungen (80a) und (80b) auch so schreiben:

$$(87) \quad \Delta \dot{u}_j = -2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}, \dots \text{ in } \tau;$$

$$(88) \quad \dot{u}_j = \dot{v}_j = \dot{w}_j = 0, \text{ an } \omega,$$

und wir erhalten mit Hilfe dieser Relationen:

$$(89) \quad \int_{\tau} \left\{ \left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \dot{v}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \dot{w}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} d\tau = 2 \int_{\tau} \dot{\theta}_j \theta_{j-1} d\tau,$$

und analog sowohl:

$$(90) \quad \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \dot{v}_j}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \dot{w}_j}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}_{j+1}}{\partial x} + \dots \right\} d\tau \\ = 2 \int_{\tau} \dot{\theta}_j \theta_j d\tau,$$

als auch:

$$(91) \quad \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial \dot{u}_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \dot{v}_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}_j}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \dot{w}_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}_j}{\partial x} + \dots \right\} d\tau \\ = 2 \int_{\tau} \dot{\theta}_{j+1} \theta_{j-1} d\tau,$$

somit (unter Berücksichtigung von (82b)):

$$(92) \quad \int_{\tau} \theta_j^2 d\tau = \int_{\tau} \theta_{j-1} \theta_{j+1} d\tau.$$

Durch Addition von (86) und (92) folgt die Behauptung.

II. Abschnitt.

Die Lösung des gestellten Problems.

§ 1.

Zur Lösung des Problems (1') bilden wir sukzessive die Potentialfunktionen

$$u_j, v_j, w_j \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3; \\ u_j = -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\ v_j = -v_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\ w_j = -w_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u_{j-1} \frac{d\tau}{r} \end{array} \right\} \text{ an } \omega,$$

und setzen:

$$(94) \quad \begin{cases} u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots, \\ v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots, \\ w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \dots; \end{cases}$$

dann sind, wie durch unmittelbare Substitution folgt, diese Funktionen u, v, w die Lösungen der gestellten Aufgabe, wenn wir die erforderlichen Konvergenzbeweise führen können.

Dies hat keine Schwierigkeit, solange $|\lambda|$ unterhalb einer gewissen Grenze liegt; um aber das Problem gleich ganz allgemein anzufassen, bedienen wir uns des folgenden erprobten Kunstgriffes: Es seien

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$$

$p + 1$ reelle Konstanten, welche der Bedingung:

$$(95) \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

genügen, und über welche wir uns noch weitere Bestimmungen vorbehalten; wir stellen uns, statt der Aufgabe (1'), die Aufgabe, drei Potentialfunktionen u', v', w' des Gebietes τ zu konstruieren, welche den Bedingungen:

$$(96) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= \lambda \left\{ -u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} \right\} \\ &\quad + \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p, \\ v' &= \lambda \left\{ -v' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} \right\} \\ &\quad + \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p, \\ w' &= \lambda \left\{ -w' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right\} \\ &\quad + \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega$$

genügen. Wir bilden sukzessive die Potentialfunktionen:

$$u'_j, v'_j, w'_j \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$(97) \quad u'_0 = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p, \dots,$$

$$(98) \quad u'_j = -u'_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w'_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v'_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \dots \quad (j=1, 2, \dots), \left. \vphantom{\int_{\tau}} \right\} \text{ an } \omega,$$

und setzen

$$(99) \quad \begin{cases} u' = u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \dots, \\ v' = v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^2 v'_2 + \dots, \\ w' = w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^2 w'_2 + \dots; \end{cases}$$

ich behaupte, wir können dann bei genügend großem p stets die $p + 1$ Konstanten so wählen, daß die Funktionen (99) die Lösungen des Problems (96) darstellen, daß diese Reihen also auch alle erforderlichen Konvergenzeigenschaften haben.

Nach dem Beweise der Hilfssätze 8, 9, 10 macht der Beweis dieser Behauptung keine wesentliche Schwierigkeit mehr, er ist Schritt für Schritt derselbe, wie ich ihn für ein sehr allgemeines, eindimensionales Problem in meinem Buche „Über freie und erzwungene Schwingungen“*) Seite 43–48 und für das hier in Frage stehende Problem bei ein klein wenig spezielleren Voraussetzungen über f_1, f_2, f_3 in meiner Abhandlung „Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume“**) sehr ausführlich angegeben habe. Es ergibt sich bei geeigneter Wahl von

$$(100) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p: \\ |\theta_j'| \leq C_0 L_p^j, \\ |u_j'| \leq C_0 L_p^j, \dots \end{aligned} \right\} \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

$$(101) \quad \left. \begin{aligned} |\theta_j'(x_2, y_2, z_2) - \theta_j'(x_1, y_1, z_1)| \leq C_0 L_p^j r_{12}^{\bar{\sigma}}, \\ |u_j'(x_2, y_2, z_2) - u_j'(x_1, y_1, z_1)| \leq C_0 L_p^j r_{12}^{\bar{\sigma}}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstände r_{12} , wo C_0 eine endliche Konstante vorstellt, L_p eine positive Zahl, welche durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Die Reihen

$$(102) \quad \left. \begin{aligned} \theta' &= \theta_0' + \lambda \theta_1' + \lambda^2 \theta_2' + \dots, \\ u' &= u_0' + \lambda u_1' + \lambda^2 u_2' + \dots, \dots \end{aligned} \right\}$$

sind somit bei geeigneter Wahl der

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$$

in dem ganzen Gebiete τ gleichmäßig konvergent, und die Stetigkeit der durch sie dargestellten Funktionen genügt Hölderschen Bedingungen. Für die Reihen (99) ergeben sich daraus nicht ohne weiteres die notwendigen Konvergenzeigenschaften, es ist nach (98) nur

$$(103) \quad \left. \begin{aligned} |u_j + u_{j-1}'| &\leq C_0 L_p^{j-1}, \dots \\ |D_1 u_j + D_1 u_{j-1}'| &\leq C_0 L_p^{j-1} r_{12}^{\bar{\sigma}}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, \dots),$$

*) Leipzig, B. G. Teubner, 1910.

**) Krakauer Anz. 1907, S. 853–862; in dieser Abhandlung ist $\frac{3}{\Lambda}$ durch $1 + \frac{3}{\bar{\omega}}$ zu ersetzen, und S. 856 Zeile 6 von unten $\varepsilon(2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon)$ statt $2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon$ zu schreiben.

wo A eine endliche Konstante vorstellt; daraus ersehen wir aber jedenfalls, daß wir in dieser Weise die Lösung des Problems erreichen können, drei Potentialfunktionen u_j'', v_j'', w_j'' des Gebietes τ zu konstruieren, welche den Bedingungen:

$$(104) \quad \begin{cases} u'' = \lambda \left(-u'' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w'' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v'' \frac{d\tau}{r} \right) \\ \quad + \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p+1} u_{p+1}, \dots \end{cases} \quad \text{an } \omega$$

genügen, wenn wir

$$(105) \quad \beta_0 = \alpha_0, \beta_1 = \alpha_0 + \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_p = \alpha_{p-1} + \alpha_p, \beta_{p+1} = \alpha_p$$

setzen, in der Form:

$$(106) \quad u'' = u_0' + u_1' + \lambda(u_1' + u_2') + \lambda^2(u_2' + u_3') + \dots, \dots$$

Nunmehr folgt in bekannter Weise als Lösung des ursprünglichen Problems (1'):

$$(107) \quad u = \frac{P}{D},$$

$$(108) \quad \begin{cases} P = \begin{vmatrix} u'' & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p & \beta_{p+1} \\ u_0' + u_1' & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1' + u_2' & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_p' + u_{p+1}' & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, \\ D = (-1)^{p+1} \{ \beta_0 \lambda^{p+1} + \beta_1 \lambda^p + \dots + \beta_p \lambda + \beta_{p+1} \}, \end{cases}$$

falls nicht λ gerade eine Wurzel der Gleichung

$$(109) \quad D = 0$$

ist.

§ 2.

Nach diesem Hauptresultat führen uns Schritt für Schritt die nämlichen Schlußweisen, wie bei anderen analogen Untersuchungen*), zu dem Resultate, daß, wenn wir zunächst den singulären Fall

$$\lambda = -1$$

ausschließen, die Wurzeln λ_x der Gleichung

$$D = 0,$$

*) Man vgl. z. B. „Freie und erzwungene Schwingungen“ S. 21. An die Stelle der dort betrachteten Integrale $\int_0^1 P_j^2 dx$ tritt hier $\int_{\tau} \{ \Theta_x^2 + U_x^2 + \mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{W}_x^2 \} d\tau$; wenn wir den Fall $\lambda = -1$ ausschließen, folgt stets aus dem Verschwinden dieses Integrales das identische Verschwinden von U_x, V_x, W_x .

denen Pole der Lösungen u, v, w entsprechen, stets nur einfache Pole der Lösungen sein können; ist λ_x wirklich ein Pol der Lösungen, so gehen für $\lim \lambda = \lambda_x$

$$u(\lambda - \lambda_x), \quad v(\lambda - \lambda_x), \quad w(\lambda - \lambda_x)$$

in ein Tripel von Potentialfunktionen U_x, V_x, W_x über, welche den Bedingungen:

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_x = \lambda_x \left\{ -U_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} \right\}, \\ V_x = \lambda_x \left\{ -V_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} \right\}, \\ W_x = \lambda_x \left\{ -W_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u_x \frac{d\tau}{r} \right\}, \end{array} \right\} \text{ an } \omega$$

genügen, wobei U_x, V_x, W_x nicht gleichzeitig identisch Null sein können.

Ich habe früher solche Funktionentripel, unter Hinzunahme der Bedingungen:

$$(111) \quad u_x \cos(nx) + \mathfrak{B}_x \cos(ny) + \mathfrak{B}_x \cos(nz) = 0, \quad \text{an } \omega,$$

$$(112) \quad \int_{\tau} \{ U_x \cos(vx) + V_x \cos(vy) + W_x \cos(vz) \} d\omega = 0,$$

$$(113) \quad \int_{\tau} (\Theta_x^2 + u_x^2 + \mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{B}_x^2) d\tau \neq 0$$

als biharmonische Funktionentripel*) des Gebietes τ bezeichnet; wir werden sogleich sehen, welche Funktionentripel man zu den biharmonischen Funktionentripeln hinzunehmen muß, um alle Funktionentripel zu erschöpfen, welche den Bedingungen (110) genügen.

Es folgt aus (110) an der Fläche ω , wenn wir, entsprechend einer bereits benützten Bezeichnung,

$$u_{xn} = u_x \cos(nx) + \mathfrak{B}_x \cos(ny) + \mathfrak{B}_x \cos(nz)$$

setzen:

$$u_{xn} = \lambda_x \left(u_{xn} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} u_{xn} \frac{d\omega}{r} \right)$$

oder:

$$(114) \quad u_{xn} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_x}{1 - \lambda_x} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} u_{xn} \frac{d\omega}{r}.$$

*) Krakauer Anz. 1907, S. 838, 863. Dasselbst setzte ich das Integral (113) = 1, was erst für die Reihenentwicklungen nach den biharmonischen Tripeln in Betracht kommt.

Existieren also Funktionentripel, welche den Bedingungen (110) genügen, und für welche

$$u_{zn} \neq 0,$$

so muß

$$(115a) \quad \psi_z = \text{const.} \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} u_{zv} \frac{d\omega}{r}$$

eine Poincarésche Fundamentalfunktion*) des Gebietes τ sein, welche an der Fläche ω die Relation

$$\left| \frac{\partial \psi_z}{\partial n} \right|_a - \left| \frac{\partial \psi_z}{\partial n} \right|_i = \text{const.} u_{zn} = \frac{2\lambda_z}{1-\lambda_z} \left| \frac{\partial \psi_z}{\partial n} \right|_i,$$

oder

$$(115b) \quad \left| \frac{\partial \psi_z}{\partial n} \right|_a - \left| \frac{\partial \psi_z}{\partial n} \right|_i = \lambda_z \left\{ \left| \frac{\partial \psi_z}{\partial n} \right|_a + \left| \frac{\partial \psi_z}{\partial n} \right|_i \right\}, \quad 1 < |\lambda_z| < +\infty,$$

erfüllt. Wir können hieraus folgern, daß die Funktionentripel:

$$(116) \quad U_z = \frac{c_z}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots,$$

in denen die c_z Konstanten sind, und für welche

$$(116') \quad u_z = c_z \frac{1+\lambda_z}{2\lambda_z} \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \dots$$

wird, den Gleichungen (110) genügen, wenn die ψ_z Poincarésche Fundamentalfunktionen des Gebietes τ sind. Wir können nun auch von den gegebenen Funktionen f_1, f_2, f_3 drei Funktionen f'_1, f'_2, f'_3 so abtrennen, daß, wenn wir unter ψ eine geeignet gewählte Potentialfunktion des Gebietes τ verstehen und

$$(117) \quad U' = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots$$

setzen, U', V', W' die Lösungen des Problemes

$$(118) \quad U' = \lambda \left(-U' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{B}' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{B}' \frac{d\tau}{r} \right) + f'_1, \dots \text{ an } \omega$$

sind, und daß

$$(119) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (f_3 - f_3') - \frac{\partial}{\partial z} (f_2 - f_2') \right\} \cos(nx) + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (f_1 - f_1') - \frac{\partial}{\partial x} (f_3 - f_3') \right\} \cos(ny) \\ + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (f_2 - f_2') - \frac{\partial}{\partial y} (f_1 - f_1') \right\} \cos(nz) = 0.$$

*) A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 5, S. 50. (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901).

Zur Bestimmung von ψ ergibt sich in der Tat aus (119):

$$\begin{aligned} & \mathfrak{U}'_n(1+\lambda) - 2\lambda \left\{ \mathfrak{U}'_n + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} \mathfrak{U}'_v \frac{d\omega}{r} \right\} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(nz), \end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$(120) \quad \chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \psi \frac{\cos(rv)}{r^2} d\omega$$

setzen, sodaß

$$\mathfrak{U}' = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \dots$$

wird:

$$\begin{aligned} (121) \quad & (1-\lambda) \frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\omega} \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{d\omega}{r} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(nz), \end{aligned}$$

oder, wenn wir schließlich

$$(122) \quad \Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{d\omega}{r} = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \mathfrak{U}'_v \frac{d\omega}{r},$$

einführen:

$$\begin{aligned} (123) \quad & \frac{\partial \Phi_a}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \lambda \left\{ \frac{\partial \Phi_a}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right\} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(nz), \end{aligned}$$

eine Aufgabe, die in der bekannten Weise zu lösen ist, in welcher man zu der Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie gelangt.*)

Wir können also unsere ursprüngliche Aufgabe auch so formulieren: Wir suchen drei Potentialfunktionen

$$u - U', \quad v - V', \quad w - W'$$

des Gebietes τ , welche den Bedingungen:

$$\begin{aligned} (124) \quad u - U' &= \lambda \left\{ -(u - U') + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} (w - W') \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} (v - V') \frac{d\tau}{r} \right\} \\ &\quad + f_1 - f_1', \dots \text{ an } \omega \end{aligned}$$

genügen, dann ist die Lösung des Problems (1'):

$$(125) \quad u = u - U' + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{d\tau}{r}, \dots$$

*) Vgl. A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 5. (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901).

Wir haben dadurch den Vorteil gewonnen, daß die Funktionen

$$f_1 - f_1', \quad f_2 - f_2', \quad f_3 - f_3'$$

die Relation

$$(126) \quad \left\{ \frac{\partial(f_3 - f_3')}{\partial y} - \frac{\partial(f_2 - f_2')}{\partial z} \right\} \cos(nx) + \left\{ \frac{\partial(f_1 - f_1')}{\partial z} - \frac{\partial(f_3 - f_3')}{\partial x} \right\} \cos(ny) \\ + \left\{ \frac{\partial(f_2 - f_2')}{\partial x} - \frac{\partial(f_1 - f_1')}{\partial y} \right\} \cos(nz) = 0$$

erfüllen; es kann die Lösung eines solchen Problem (124) auch nur zu Funktionentripeln U_x, V_x, W_x führen, welche den Bedingungen (110) genügen, und für welche

$$(127) \quad U_x \cos(nx) + V_x \cos(ny) + W_x \cos(nz) = 0, \text{ an } \omega$$

ist.

Setzen wir für solche Funktionentripel

$$(128) \quad \hat{u}_x = U_x - \frac{1}{4\pi} \frac{2\lambda_x}{1+\lambda_x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} W_x \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} V_x \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots,$$

dann ist:

$$(129) \quad \hat{u}_x = \hat{v}_x = \hat{w}_x = 0 \text{ an } \omega,$$

ferner:

$$(130) \quad \begin{cases} \hat{\theta}_x = \Theta_x, \\ \hat{u}_x = \frac{1-\lambda_x}{1+\lambda_x} U_x, \dots, \end{cases}$$

$$\Delta \hat{u}_x = \frac{2\lambda_x}{1+\lambda_x} \frac{\partial \Theta_x}{\partial x} = \frac{2\lambda_x}{1+\lambda_x} \frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial x} = \frac{2\lambda_x}{1-\lambda_x} \left\{ \frac{\partial \hat{w}_x}{\partial y} - \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial z} \right\}, \dots,$$

$$\int_{\tau} (\hat{u}_x^2 + \hat{v}_x^2 + \hat{w}_x^2) d\tau = - \frac{1-\lambda_x}{1+\lambda_x} \int_{\tau} \hat{\theta}_x^2 d\tau,$$

$$\int_{\tau} (U_x^2 + V_x^2 + W_x^2) d\tau = - \frac{1-\lambda_x}{1+\lambda_x} \int_{\tau} \Theta_x^2 d\tau,$$

also

$$(131) \quad \int_{\tau} \{ (1+\lambda_x) \Theta_x^2 + (1-\lambda_x) (U_x^2 + V_x^2 + W_x^2) \} d\tau = 0.$$

Hieraus folgt:

$$(132) \quad |\lambda_x| \leq 1.$$

Der Fall

$$\lambda_x = +1$$

ist leicht zu erledigen. Für $\lambda_z = +1$ würde

$$\int_{\tau} \Theta_z^2 d\tau = 0,$$

$$\Theta_z \equiv 0,$$

$$U_z = V_z = W_z \equiv 0$$

folgen; die $\lambda_z = +1$ entsprechenden Tripel müßten also von der Form sein:

$$U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \dots,$$

wo Φ eine Potentialfunktion des Gebietes wäre; es folgte dann aber auch an der Fläche ω

$$U_z = V_z = W_z \equiv 0,$$

somit

$$U_z = V_z = W_z \equiv 0$$

in dem ganzen Gebiete; der Fall

$$\lambda_z = +1$$

kann also nicht in Betracht kommen.

§ 3.

Dagegen bedarf der Fall

$$\lambda_0 = -1$$

einer ganz besonderen Behandlung. Für denselben ergibt sich aus den Gleichungen (110):

$$\int_{\tau} (U_0^2 + V_0^2 + W_0^2) d\tau = 0,$$

$$U_0 = V_0 = W_0 \equiv 0, \text{ in } \tau,$$

$$\Theta_0 = \text{const. in } \tau;$$

die $\lambda_0 = -1$ entsprechenden Tripel müssen von der Form sein:

$$(133) \quad U_0 = c \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \dots,$$

wo Φ eine Potentialfunktion des Gebietes und c eine Konstante vorstellt. Alle übrigen Funktionentripel, welche den Bedingungen (110) entsprechen, erfüllen die Bedingung:

$$(134) \quad |\lambda_x| > 1, \quad (x=1, 2, \dots).$$

Wir können nun wieder, indem wir geeignete Funktionen*) f_1^0, f_2^0, f_3^0 von f_1, f_2, f_3 abtrennen, erreichen, daß die Lösung der Aufgabe:

*) Von solcher Beschaffenheit, daß die Lösung der Aufgabe:

$$u^0 = \lambda \left\{ -u^0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w^0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v^0 \frac{d\tau}{r} \right\} + f_1^0, \dots \text{ an } \omega$$

sofort angebar ist.

$$(135) \quad u = \lambda \left\{ -u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{W} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{V} \frac{d\tau}{r} \right\} + f_1 - f_1^0, \dots \text{ an } \omega$$

nicht zu Tripeln U_0, V_0, W_0 führen kann, daß die Lösungen des Problems (135) den Pol $\lambda = -1$ nicht besitzen.

In der Tat, erfüllen f_1, f_2, f_3 die Bedingung:

$$(136) \quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \cos(ny) \\ + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(nz) = 0, \text{ an } \omega,$$

auf diesen Fall können wir nach der Untersuchung des § 2 den allgemeinen Fall stets reduzieren, dann können wir stets eine mit ihren ersten Ableitungen in τ stetige Funktion φ konstruieren, mit zweiten Ableitungen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen genügt, und von solcher Art, daß

$$(137) \quad f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \text{ an } \omega;$$

ja, wir können dieser Funktion noch die Bedingung:

$$(138) \quad \Delta \Delta \varphi = 0, \text{ in } \tau$$

auferlegen. Wir kommen auf diese Aufgabe (das biharmonische Problem) noch im folgenden Abschnitte zurück; hier wollen wir aber bereits die Existenz einer solchen Funktion φ unter der Bedingung (136) beweisen. In der Tat können wir, da, wie wir gesehen haben, $\lambda = +1$ kein Pol der Lösungen des Problems (1') ist, die Lösung für $\lambda = +1$ konstruieren, drei Potentialfunktionen des Gebietes τ

$$U, V, W,$$

mit ersten Ableitungen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen genügt, und welche die Gleichungen erfüllen:

$$(139) \quad 2U = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{W} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{V} \frac{d\tau}{r} + f_1, \dots, \text{ an } \omega.$$

Setzt man:

$$(140) \quad \dot{U} = 2U - \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{W} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{V} \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots,$$

so folgt:

$$(141) \quad \dot{U} = \dot{\mathfrak{W}} = \dot{\mathfrak{V}} \equiv 0, \text{ in } \tau,$$

$$(142) \quad \dot{U} = f_1, \quad \dot{V} = f_2, \quad \dot{W} = f_3, \text{ an } \omega.$$

Die $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}$ sind also Ableitungen einer Funktion $\varphi(x, y, z)$

$$(143) \quad \varphi(x, y, z) = \text{const.} + \int_0^{(x, y, z)} \{ \dot{U} \cos(\sigma x) + \dot{V} \cos(\sigma y) + \dot{W} \cos(\sigma z) \} d\sigma$$

nach x, y, z , wobei das Integral rechts von irgend einem bestimmten Anfangspunkt 0 an über irgend eine stetig gekrümmte Kurve σ zu erstrecken ist, welche von 0 bis zum Punkte (x, y, z) ganz in dem Gebiete τ verläuft. Da nach (140):

$$\hat{\Theta} = \Theta$$

und

$$\Delta \Theta = 0,$$

so ergibt sich noch:

$$\Delta \Delta \varphi = 0.$$

Sei nun φ die Potentialfunktion des Gebietes τ , welche an ω die Randwerte:

$$(144) \quad \psi = \varphi$$

besitzt, und

$$(145) \quad c = -\frac{1}{\tau} \int_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\omega;$$

wir setzen

$$(146) \quad f_1^0 = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{c}{4\pi} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} + \psi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} \right\}, \dots,$$

dann behaupte ich, kann das Problem (135) nicht für seine Lösungen den Pol

$$\lambda = -1$$

haben.

In der Tat erfüllen die Potentialfunktionen u_0, v_0, w_0 , welche an ω die Werte:

$$(147) \quad u_0 = f_1 - f_1^0, \quad v_0 = f_2 - f_2^0, \quad w_0 = f_3 - f_3^0$$

haben, die Bedingung:

$$(148) \quad \int_{\omega} (u_0 \cos(\nu x) + v_0 \cos(\nu y) + w_0 \cos(\nu z)) d\omega = - \int_{\tau} \theta_0 d\tau = 0,$$

und es ist:*)

$$(149) \quad u_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_0 \frac{d\tau}{r}, \dots$$

*) Denn es ist an der Oberfläche ω :

$$u_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c}{4\pi} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial x} \frac{d\omega}{r} \right\} = \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial n} \cos(nx), \dots,$$

somit im ganzen Gebiete τ :

$$\begin{aligned} u_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c}{4\pi} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} \right\} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} (\theta_0 - c) \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_0 \frac{d\tau}{r} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r}, \dots \end{aligned}$$

woraus unmittelbar (149) folgt.

Aus den Definitionsgleichungen der Potentialfunktionen u_j, v_j, w_j ($j=1, 2, \dots$):

$$u_j = -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \dots \text{an } \omega$$

ergibt sich sukzessive, unter Benutzung von (148), (149):

$$\left. \begin{aligned} (150) \quad & \int_{\omega} (u_j \cos(\nu x) + v_j \cos(\nu y) + w_j \cos(\nu z)) d\omega = - \int_{\tau} \theta_j d\tau = 0, \\ (151) \quad & u_j = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_j \frac{d\tau}{r}, \dots \end{aligned} \right\} (j=1, 2, \dots);$$

somit kann das Problem (135) auch nur zu singulären Tripeln U_x, V_x, W_x führen, für welche ebenfalls:

$$(152) \quad \int_{\omega} (U_x \cos(\nu x) + V_x \cos(\nu y) + W_x \cos(\nu z)) d\omega = - \int_{\tau} \Theta_x d\tau = 0,$$

$$(153) \quad U_x = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \Theta_x \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r}, \dots$$

Würde jetzt das Problem zu singulären Tripeln U_0, V_0, W_0 führen, so würde nach (133) zunächst aus

$$\int_{\omega} (U_0 \cos(\nu x) + V_0 \cos(\nu y) + W_0 \cos(\nu z)) d\omega = - \int_{\tau} \Theta_0 d\tau = 0$$

das Verschwinden von c folgen, ferner aus

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \Theta_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{B}_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{B}_0 \frac{d\tau}{r}$$

das identische Verschwinden von U_0, V_0, W_0 .

Das reduzierte Problem (135) kann somit keinen Pol

$$\lambda = -1$$

für seine Lösungen haben, andererseits kann man sofort die Lösung

$$(154) \quad u^0 = \frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{c}{4\pi} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} + \psi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{\partial(\varphi-\psi)}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} \right\}, \dots$$

des Problemess:

$$(155) \quad u^0 = \lambda \left(-u^0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w^0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v^0 \frac{d\tau}{r} \right) + f_1^0, \dots \text{an } \omega$$

angeben; wir erkennen so, daß der besondere Fall

$$\lambda = -1$$

auch in dem allgemeinen Problem (1') keine Schwierigkeiten macht; die Lösung des allgemeinen Problems kann für $\lambda = -1$ auch nur einen einfachen Pol haben, und wir können durch Abspaltung geeigneter Funktionen von f_1, f_2, f_3 das allgemeine Problem (1') auf ein Problem reduzieren, dessen Lösung nur Pole λ_x mit absolut größeren Werten als eins besitzt.

Bezüglich der den Gleichungen (110) genügenden singulären Funktionentripel können wir folgendes aussagen:

Dieselben sind entweder biharmonische Funktionentripel, welche außer den Gleichungen (110) noch den Bedingungen (111), (112), (113) unterworfen werden können, mit charakteristischen Konstanten

$$|\lambda_x| > 1,$$

oder Funktionen von der Form:

$$(156) \quad U_x = \frac{c_x}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots,$$

wo die c_x von Null verschiedene Konstanten, die ψ_x Poincarésche Fundamentalfunktionen des Gebietes τ sind, mit charakteristischen Konstanten

$$|\lambda_x| > 1;$$

oder schließlich, es ist bei der charakteristischen Konstanten

$$\lambda_0 = -1:$$

$$(157) \quad U_0 = c \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \dots,$$

wo c eine beliebige Konstante, Φ eine beliebige Potentialfunktion des Gebietes τ ist.

Durch diese allgemeine Untersuchung der singulären Funktionentripel U_x, V_x, W_x sind wir nun in den Stand gesetzt, — nach bekannten Paradigmen — die allgemeinen Resultate auszusprechen, welche in dem folgenden Abschnitte kurz zusammengestellt sind.

III. Abschnitt.

Zusammenstellung der Resultate, welche sich aus den vorstehenden Untersuchungen für die Lösung des Grundproblems der Elastizitätstheorie, für die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, des biharmonischen Problems und der ersten Randwertaufgabe der Theorie der stationären Strömungen mit Reibung begabter Flüssigkeiten ergeben.

§ 1.

Über die Lösung des Grundproblems der Elastizitätstheorie.

Aufgabe. Man sucht drei Potentialfunktionen u, v, w des Gebietes τ , welche die Bedingungen:

$$(158) \quad u = \lambda \left(-u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} \right) + f_1, \dots \text{ an } \omega$$

erfüllen.

λ ist eine gegebene Zahl, f_1, f_2, f_3 drei gegebene, mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω ; die Stetigkeit der ersten Ableitungen genüge Hölderschen Bedingungen.

Man kann stets die Lösungen konstruieren, falls nicht λ einer gewissen abzählbar unendlichen Zahlenreihe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$

$$(159) \quad \lambda_0 = -1, \quad 1 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$$

angehört, welche nur einen Häufungspunkt im Unendlichen besitzt. Falls λ dieser Zahlenreihe nicht angehört, sind die Lösungen einzig, und die Stetigkeit der ersten Ableitungen genügt Hölderschen Bedingungen.

Ist

$$|\lambda| \geq N,$$

wo N eine feste, von vornherein beliebig groß gewählte Zahl ist, so kann man die Lösungen in der Form darstellen:

$$(160) \quad u = \frac{P(\lambda; x, y, z)}{(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)}, \quad v = \frac{Q(\lambda; x, y, z)}{(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)},$$

$$w = \frac{R(\lambda; x, y, z)}{(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)},$$

wo P, Q, R für jeden der Bedingung:

$$|\lambda| \geq N$$

genügenden Wert von λ stetige Funktionen der Stelle des Gebietes τ sind und erste Ableitungen besitzen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen

genügt, und wo $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ voneinander verschiedene Zahlen sind, welche der Bedingung

$$|\lambda_x| \leq N, \quad (x=0, 1, 2, \dots)$$

genügen; die Zahl n ist endlich, so lange N endlich ist.

Für

$$\lambda = \lambda_x, \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

gehen die Funktionen P, Q, R in Tripel von Potentialfunktionen U_x, V_x, W_x über, welche den Bedingungen:

$$(161) \quad U_x = \lambda_x \left\{ -U_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots \text{ an } \omega$$

genügen. Wir unterscheiden

1. Für $\lambda_0 = -1$ die Tripel:

$$(162) \quad U_0 = c \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \dots,$$

wo c eine Konstante und Φ irgend eine Potentialfunktion des Gebietes τ vorstellt, unter der Voraussetzung, daß die Stetigkeit ihrer ersten Ableitungen Hölderschen Bedingungen genügt.

2. Tripel von der Form:

$$(163) \quad U_x = \frac{c_x}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots$$

wo die c_x Konstanten, die ψ_x Poincarésche Fundamentalfunktionen des Gebietes τ mit charakteristischen Konstanten λ_x

$$|\lambda_x| > 1$$

sind.

3. *Biharmonische* Tripel, welche außer den Gleichungen (161) den Bedingungen:

$$(164) \quad U_{xx} = 0, \text{ an } \omega,$$

$$(165) \quad \int_{\tau} \Theta_x d\tau = 0, \quad (|\lambda_x| > 1)$$

$$(166) \quad \int_{\tau} \{ \Theta_x^2 + U_x^2 + \mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{B}_x^2 \} d\tau = 0$$

genügen.

Erfüllen f_1, f_2, f_3 die Gleichung:

$$(167) \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(nz) = 0$$

— in diesem Falle kann man eine mit ihren ersten Ableitungen in τ stetige

Funktion φ mit zweiten Ableitungen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen genügt, so finden, daß

$$(168) \quad f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad -$$

dann erfüllen auch die Funktionen P, Q, R an ω die Gleichung:

$$(169) \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(nz) = 0,$$

in diesem Falle kann die Lösung des Grundproblems nicht auf singuläre Tripel der zweiten Art führen, sondern nur auf Funktionentripel U_x, V_x, W_x , für welche

$$(170) \quad u_{,nn} = 0 \text{ an } \omega.$$

Indem man von den Funktionen f_1, f_2, f_3 Funktionen von der Form:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{d\tau}{r}, \dots$$

abspaltet, kann man bei geeigneter Wahl der Potentialfunktion Ψ das allgemeine Problem auf den soeben genannten Fall reduzieren (Reduktion auf den Fall, daß keine Wirbelfäden in der Oberfläche ω endigen).

Durch Abspaltung der Funktionen:

$$(171) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ + \frac{c}{4\pi} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} + \Phi \right\}, \dots,$$

in denen c eine geeignete Konstante, Φ eine geeignete Potentialfunktion des Gebietes τ von f_1, f_2, f_3 ist, kann man den Pol

$$\lambda = -1$$

der Lösung ausschließen. Nach der Reduktion auf den Fall (167) kann man c und Φ leicht angeben:

$$(172a) \quad c = + \frac{1}{\tau} \int_{\omega} \{ f_1 \cos(\nu x) + f_2 \cos(\nu y) + f_3 \cos(\nu z) \} d\omega,$$

$$(172b) \quad \Phi = \psi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r},$$

wenn ψ die Potentialfunktion des Gebietes τ mit den Randwerten

$$(173) \quad \psi = \varphi \text{ an } \omega$$

vorstellt.

Durch diese beiden Reduktionen können wir stets das allgemeine Problem auf ein Problem:

$$(174a) \quad u = \lambda \left\{ -u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} \right\} + f_1, \dots \text{ an } \omega$$

zurückführen, wo f_1, f_2, f_3 so beschaffen sind, daß die Potentialfunktionen u_0, v_0, w_0 mit den Randwerten:

$$(174b) \quad u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3$$

den Gleichungen

$$(174c) \quad \int_{\tau} \theta_0 d\tau = 0,$$

$$(174d) \quad u_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_0 \frac{d\tau}{r}, \dots$$

genügen.

Ein solches Problem wollen wir als ein „reduziertes“ Grundproblem der Elastizitätstheorie bezeichnen.

Die Lösung eines „reduzierten Grundproblems“ kann nur auf biharmonische Tripel führen.

Definieren wir in dem allgemeinen Falle die Potentialfunktionen

$$u_j, v_j, w_j; \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

durch die Randwerte:

$$\left. \begin{aligned} u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3, \\ u_j = -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \dots, (j=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \text{an } \omega,$$

so stellen die Reihen:

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots, \dots$$

die Lösungen des Grundproblems dar, solange

$$|\lambda| \leq 1.$$

Die Reihen

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots, \dots$$

konvergieren auch noch gleichmäßig in τ für

$$\lambda = +1 \quad \text{und} \quad \lambda = -1,$$

die Reihen:

$$u_0 \pm u_1 + u_2 \pm u_3 + \dots, \dots$$

und die Reihen:

$$D_1 u_0 \pm D_1 u_1 + D_1 u_2 \pm D_1 u_3 + \dots, \dots$$

konvergieren in τ nur dann gleichmäßig, wenn das Problem nicht den Pol

$$\lambda = -1$$

besitzt.

Dagegen konvergieren stets die Reihen

$$u_0 - (u_1 + u_0) + (u_2 + u_1) - \dots, \dots$$

gleichmäßig in τ und stellen Tripel von der Art (171) dar, durch deren

Abspaltung von f_1, f_2, f_3 dem Probleme (158) der Pol $\lambda = -1$ genommen werden kann. Es ergibt sich so eine Methode, die hierfür abzuspaltenden Funktionen f_1^0, f_2^0, f_3^0 zu konstruieren, ohne vorher die Reduktion auf den Fall vorzunehmen, daß keine Wirbelfäden in der Oberfläche ω endigen.

Die biharmonischen Funktionentripel erfüllen die Gleichungen:

$$(175a) \quad \int_{\tau} \Theta_i \Theta_x d\tau = 0, \quad \int_{\tau} (\mathcal{U}_i \mathcal{U}_x + \mathcal{V}_i \mathcal{V}_x + \mathcal{W}_i \mathcal{W}_x) d\tau = 0, \quad \text{falls } \lambda_i \neq \lambda_x.$$

Schreiben wir den biharmonischen Funktionentripeln noch zur vollständigen Bestimmung die Gleichungen:

$$(175b) \quad \int_{\tau} (\Theta_x^2 + \mathcal{U}_x^2 + \mathcal{V}_x^2 + \mathcal{W}_x^2) d\tau = 1$$

vor, so gelten im Falle eines reduzierten Problems (158) die Reihenentwicklungen nach biharmonischen Tripeln:

$$(176a) \quad u_0 \sim \sum_1^{\infty} C_x U_x, \dots,$$

$$(176b) \quad C_x = \int_{\tau} (\theta_0 \Theta_x + u_0 \mathcal{U}_x + v_0 \mathcal{V}_x + w_0 \mathcal{W}_x) d\tau, \quad (x = 1, 2, \dots),$$

wobei das Zeichen $\sim$ bedeuten soll, daß wir vielleicht von den Reihen (176a) selbst nicht aussagen können, daß sie gleichmäßig in τ konvergieren und die links stehenden Funktionen darstellen, daß aber von einem endlichen j ab die Entwicklungen

$$(177) \quad u_j = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda^j} C_x U_x, \dots$$

gelten.

Im Falle einer Kugel vom Radius R um den Anfangspunkt als Zentrum führen wir Polarkoordinaten r_1, θ_1, φ_1 durch die Transformationen:

$$(178) \quad \begin{cases} x = r_1 \mu_1, \\ y = r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos \varphi_1, \\ z = r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \sin \varphi_1, \end{cases} \quad \mu_1 = \cos \theta_1,$$

ein und setzen:

$$(179) \quad F_x(x, y, z) = r_1^x Y_j(\mu_1, \varphi_1),$$

wo Y_j eine allgemeine Kugelfunktion j^{ter} Ordnung vorstellt, dann sind die biharmonischen Funktionentripel für den Innenraum der Kugel:

$$(180) \quad \begin{cases} U_x = \alpha_x \left\{ (2x+1)x F_x - r_1^2 \frac{\partial F_x}{\partial x} \right\}, \\ V_x = \alpha_x \left\{ (2x+1)y F_x - r_1^2 \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\}, \\ W_x = \alpha_x \left\{ (2x+1)z F_x - r_1^2 \frac{\partial F_x}{\partial z} \right\}, \end{cases} \quad (x=1, 2, \dots)$$

wo α_x eine Konstante ist, welche zur Befriedigung der Gleichung:

$$(181) \quad \int_{\tau} \{ \Theta_x^2 + \mathfrak{U}_x^2 + \mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{W}_x^2 \} d\tau = 1$$

zu verwenden ist.

§ 2.

Über die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.

Aufgabe. Man sucht drei mit ihren ersten*) Ableitungen im Gebiete τ stetige Funktionen $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, welche in τ den Differentialgleichungen genügen:

$$(182) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \hat{u} + k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = 0, \\ \Delta \hat{v} + k \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0, \\ \Delta \hat{w} + k \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \tau,$$

wo k eine gegebene Zahl (bei den in der theoretischen Physik in Betracht kommenden Fällen > 0) ist, und die Randwerte:

$$(183) \quad \hat{u} = f_1, \quad \hat{v} = f_2, \quad \hat{w} = f_3 \quad \text{an } \omega$$

besitzen.

Vorausgesetzt wird, daß f_1, f_2, f_3 drei gegebene, mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω sind; die Stetigkeit der ersten Ableitungen genüge Hölderschen Bedingungen.

[Die Lösung soll auch auf den Fall verallgemeinert werden, daß man von f_1, f_2, f_3 lediglich weiß, daß sie selbst stetige**) Funktionen der Stelle von ω sind, während über die Ableitungen von f_1, f_2, f_3 keinerlei Voraus-

*) Wie in der Theorie der Potentialfunktionen, verlangen wir stillschweigend Stetigkeit von *allen* endlichen Ableitungen *innerhalb* τ , also in endlichem, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von ω .

**) Die Verallgemeinerung auf den Fall, daß f_1, f_2, f_3 auch nur abteilungsweise stetig vorausgesetzt werden, wird nicht schwer sein, soll hier aber nicht mehr berücksichtigt werden.

setzungen gemacht werden; es ist in diesem Falle auch von den ersten Ableitungen der Lösungen $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ nicht mehr zu verlangen, daß sie bis an die Oberfläche ω heran existieren und stetig sind.]

Zur Lösung dieses Problems löse man die Aufgabe (158) und setze:

$$(184) \quad \lambda = -\frac{k}{2+k}, \quad k = -\frac{2\lambda}{1+\lambda},$$

$$(185) \quad \dot{u} = (1+\lambda) u - \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots$$

dann ist — unter Ausschließung der singulären Fälle:

$$(186) \quad \lambda = \lambda_x, \quad k = k_x = -\frac{2\lambda_x}{1+\lambda_x}, \quad (x=0, 1, 2, \dots) —$$

$\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$, die Lösung der Aufgabe (182), (183).

Im besonderen findet die Aufgabe für die in der theoretischen Physik in Betracht kommenden Fälle

$$k > 0$$

ihre vollständige Lösung; die Lösung ist einzig*).

Ist

$$(187) \quad -2 - \varepsilon > k > -2 + \varepsilon,$$

wo ε eine feste, von vornherein beliebig klein gewählte Zahl ist, so kann man die Lösungen in der Form darstellen:

$$(188) \quad \dot{u} = \frac{\hat{P}(k; x, y, z)}{(k-k_0)(k-k_1)\dots(k-k_n)}, \dots$$

wo $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ für jeden der Bedingung:

$$-2 - \varepsilon > k > -2 + \varepsilon$$

genügenden Wert von k stetige Funktionen der Stelle des Gebietes τ sind und erste Ableitungen besitzen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen genügt, und wo $k_0, k_1, \dots, k_n$ voneinander verschiedene Zahlen sind, welche der Bedingung:

$$-2 - \varepsilon > k_x > -2 + \varepsilon, \quad (x=0, 1, 2, \dots, n),$$

genügen; die Zahl n ist endlich, solange ε von Null verschieden ist.

Für

$$k = k_x, \quad (x=0, 1, 2, \dots)$$

gehen die Funktionen $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ in Funktionentripel $\hat{U}_x$, $\hat{V}_x$, $\hat{W}_x$ über, welche

*) Da aus $|\lambda_x| \leq 1$, $k_x < -1$ folgt, also jedenfalls kein positives k_x vorhanden ist. Die Häufungsstelle der k_x ist an der Stelle (-2) .

in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, den Differentialgleichungen

$$(189) \quad \Delta \dot{U}_x + k_x \frac{\partial \dot{\Theta}_x}{\partial x} = 0, \dots \text{ in } \tau$$

genügen und an der Oberfläche ω verschwinden, die *Cosseratschen Funktionentripel erster Art*, welche mit den biharmonischen Funktionentripeln durch die Relationen

$$(190) \quad \dot{U}_x = (1 + \lambda_x) U_x - \frac{\lambda_x}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots$$

verbunden sind.

Die Funktionentripel, welche aus den Tripeln (162) und (163) durch die Relationen:

$$\dot{U}_x = (1 + \lambda_x) U_x - \frac{\lambda_x}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{B}_x \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots,$$

entstehen, werden identisch Null.

Gelten für die Potentialfunktionen u_0, v_0, w_0 mit den Randwerten:

$$(191) \quad u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3, \quad \text{an } \omega$$

im Falle eines „reduzierten Problems“ (158) die Reihenentwicklungen:

$$(192) \quad u_0 = \sum_x^{\infty} C_x U_x, \dots$$

nach biharmonischen Funktionen, sodaß:

$$(193) \quad u = \sum_x^{\infty} \frac{\lambda_x}{\lambda_x - \lambda} C_x U_x, \dots,$$

dann gelten die Reihenentwicklungen:

$$(194) \quad \dot{u} - u_0 = \sum_x^{\infty} \frac{\lambda_x}{\lambda_x - \lambda} C_x \dot{U}_x = \sum_x^{\infty} c_x \dot{U}_x, \dots$$

nach Cosseratschen Funktionentripeln erster Art, wobei für diese Reihenentwicklungen die vorherige „Reduktion“ von f_1, f_2, f_3 gar nicht mehr vorausgesetzt zu werden braucht.

Schreiben wir den Cosseratschen Funktionentripeln erster Art zu ihrer vollständigen Bestimmung die Gleichung:

$$(195) \quad \int_{\tau} \{ \dot{\Theta}_x^2 + \dot{u}_x^2 + \mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{B}_x^2 \} = 1$$

vor, so können wir die Koeffizienten c_x der Entwicklung (194) in folgender Weise angeben:

$$(196) \quad c_x = \frac{k_x}{k - k_x} \int \theta_0 \dot{\Theta}_x d\tau. \quad (x = 1, 2, \dots).$$

Die Cosseratschen Funktionentripel erster Art erfüllen die Gleichungen:

$$(197) \quad \int \dot{\Theta}_i \dot{\Theta}_x d\tau = \int (\dot{U}_i \dot{U}_x + \dot{V}_i \dot{V}_x + \dot{W}_i \dot{W}_x) d\tau = 0, \quad (k_i \neq k_x).$$

Im Falle einer Kugel vom Radius R um den Anfangspunkt sind bei den Bezeichnungen (178), (179) die Cosseratschen Funktionentripel erster Art:

$$(198) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_x = \beta_x (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_x}{\partial x}, \\ \dot{V}_x = \beta_x (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_x}{\partial y}, \\ \dot{W}_x = \beta_x (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_x}{\partial z}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_x \text{ eine Konstante, die zur Befriedigung} \\ \text{der Gleichung} \\ \int (\dot{\Theta}_x^2 + \dot{U}_x^2 + \dot{V}_x^2 + \dot{W}_x^2) d\tau = 1 \\ \text{zu verwenden ist.} \end{array} \right.$$

[Die Verallgemeinerung der Lösung des Problem (182), (183) auf den Fall, daß von f_1, f_2, f_3 lediglich Stetigkeit oder selbst nur abteilungsweise Stetigkeit vorausgesetzt wird, ergibt ohne jede Schwierigkeit die kleine Untersuchung in meiner Note „Sur le problème biharmonique et le problème fondamental dans la théorie de l'élasticité“ Comptes Rendus, 151, S. 299, 1910.]

§ 3.

Über die Lösung des biharmonischen Problem (182), (183) auf den Fall, daß von f_1, f_2, f_3 lediglich Stetigkeit oder selbst nur abteilungsweise Stetigkeit vorausgesetzt wird, ergibt ohne jede Schwierigkeit die kleine Untersuchung in meiner Note „Sur le problème biharmonique et le problème fondamental dans la théorie de l'élasticité“ Comptes Rendus, 151, S. 299, 1910.]

Es handelt sich hier um die Spezialfälle:

$$\lambda = +1 \quad \text{und} \quad \lambda = -1$$

des Grundproblem (158).

Aufgabe. (*Biharmonisches Problem*.) Man sucht eine mit ihren ersten und zweiten*) Ableitungen in dem Gebiete τ stetige Funktion φ , welche in τ der Differentialgleichung:

$$(199) \quad \Delta \Delta \varphi = 0$$

genügt, sowie den Randbedingungen:

*) Wir verlangen stillschweigend Stetigkeit von allen endlichen Ableitungen innerhalb τ , also in endlicher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von α .

$$\left. \begin{aligned} (200) \quad & \varphi = \chi, \\ (201) \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \chi' \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega.$$

Vorausgesetzt wird, daß χ eine gegebene mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige, χ' eine gegebene mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktion der Stelle der Fläche ω sind; die Stetigkeit der zweiten Ableitungen von χ und die Stetigkeit der ersten Ableitungen von χ' genüge Hölderschen Bedingungen.

[Die Lösung soll auch auf den Fall verallgemeinert werden, daß die Funktion χ' lediglich stetig und χ derart vorausgesetzt wird, daß eine Potentialfunktion des Gebietes τ mit den Randwerten χ existiert; es ist in diesem Falle auch von den zweiten Ableitungen der Lösung φ nicht mehr zu verlangen, daß sie bis an die Oberfläche ω heran existieren und stetig sind.]

Es ist eine kleine Vereinfachung, wenn wir von vornherein die Bedingung:

$$(202) \quad \int_{\omega} \chi' d\omega = 0$$

hinzunehmen; der allgemeine Fall ist stets auf diesen Fall durch Abspaltung einer Funktion

$$\text{const.} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r}$$

von φ zurückzuführen.

Wir setzen in dem allgemeinen Probleme (158):

$$(203) \quad \lambda = +1$$

und

$$(204) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cos(nx) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{d\omega}{r}, \\ f_2 &= \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cos(ny) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{d\omega}{r}, \\ f_3 &= \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cos(nz) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{d\omega}{r}, \end{aligned} \right.$$

wenn wir unter ψ die Potentialfunktion des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$(205) \quad \psi = \chi$$

verstehen; wir haben es dann mit einem „reduzierten Problem“ (158) zu tun, und wenn wir mit u, v, w die Lösungen dieses Problemcs bezeichnen und

$$(206) \quad U = 2u - \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}, \dots$$

setzen, so sehen wir, die Funktion:

$$(207) \quad \Theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}$$

erfüllt die Bedingungen:

$$(208) \quad \Delta \Delta \Phi = 0, \text{ in } \tau,$$

$$(209) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi + \psi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{d\omega}{r} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cos(nx), \dots \text{ an } \omega;$$

es ist somit:

$$\varphi = \psi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{2\pi} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r},$$

oder

$$(210) \quad \varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi \frac{\cos(rv)}{r^2} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}$$

die Lösung der gestellten Aufgabe.*)

Zur Konstruktion der Funktion θ ergibt sich die folgende Methode: Man konstruiere sukzessive die Potentialfunktionen u_j, v_j, w_j ($j=0, 1, 2, \dots$) des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$(211) \quad \begin{cases} u_0 = \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cos(nx) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{d\omega}{r}, \dots, & \text{an } \omega, \\ u_j = -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \dots, (j=1, 2, \dots), & \text{an } \omega, \end{cases}$$

und setze:

$$(212) \quad \theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \dots$$

Wenn die Lösung dieses Problemes die Entwicklung nach biharmonischen Tripeln:

$$(213) \quad \theta = \sum_{\kappa}^{\infty} C_{\kappa} \Theta_{\kappa}$$

zuläßt, so erhalten wir für die Lösung des biharmonischen Problemes die Entwicklung:

$$(214) \quad \varphi = \text{const.} - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi \frac{\cos(rv)}{r^2} d\omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{\kappa}^{\infty} C_{\kappa} \int_{\tau} \Theta_{\kappa} \frac{d\tau}{r}.$$

*) Daß die additive Konstante Null ist, ergibt sich daraus, daß nach (209):

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} \left(\Phi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{d\omega}{r} \right) \right|_a = 0, \text{ an } \omega.$$

[Die Verallgemeinerung der Lösung des Problems (199), (200), (201) auf den Fall, daß von χ' lediglich Stetigkeit und von χ solche Eigenschaften vorausgesetzt werden, daß nur die Existenz der Potentialfunktion ψ mit den Randwerten

$$\varphi = \chi \quad \text{an } \omega$$

gesichert ist, ergibt unmittelbar die kleine Untersuchung in meiner S. 539 genannten Note.]

Aufgabe. (*Erste Randwertaufgabe in der Theorie der stationären Strömungen mit Reibung begabter Flüssigkeiten.*) Man sucht drei mit ihren ersten Ableitungen in dem Gebiete τ stetige Funktionen u' , v' , w' , welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen:

$$(215) \quad \Delta u' = \Delta v' = \Delta w' = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

und an der Fläche ω die Randwerte besitzen:

$$(216) \quad u' = f_1', \quad v' = f_2', \quad w' = f_3' \quad \text{an } \omega.$$

Vorausgesetzt wird, daß f_1, f_2, f_3 drei gegebene, mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω sind, welche der Bedingung:

$$(217) \quad \int_{\omega} (f_1' \cos(\nu x) + f_2' \cos(\nu y) + f_3' \cos(\nu z)) d\omega = 0$$

genügen; die Stetigkeit der ersten Ableitungen von f_1, f_2, f_3 genüge Hölder'schen Bedingungen.

[Die Lösung soll auch auf den Fall verallgemeinert werden, daß man von f_1, f_2, f_3 lediglich weiß, daß sie selbst stetige Funktionen der Stelle von ω sind; es ist in diesem Falle auch von den ersten Ableitungen der Lösungen u', v', w' nicht mehr zu verlangen, daß sie bis an die Oberfläche ω heran existieren und stetig sind.]

Es ist eine wesentliche Vereinfachung, wenn wir von vornherein die Bedingung:

$$(218) \quad \left(\frac{\partial f_3'}{\partial y} - \frac{\partial f_2'}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1'}{\partial z} - \frac{\partial f_3'}{\partial x} \right) \cos(ny) \\ + \left(\frac{\partial f_2'}{\partial x} - \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right) \cos(nz) = 0, \quad \text{an } \omega$$

vorschreiben; der allgemeine Fall ist stets auf diesen Fall, in welchem keine Wirbelfäden in der Oberfläche ω endigen, durch Abspaltung dreier Funktionen:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{d\tau}{r}, \dots$$

von u', v', w' zurückzuführen, wo ψ eine geeignete Potentialfunktion des

Gebietes τ ist, welche durch die zur Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie führenden Methoden konstruiert werden kann.

Wir setzen nun in dem allgemeinen Probleme (158):

$$(219) \quad \lambda = -1$$

und

$$(220) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= f_1' + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} (f_1' \cos(\nu x) + f_2' \cos(\nu y) + f_3' \cos(\nu z)) \frac{d\omega}{r} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{f_2' \cos(\nu x) - f_1' \cos(\nu y)}{r} d\omega \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{f_1' \cos(\nu z) - f_3' \cos(\nu x)}{r} d\omega \right\}, \dots; \end{aligned} \right.$$

wir haben es dann, wie sich dies leicht mit Hilfe der Gleichungen (217) und (218) ergibt, mit einem reduzierten Probleme (158) zu tun, und wenn wir mit u, v, w die Lösungen dieses Problemcs bezeichnen und

$$(221) \quad U' = + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots$$

setzen, so erfüllen diese Funktionen die Bedingungen:

$$(222) \quad \Delta U' = \Delta V' = \Delta W' = 0, \quad \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z} = 0, \quad \text{in } \tau,$$

$$(223) \quad \left\{ \begin{aligned} U' &= f_1' + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} (f_1' \cos(\nu x) + f_2' \cos(\nu y) + f_3' \cos(\nu z)) \frac{d\omega}{r} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} (f_2' \cos(\nu x) - f_1' \cos(\nu y)) \frac{d\omega}{r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} (f_1' \cos(\nu z) - f_3' \cos(\nu x)) \frac{d\omega}{r} \right\}, \dots \text{ an } \omega; \end{aligned} \right.$$

es sind somit:

$$(224) \quad u' = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{u'}{r} d\omega + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{v' \cos(\nu x) - u' \cos(\nu y)}{r} d\omega \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{u' \cos(\nu z) - w' \cos(\nu x)}{r} d\omega \right\} + U', \dots$$

die Lösungen der gestellten Aufgabe.

Zur Konstruktion der Funktionen u, v, w ergibt sich die folgende Methode:

Man konstruiere sukzessive die Potentialfunktionen

$$u_j, v_j, w_j \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$(225) \left\{ \begin{aligned} u_0 &= u' + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{u'_x}{r} d\omega - \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{v' \cos(vx) - u' \cos(vy)}{r} d\omega \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{u' \cos(vz) - w' \cos(vx)}{r} d\omega \right\}, \dots \\ u_j &= -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{W}_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{V}_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \dots, (j=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \text{an } \omega$$

und setze:

$$(226) \quad u = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots, \dots$$

Wenn die Lösung dieses Problemes die Entwicklung nach biharmonischen Tripeln:

$$(227) \quad u = \sum_x C_x u_x, \dots$$

zuläßt, so erhalten wir für die Lösung des in Frage stehenden Problemes die Entwicklungen:

$$(228) \left\{ \begin{aligned} u' &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{u'_x}{r} d\omega + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{v' \cos(vx) - u' \cos(vy)}{r} d\omega \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{u' \cos(vz) - w' \cos(vx)}{r} d\omega \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_x C_x \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{W}_x \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{V}_x \frac{d\tau}{r} \right\}, \dots \end{aligned} \right.$$

[Die Verallgemeinerung der Lösung des Problemes (215), (216) auf den Fall, daß von f'_1, f'_2, f'_3 außer der Bedingung:

$$\int_{\omega} (f'_1 \cos(vx) + f'_2 \cos(vy) + f'_3 \cos(vz)) d\omega$$

lediglich Stetigkeit vorausgesetzt wird, ergibt unmittelbar die kleine Untersuchung in meiner Note „Sur les mouvements stationnaires d'un liquide doué de frottement“, Comptes Rendus 151, S. 50, 1910].