ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 41.

1. *Theorie des lichtelektrischen Effektes vom Standpunkt des Wirkungsquantums; von P. Debye und A. Sommerfeld.*

Inhalt: § 1. Einleitung und Allgemeines p. 873. — *I. Teil. Monochromatisches Licht* p. 881. § 2. Vollkommene Resonanz zwischen auf fallender Welle und Eigenschwingung p. 881. § 3. Unvollständige Resonanz p. 887. § 4. Die Kurven der Wirkung und der kinetischen Energie p. 890. § 5. Ergänzungen und Modifikationen p. 894. § 6. Einfluß der Dämpfung p. 898. — *II. Teil. Natürliches Licht* p. 903. § 7. Allgemeiner Ausdruck für die durch natürliches Licht erzeugte lichtelektrische Energie und die zugehörige Akkumulationszeit p. 903. § 8. Die Schwankungen der Energie und der Akkumulationszeit p. 908. § 9. Nachträgliche Berechnung zweier Integrale p. 914. § 10. Zusammenfassende und kritische Bemerkungen zu der vorgetragenen Theorie. Vergleich mit der Erfahrung p. 922.

§ 1. Einleitung und Allgemeines.

Während die Ausbreitung der elektromagnetischen Wirkungen in Raum und Zeit nach unserer Erfahrung durch die Maxwell'schen Gleichungen ihre vollkommene Darstellung findet, steht die heutige theoretische Physik vor ernststen Schwierigkeiten, wo es sich um die Erzeugung oder Absorption von Licht, die Erzeugung lichtelektrischer Wirkungen oder sekundärer Strahlungen handelt. Diese Schwierigkeiten haben sogar (in der Lichtquantenvorstellung) zu einer völligen Abkehr von der ursprünglichen Maxwell'schen Theorie und zu Konstruktionen geführt, die zwar die genannten Schwierigkeiten in glücklicher Weise heben, dafür aber auf anderen Gebieten — namentlich bei den fundamentalen Interferenzfragen — um so ernstere Schwierigkeiten schaffen.

In der Überzeugung, daß die Plancksche Entdeckung des universellen Wirkungsquantums dazu berufen ist, die augenblicklichen Leiden der theoretischen Physik zu heilen,

haben wir den typischen Vorgang der Energiekonzentration im lichtelektrischen Effekt vom Standpunkte des Wirkungsquantums genau diskutiert, anknüpfend an die Auffassung des Wirkungsquantums als einer gemeinsamen Eigenschaft aller reinen Molekularprozesse, emissiver oder absorptiver Art, die der eine von uns¹⁾ an einigen Beispielen zahlenmäßig begründet hat. Diese Auffassung wird hier — ganz im Anschluß an die Plancksche Nomenklatur des *Wirkungsquantums*²⁾ h und an eine wichtige Bemerkung in der Planckschen Dynamik bewegter Systeme³⁾ — für die Zwecke des lichtelektrischen Effektes folgendermaßen präzisiert:

Ein Atom häuft so lange auffallende Schwingungsenergie in der Bewegung seiner Elektronen auf, bis die Wirkungsgröße

$$\int (T - U) dt$$

den Betrag $h/2\pi$ erreicht hat; hier bedeutet, wie im Wirkungsprinzip der Mechanik, T die kinetische, U die potentielle Energie (hier die Energie der quasielastischen Bindung) des betrachteten Elektrons, h die Konstante des Strahlungsgesetzes. Ist die Wirkungsgröße $h/2\pi$ erstmalig erreicht, so wird das Elektron aus dem Atomverbande frei mit der gerade erreichten kinetischen Energie T .

Obwohl stark idealisierend in der Berücksichtigung nur eines der im Atom enthaltenen Elektronen und in der Annahme der quasielastischen Bindung scheint uns diese unsere Grundhypothese geeignet, einige wesentlichen Erscheinungen des lichtelektrischen Effektes wiederzugeben.

Natürlich ist unsere Grundhypothese aus der Maxwell'schen Elektrodynamik nicht zu folgern, sondern fügt ihr, ge-

1) A. Sommerfeld, Über die Struktur der γ -Strahlen, Sitzungsber. der Bayer. Akademie 1911. p. 1. §§ 4—6. Das Plancksche Wirkungsquantum und seine allgemeine Bedeutung für die Molekularphysik, Bericht für die Naturforscherversammlg. 1911 in Karlsruhe, Physik. Ztschr. 12. p. 1057, sowie Congrès Solvay, Brüssel 1911.

2) Im Gegensatz zum *Energiequantum*, das vermutlich nur eine aus dem Wirkungsquantum abgeleitete Bedeutung, und zwar nur für periodische Vorgänge, beanspruchen kann.

3) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Sitzungsber. d. Preußischen Akademie 1907, vgl. insbesondere den Schluß von § 12.

wissermaßen als Definition des Atoms, etwas Fremdes hinzu. Sie unterscheidet sich aber in ihrem Verhältnis zur Elektrodynamik insofern von der Lichtquantentheorie, als sie mit der Elektrodynamik nirgends in Widerspruch tritt, vielmehr diese ergänzt bezüglich des Ablaufes solcher Prozesse, über die die Elektrodynamik von sich aus nichts weiß.

Um unsere Auffassung in vorläufiger Form zu charakterisieren, stellen wir sie den beiden bisher ausgebildeten Anschauungen von der Natur des lichtelektrischen Effektes gegenüber¹⁾: „der Vorstellung einer auf *Resonanzwirkung* beruhenden Auslösung der Elektronen durch die auffallende Strahlung, bei der die Elektronenenergie vor dem Auffallen der Strahlung bereits im Atom vorhanden ist (Lenard), und der *Lichtquantenhypothese*, bei der die Elektronenenergie der wirkenden Strahlung entstammt“ (Einstein).

Dem ersteren Standpunkt entsprechend betrachten auch wir einen Resonanzvorgang, bei dem das Elektron durch die elektrischen Kräfte der auffallenden Welle in Bewegung gesetzt wird, unter denselben einfachsten Bedingungen, die sich in der Dispersionstheorie bewährt haben. Dabei bestimmen wir aber die Dauer dieses Resonanzvorganges, die „Akkumulationszeit τ “, aus der obigen Hypothese des Wirkungsquantums; dieselbe wird um so länger ausfallen, je kleiner die auffallende Intensität ist. Hierdurch wird die Anhäufung einer Energiemenge ermöglicht, die unabhängig ist von der Intensität des Lichtes und von seiner Wirkungsdauer und die Größenordnung der beobachteten lichtelektrischen Energie hat. Wir brauchen also nicht auf die Energie des Atoms zurückzugreifen, sondern sehen als Quelle der lichtelektrischen Energie die primäre Strahlung an.

In dieser Hinsicht nähern wir uns also dem zweiten der genannten Standpunkte, ohne deshalb nötig zu haben, über die Struktur der Strahlung neue Voraussetzungen zu machen. Auch sonst stimmen unsere Resultate wesentlich mit denen

1) Wir zitieren hier R. Ladenburg, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 6. p. 476. 1909. Es sei bemerkt, daß Lenard für den lichtelektrischen Effekt in Gasen neuerdings ebenfalls annimmt, daß die Energie der primären Strahlung entstammt, vgl. C. Ramsauer, Physik. Zeitschr. 12. p. 998. 1911.

der Lichtquantenhypothese überein: Aus unserer Grundhypothese folgt nämlich Unabhängigkeit der lichtelektrischen Energie von der auffallenden Intensität, Abhängigkeit von der auffallenden Schwingungszahl ν gemäß dem *Einsteinschen Gesetz*¹⁾

$$T = h \nu;$$

und zwar gelten beide Aussagen bei uns strenge nur für den ausgezeichneten Fall der vollkommenen Resonanz zwischen der auffallenden (für diesen Fall als monochromatisch vorauszusetzenden) Schwingung und der Eigenschwingung des Elektrons. Im allgemeinen Fall läßt unsere Betrachtung die Möglichkeit von selektiven Materialeinflüssen vorhersehen (nicht nur bezüglich der Menge, sondern auch bezüglich der Geschwindigkeitsverteilung der lichtelektrischen Elektronen), indem es bei uns außer auf die Schwingungszahl ν auch auf die Eigenschwingungszahl ν_0 des Elektrons wesentlich ankommt.

Den allgemeinen Gedanken unserer Hypothese zeigt die folgende Betrachtung, auf die wir uns später mehrfach beziehen werden:

Das Elektron sei durch eine quasielastische Kraft $-fx$ an seine Ruhelage ($x=0$) gebunden und werde aus dieser durch eine auffallende monochromatische Welle $\mathfrak{E} = E \cos nt$ herausbewegt, deren elektrische Kraft die X -Richtung haben möge. Sehen wir von der Strahlungsdämpfung ab, so lautet die Bewegungsgleichung des Elektrons:

$$m \ddot{x} + fx = e \mathfrak{E} = e E \cos nt$$

und es wird seine kinetische und potentielle Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{f}{2} x^2.$$

Das Wirkungsintegral W formen wir mit Benutzung der Bewegungsgleichung in typischer Weise durch partielle Integration um:

1) Von der bei Einstein hinzutretenden Austrittsarbeit des Elektrons aus der Oberfläche des Metalles sehen wir ab, da sie nicht zu dem eigentlichen Prozeß der Befreiung des Elektrons aus dem Atom gehört.

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{\tau} (T - U) dt = \int_0^{\tau} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{f}{2} x^2 \right) dt \\
 &= \frac{m}{2} x \dot{x} - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} x (m \ddot{x} + f x) dt = \frac{m}{2} x \dot{x} - \frac{e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt.
 \end{aligned}$$

Der vom Integralzeichen befreite Term bezieht sich lediglich auf die Endzeit τ , da zur Anfangszeit Null Ruhe herrschen soll ($x = \dot{x} = 0$). Wir haben zu zeigen, daß dieser Term gleich ist der kinetischen Energie des Elektrons zur Zeit τ , geteilt durch dessen Eigenfrequenz n_0 .¹⁾

Man stelle sich zu dem Ende den zeitlichen Verlauf von W vor, wie er später in Fig. 1 für einen besonderen Fall skizziert wird, als eine oszillierende Kurve, deren Amplitude von Null an wächst. Soll W erstmalig den Wert $h/2\pi$ erreichen, so kann dies nur in der Nähe eines Maximums geschehen, weil anderenfalls schon in der vorangehenden Schwingung der Ordinatenwert $h/2\pi$ ebenfalls erreicht worden wäre. Wir haben also für unsere Akkumulationszeit τ :

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad T = U,$$

das heißt:

$$\dot{x}^2 = \frac{f}{m} x^2.$$

Nun bestimmt $\sqrt{f/m}$ die Eigenfrequenz n_0 der freien Schwingungen des Elektrons; also wird (vom Vorzeichen abgesehen, vgl. hierzu § 5):

$$\dot{x} = n_0 x \quad \text{und} \quad \frac{m}{2} x \dot{x} = \frac{1}{n_0} \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{T}{n_0}$$

wie behauptet wurde. Indem wir noch in unserer Gleichung für das Wirkungsintegral $W = h/2\pi$ setzen, ergibt sich:

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{T}{n_0} - \frac{e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt$$

1) Wir unterscheiden „Frequenz“ n und „Eigenfrequenz“ n_0 von „Schwingungszahl“ ν und „Eigenschwingungszahl“ ν_0 , wobei $n = 2\pi\nu$, $n_0 = 2\pi\nu_0$.

oder bei Einführung der Eigenschwingungszahl $\nu_0 = n_0/2\pi$:

$$(a) \quad T = \nu_0 h + \frac{n_0 e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt.$$

Würde man die Akkumulationszeit τ kennen, so ließe sich das Integral auf der rechten Seite ausrechnen; dann würde unsere Gleichung (a) direkt die Energie T des lichtelektrischen Elektrons liefern. In Wirklichkeit müssen wir aber diese Gleichung zunächst als Bestimmungsgleichung für die Akkumulationszeit ansehen und zu dem Zwecke für T seinen Wert zur Zeit τ anderweitig berechnen. Hierbei wird sich der folgende Kunstgriff vielfach als nützlich erweisen.

Es ist für $t = \tau$ wie bemerkt:

$$T = U = \frac{1}{2}(T + U).$$

Nun ist die Gesamtenergie $T + U$ des Elektrons eine mit der Zeit langsam veränderliche Größe, die durch ihren Mittelwert während einer Schwingung ersetzt werden darf. Dieser Mittelwert ist zugleich gleich dem doppelten Mittelwerte der kinetischen oder der potentiellen Energie. Bezeichnen wir die Mittelbildung für eine Schwingungsdauer in der Nähe der Zeit τ durch Überstreichen, so wird also

$$(b) \quad T = \frac{1}{2}(\overline{T + U}) = \bar{U} = \frac{f}{2} \overline{x^2} = n_0^2 \frac{m}{2} \overline{x^2}.$$

Indem wir diesen Wert von T in (a) einsetzen, haben wir die gewünschte Bestimmungsgleichung von τ ; τ kommt dann in (a) sowohl linkerhand in dem Faktor $\overline{x^2}$, wie rechterhand in dem Zeitintegral vor. Ist τ auf solche Weise gefunden, so entnimmt man die Energie des lichtelektrischen Elektrons direkt aus (b).

Die Untersuchung des in (a) noch verbleibenden Integrals, einer Art „Zeitvirial“, sowie des in (b) auftretenden Mittelwertes, deren Berechnung verschieden ausfällt, je nachdem wir vollkommene oder nicht vollkommene Resonanz, dämpfungs-freie oder gedämpfte Bewegung, monochromatisches oder statistisches Licht voraussetzen, muß für die Spezialdiskussion zurückgestellt werden. Dieselbe wird ergeben, daß in der Nähe der Resonanz ($n = n_0$) unser Zeitvirial vernachlässigt

werden kann, daß es aber bei unvollkommener Resonanz wesentlich ist, derart, daß durch sein Hinzutreten die lichtelektrische Energie T im allgemeinen unter den Wert $\nu_0 h$ heruntergedrückt, unter Umständen auch diesen Wert überschreiten kann, ferner daß bei der normalen elektromagnetischen Dämpfung eine lichtelektrische Energie vom Betrage $\nu_0 h$ überhaupt unmöglich ist, daß wir also die Dämpfung als unternormal klein voraussetzen müssen, endlich daß bei natürlichem Licht (d. h. bei Licht von unbekannter oder nur statistisch bekannter Zusammensetzung), auch wenn es den praktisch erreichbaren höchsten Grad des Monochromatismus einer engen Spektrallinie besitzt, eine starke Streuung der Energie stattfindet um denjenigen Wert herum, der einem idealen monochromatischen Wellenzuge von der mittleren Schwingungsdauer des erregenden Lichtes entsprechen würde.

Daraufhin zeigen unsere Umformungen (a) und (b) folgendes:

I. Bei vollkommener Resonanz zwischen der Eigenschwingung des Elektrons und der Schwingungszahl des auffallenden, rein monochromatisch vorausgesetzten Wellenzuges ist die kinetische Energie des lichtelektrischen Elektrons unabhängig von der Intensität des auffallenden Lichtes und universell bestimmt durch dessen Schwingungszahl, nämlich gleich $h\nu = h\nu_0$. Sie ist also auch unabhängig von der Akkumulationsdauer τ , die bis zur Anhäufung eines vollen Wirkungsquantums verstreichen mußte, und die ihrerseits natürlich durch die Intensität des auffallenden Lichtes bestimmt wird.

II. Wird das auffallende Licht wieder als rein monochromatisch vorausgesetzt, aber seiner Schwingungszahl nach als verschieden von der Eigenschwingung des Elektrons, so ergibt sich für die lichtelektrische Energie eine Zackenkurve, die zur Abszisse $(\nu - \nu_0)\tau$ aufgetragen ein scharfes Maximum in der Nähe der Resonanzstelle besitzt. Diese Kurve hängt von der auffallenden Intensität nur insofern ab, als der Maßstab auf der Abszissenachse durch Vermittelung der Akkumulationszeit τ von der Intensität abhängig ist: Bei schwacher Intensität (τ groß) treten nur in der unmittelbaren Nähe der Resonanz ($\nu - \nu_0$ sehr klein) erhebliche lichtelektrische Energien auf, bei größerer Intensität (τ kleiner) verbreitert sich die Zacke über ein größeres

Gebiet der Werte $\nu - \nu_0$. Indem wir in unserer Grundhypothese das Wirkungsintegral gleich $+h/2\pi$ (nicht gleich $-h/2\pi$) setzen, erreichen wir, daß eine Art Stokesscher Regel gilt: Es können im wesentlichen nur Wellen von größerer Frequenz als der Eigenfrequenz des Elektrons lichtelektrisch wirken.

III. Die (durch Ausstrahlung bedingte) Dämpfung des Elektrons muß dabei einen erheblich kleineren Wert haben, als er für ein einzelnes isoliertes Elektron elektromagnetisch berechnet wird. Bei der normalen elektromagnetischen Dämpfung würde eine Befreiung des Elektrons im Resonanzfalle überhaupt illusorisch werden und würden sich bei der unvollkommenen Resonanz nur sehr kleine lichtelektrische Energien ergeben. Ist dagegen die Dämpfung unternormal, d. h. beträgt sie nur einen gewissen Bruchteil der normalen Dämpfung, so bestehen die Aussagen unter I. und II. zu Recht; insbesondere wird dann die lichtelektrische Energie im Resonanzfalle, unabhängig von der Größe der Dämpfung, genau gleich $h\nu$.

IV. Läßt man die (physikalisch natürlich unzulässige) Voraussetzung eines strengen Monochromatismus fallen, und setzt das auffallende Licht als eine enge Spektrallinie voraus, von der nur die durchschnittliche Intensität bekannt ist, so ergibt sich statt eines bestimmten Wertes von T und τ je ein Verteilungsgesetz für diese beiden Größen. Bei der Ermittlung desselben haben wir uns auf das dämpfungsfreie Elektron und auf das Analogon zur vollkommenen Resonanz beschränkt, also auf den Fall, wo der Schwerpunkt der Spektrallinie mit der Eigenfrequenz des Elektrons koinzidiert. Während bei monochromatischer Betrachtungsweise die erfahrungsmäßige Kohärenz des Lichtes der Auslösung des Elektrons eine Grenze setzen würde, sobald die dazu erforderliche Akkumulationszeit die Kohärenzdauer übersteigt, füllt diese Schwierigkeit bei statistischer Behandlung naturgemäß fort: Jeder einzelne Bestandteil des natürlichen Lichtes, wie er sich durch die Fouriersche Analyse ergibt, ist definitionsgemäß unbegrenzt kohärent; die Störung aber, welche die Wirkung je eines Bestandteiles durch die der übrigen erfährt, wird bei der statistischen Behandlung statistisch berücksichtigt.

V. Die Möglichkeit unserer Umformungen, die zu den Gleichungen (a) und (b) führten, ist durchaus gebunden an die

besondere Form unserer Grundhypothese, nach der wir verlangen:

$$\int_0^{\tau} (T - U) dt = \frac{h}{2\pi}.$$

Würden wir hier statt des „kinetischen Potentials“ $T - U$ etwa die kinetische Energie T oder die Gesamtenergie $T + U$ substituieren, so würde unsere Umformung, die auf der Benutzung der Bewegungsgleichung beruht, und damit unsere Erklärung des lichtelektrischen Effektes hinfällig werden. Es ist dies genau derselbe formale Umstand, der im Hamiltonschen Prinzip der Mechanik das Auftreten von $T - U$ bedingt und dort gestattet, umgekehrt die Bewegungsgleichungen aus dem Wirkungsprinzip zu entnehmen.

Erster Teil.

Monochromatisches Licht.

§ 2. Vollkommene Resonanz zwischen auffallender Welle und Eigenschwingung.

Um das Wesentliche unseres Gedankenganges hervortreten zu lassen, stellen wir den folgenden einfachsten Idealfall voran und behandeln ihn durch direkte Ausrechnung, ohne die hier entbehrlichen allgemeinen Umformungen und Kunstgriffe des § 1 zu benützen:

Die auffallende Welle ist rein harmonisch von der Frequenz n (Schwingungszahl in 2π Zeiteinheiten). Ihr elektrischer Bestandteil kann also geschrieben werden¹⁾:

$$\mathcal{E} = E \cos nt.$$

Das von ihr getroffene Elektron ist durch den Atomverband quasielastisch an eine Ruhelage ($x = 0$) gebunden, derart, daß die rücktreibende Kraft gesetzt werden kann gleich

$$-fx.$$

1) Auf die Phase, mit der die anregende Schwingung bei $t = 0$ einsetzt, kommt es nicht an, wie man sich nachträglich überzeugen kann; dieselbe durfte daher speziell gewählt werden.

Ist m die Elektronenmasse, so wird die Eigenfrequenz, die mit der auffallenden Welle in Resonanz stehen soll:

$$(1) \quad n^2 = \frac{f}{m}.$$

Von der Dämpfung sehen wir zunächst ab.

Unsere Grundhypothese lautet, daß das Elektron das Molekül dann verläßt, wenn die „Wirkung“ gleich $h/2\pi$ geworden ist. Bezeichnet man die „Wirkungszeit“ oder „Akkumulationszeit“ mit τ , so soll also gelten:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} W = \int_0^{\tau} (T - U) dt = \frac{h}{2\pi}, \\ T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{f}{2} x^2. \end{array} \right.$$

Die Ausschwingung x des Elektrons ist aus der Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + f'x = e \mathcal{E}$$

zu entnehmen, die wir nach den vorangehenden Erklärungen auch schreiben können:

$$(3) \quad \ddot{x} + n^2 x = \frac{e E}{m} \cos n t.$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$x = \dot{x} = 0 \text{ für } t = 0$$

lautet ihr Integral

$$(4) \quad x = \frac{e E}{2 m n} t \sin n t.$$

Die Schwingungen wachsen also in diesem Idealfalle (Resonanz ohne Dämpfung) unbegrenzt an.

Hieraus folgt

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{e E}{2 m n} (\sin n t + n t \cos n t), \\ T &= \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (\sin n t + n t \cos n t)^2. \end{aligned}$$

Andererseits wegen (1):

$$(6) \quad U = \frac{f}{m} \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (t \sin n t)^2 = \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (n t \sin n t)^2.$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$\begin{aligned} T - U &= \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (\sin^2 n t + n t \sin 2 n t + n^2 t^2 \cos 2 n t) \\ &= \frac{(e E)^2}{16 m n^2} \left(1 - \cos 2 n t + \frac{d}{dt} \{ n t^2 \sin 2 n t \} \right). \end{aligned}$$

Durch Integration ergibt sich:

$$W = \int_0^{\tau} (T - U) dt = \frac{(e E)^2}{16 m n^2} \left(\tau - \frac{\sin 2 n \tau}{2 n} + n \tau^2 \sin 2 n \tau \right)$$

oder

$$(7) \quad W = \frac{(e E \tau)^2}{16 m n} \left(\sin 2 n \tau + \frac{1}{n \tau} - \frac{\sin 2 n \tau}{2 (n \tau)^2} \right).$$

Wir sehen $n \tau$ als große Zahl an, vorbehaltlich der nachfolgenden Bestätigung dieser Annahme. Dann wird der Wert der Klammer wesentlich bestimmt durch das erste Glied $\sin 2 n \tau$. Soll aber bei wachsendem τ die Wirkung W erstmalig den Wert $h/2\pi$ erreichen, so kann dies nur in unmittelbarer Nähe eines Maximalwertes

$$(8) \quad \begin{cases} \sin 2 n \tau = 1, & \cos 2 n \tau = 0, \\ \cos^2 n \tau = \sin^2 n \tau = \frac{1}{2} \end{cases}$$

stattfinden. Man betrachte zur Erläuterung dessen die Fig. 1, welche W als Funktion von t darstellt und erkennen läßt, daß die Wirkungskurve von der (in der Figur gestrichelten) Geraden $W = h/2\pi$ nur in der Nähe einer ihrer positiven Maximalelongationen geschnitten werden kann.

Fig. 1.

Aus (7) und (8) folgt in Annäherung:

$$(9) \quad W = \frac{(e E \tau)^2}{16 m n}.$$

Berechnen wir nun für den gleichen Wert von τ die kinetische Energie. Nach (5) ist

$$T = \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (\sin^2 n \tau + 2 n \tau \sin n \tau \cos n \tau + (n \tau)^2 \cos^2 n \tau).$$

Wegen unserer Voraussetzung eines großen Wertes von $n\tau$ können wir mit Annäherung auch schreiben

$$(10) \quad T = \frac{(e E \tau)^2}{8 m} \cos^2 n \tau,$$

oder wegen (8)

$$(11) \quad T' = \frac{(e E \tau)^2}{16 m n}.$$

Soll das Elektron lichtelektrisch frei werden können, so ist nach unserer Grundhypothese und Gleichung (9):

$$W = \frac{h}{2\pi} = \frac{(e E \tau)^2}{16 m n}.$$

Dann beträgt aber, wie der Vergleich mit (11) zeigt, seine kinetische Energie:

$$(12) \quad T = h \frac{n}{2\pi} = h \nu.$$

Dies ist das *Einsteinsche Gesetz*, mit dem Unterschiede, daß die in der Einsteinschen Formel noch auftretende additive Konstante (das Austrittspotential P) hier fortfällt. Diese ist offenbar dem reinen Molekularprozeß fremd und würde sich erst ergeben können, wenn wir das lichtelektrische Quantum auf seinem weiteren Wege durch die Oberfläche des Metalles verfolgen wollten.

Der Vergleich dieser direkten Ausrechnung von T mit der allgemeinen Formel (a) des vorigen Paragraphen zeigt, daß das dort hinzutretende Integral

$$J = \frac{n_0 c}{2} \int_0^\tau x \mathfrak{E} dt$$

im Falle der Resonanz verschwinden muß oder, genauer gesagt, gegen T vernachlässigt werden kann. Wir bestätigen dies der Vollständigkeit wegen.

Es ist nach (4)

$$\begin{aligned} J &= \frac{(e E)^2}{4 m} \int_0^\tau t \sin n t \cos n t dt \\ &= \frac{(e E)^2}{8 m} \int_0^\tau t \sin 2 n t dt = \frac{(e E)^2}{16 m n} \left(-\tau \cos 2 n \tau + \frac{\sin 2 n \tau}{2 n} \right), \end{aligned}$$

also wegen (8):

$$J = \frac{(e E)^2}{32 \pi n^2}.$$

Vergleichen wir dies mit dem für T gefundenen Werte (11), so ergibt sich

$$(13) \quad \frac{J}{T} = \frac{1}{2 (n \tau)^2},$$

also in der Tat eine verschwindende Zahl. Im Falle der Resonanz liefert also unser „Zeitvirial“ in Formel (a) keinen merklichen Beitrag zu T .

Neben der Energie T haben wir als zweite Unbekannte stets die Akkumulationszeit τ anzusehen. Aus (9) ergibt sich, wenn wir dort $W = h/2\pi$ setzen:

$$(14) \quad \tau^2 = \frac{16 \pi n h}{2 \pi (e E)^2}, \quad (\nu \tau)^2 = \frac{16 \pi \nu^3 h}{(e E)^2}.$$

Diese Gleichung stimmt inhaltlich überein mit einer Formel von H. A. Lorentz.¹⁾ Unter geeigneten Annahmen über die auffallende Amplitude E schließt man daraus, daß sich für $\nu \tau$ eine sehr große Zahl ergibt. Nehmen wir z. B. mit Lorentz an, daß in unserem auffallenden monochromatischen Wellenzuge der millionste Teil der auf die Erdoberfläche auffallenden Intensität der Sonne konzentriert wäre. Dann wäre die erregende Intensität 2 erg/sec cm^2 (entsprechend einem Werte der Solarkonstante von $2 \cdot 10^6 \text{ erg/sec cm}^2$); die Raumdichte der erregenden Strahlung (gleich Intensität/Lichtgeschwindigkeit) wäre dann $\frac{2}{3} 10^{-10} \text{ erg/cm}^3$ und, da diese gleich $E^2/2$ ist, hätten wir

$$E^2 = \frac{4}{3} 10^{-10}.$$

Ferner ist (wir benutzen sog. rationelle Einheiten)

$$e = \sqrt{4\pi} \cdot 4,7 \cdot 10^{-10}, \quad m = 0,9 \cdot 10^{-27}, \quad h = 6,55 \cdot 10^{-27}$$

und bei einer Wellenlänge von $0,3 \mu$

$$\nu = 10^{15}.$$

1) Vgl. H. A. Lorentz, Physik. Zeitschr. 11. p. 1251. 1910: „Alte und neue Fragen der Physik“. Eine Abweichung um den Faktor 2 rührt daher, daß Lorentz fragt, wann die Energie erstmalig den Wert $h \nu$ erreicht, wir dagegen, wann W erstmalig den Wert $h/2\pi$ oder, was dasselbe ist (vgl. den Schluß dieses Paragraphen), wann die Gesamtenergie erstmalig den Wert $2 h \nu$ erreicht.

Daraus ergibt sich nach Gleichung (14) rund

$$\nu \tau = 10^{10}.$$

Es würden also 10^{10} Einzelschwingungen verstreichen, bis der Akkumulationsprozeß beendet ist. Daß diese Zahl die bekannten Kohärenzverhältnisse des Lichtes bedeutend übersteigt, daß es also erfahrungsgemäß so lang andauernde monochromatische Wellenzüge nicht gibt, ist kein Einwand gegen unsere Auffassung des lichtelektrischen Effektes. Wir müssen die Annahme des monochromatischen Lichtes ohnehin später fallen lassen und die ganze Frage statistisch wenden. An dieser Stelle kam es uns nur darauf an, die Annahme zu rechtfertigen, daß $n \tau$ eine große Zahl sei, eine Annahme, von der bei Gleichung (7) und (13) Gebrauch gemacht wurde.

Wir wollen schließlich noch die Ausschwingung des Elektrons, d. h. seinen Abstand x von der Gleichgewichtslage berechnen im Momente, wo es das Atom verläßt.

Nach (4) und (8) ist

$$x = \frac{e E \tau}{2 \sqrt{2} m n}.$$

Aus (14) ergibt sich

$$e E \tau = 2 \sqrt{\frac{2 m n h}{\pi}},$$

also

$$(15) \quad x = \sqrt{\frac{h}{m n \pi}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß auch diese Größe *unabhängig von der Intensität des Lichtes ist und sich universell aus dessen Frequenz bestimmt*, wie übrigens unmittelbar aus der für $t = \tau$ gültigen Beziehung $T = U$ folgt.

Zahlenmäßig ergibt sich, wenn wir wieder

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27}, \quad m = 0,9 \cdot 10^{-27}, \quad \nu = 10^{15},$$

also

$$n = 2 \pi \cdot 10^{15}$$

nehmen, rund

$$x = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Dies ist durchaus die Größe der molekularen Wirkungssphäre. Bei kleinerer Schwingungszahl (rotes Licht) würde die von

uns zu berechnende Ausschwingung x dagegen jene Größe etwas überschreiten. Es entsteht die Frage, die hier unbeantwortet bleiben wird: Wie verhält sich das Elektron, wenn es aus der molekularen Wirkungssphäre hinaustritt, ohne daß nach unserer Grundhypothese die Bedingung für sein lichtelektrisches Freiwerden erreicht ist? Darf man die quasi-elastische Kraft auch dann noch wirkend denken? In diesem Zusammenhange darf vielleicht darauf hingewiesen werden, daß die Alkalien mit ihrer lichtelektrischen Empfindlichkeit im Roten ein besonders großes Atomvolumen haben.

Übrigens bemerke man, daß das Elektron nach unserer Phasenbedingung (8), $\sin 2n\tau = 1$, nicht bei maximaler Ausschwingung oder maximaler Geschwindigkeit fortfliegt, sondern bei der Schwingungsphase $\pi/4$, wo nach Gleichung (8)

$$\sin n\tau = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist. Damit hängt es zusammen, daß beim Fortfliegen des Elektrons dem Molekül ein gleich großer Betrag an potentieller Energie verbleibt, entsprechend der in § 1 besprochenen und in Fig. 1 zum Ausdruck gebrachten Maximalbedingung

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \text{ für } t = \tau.$$

§ 3. Unvollständige Resonanz.

Die erregende Welle werde wie in § 2 als rein harmonisch angesetzt: Amplitude E , Frequenz n . Das Elektron sei quasi-elastisch schwingungsfähig, aber mit einer Eigenfrequenz n_0 , die von n verschieden ist. Dabei gilt

$$n_0^2 = \frac{f}{m}.$$

Die Bewegungsgleichung wird (vgl. Gleichung (3)):

$$(16) \quad \ddot{x} + n_0^2 x = \frac{eE}{m} \cos nt.$$

Ihre Lösung lautet, wenn das Elektron anfangs in Ruhe war

$$(x = \dot{x} = 0 \text{ für } t = 0)$$

$$(17) \quad x = -\frac{eE}{m} \frac{\cos nt - \cos n_0 t}{n^2 - n_0^2}.$$

Anstatt nun wie im § 2 mit diesem Werte von x den Ausdruck von W direkt auszurechnen, stützen wir uns hier auf die allgemeine Formel (a) des § 1 und berechnen in dieser das Integral

$$J = \frac{n_0 e}{2} \int_0^\tau x \mathfrak{E} dt = \\ - \frac{n_0 (e E)^2}{2 m (n^2 - n_0^2)} \left\{ \int_0^\tau \cos^2 n t dt - \int_0^\tau \cos n t \cos n_0 t dt \right\}.$$

Nun hat man

$$(18) J_1 = \int_0^\tau \cos^2 n t dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau (1 + \cos 2 n t) dt = \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{\sin 2 n \tau}{2 n \tau} \right)$$

und

$$J_2 = \int_0^\tau \cos n t \cos n_0 t dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau \{ \cos (n - n_0) t + \cos (n + n_0) t \} dt \\ = \frac{\sin (n - n_0) \tau}{2 (n - n_0)} + \frac{\sin (n + n_0) \tau}{2 (n + n_0)}.$$

oder

$$(19) J_2 = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\sin (n + n_0) \tau}{(n + n_0) \tau} \right)$$

mit der Abkürzung

$$(20) \varepsilon = (n - n_0) \tau.$$

Unter der ebenso wie im vorigen Paragraphen zu bestätigenden Annahme $n \tau \gg 1$, $n_0 \tau \gg 1$, die aber keineswegs etwa $(n - n_0) \tau = \varepsilon \tau \gg 1$ zur Folge hat, kann man in J_1 und J_2 offenbar je einen Term streichen und erhält:

$$(21) J_1 = \frac{\tau}{2}, \quad J_2 = \frac{\tau}{2} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon},$$

somit

$$(22) \left\{ \begin{aligned} J &= - \frac{n_0 (e E)^2 \tau}{4 m (n^2 - n_0^2)} \left(1 - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right) \\ &= - \frac{n_0 (n + n_0)}{4 m} \left(\frac{e E}{n^2 - n_0^2} \right)^2 (\varepsilon - \sin \varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Wir stützen uns ferner zur Berechnung von T auf die Formel (b) des § 1. Nach dieser und Gleichung (17) ist

$$T = \frac{n_0^2}{2 m} \left(\frac{e E}{n^2 - n_0^2} \right)^2 [\cos^2 n t + \cos^2 n_0 t - 2 \cos n t \cos n_0 t]_m.$$

Der Index m an der eckigen Klammer bedeutet dabei, daß der Mittelwert für die Zeit $t = \tau$ zu nehmen ist. Dieser beträgt $\frac{1}{2}$ für jeden der beiden ersten Terme; im dritten Term hat man

$$2 \cos n t \cos n_0 t = \cos(n + n_0)t + \cos(n - n_0)t,$$

also als Mittelwert dieses Terms zur Zeit $t = \tau$, da $\cos(n + n_0)t$ eine schnell oszillierende Größe vom Mittelwert Null ist:

$$\cos(n - n_0)\tau = \cos \varepsilon.$$

Mithin wird:

$$(23) \quad T = \frac{n_0^2}{2m} \left(\frac{eE}{n^2 - n_0^2} \right)^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Wir setzen die Werte (22) und (23) in die Gleichung (a) des § 1 ein, die mit der Abkürzung J geschrieben lautet

$$T - J = v_0 h$$

und nunmehr übergeht in:

$$\left(\frac{n_0 e E}{n^2 - n_0^2} \right)^2 \left(1 - \cos \varepsilon + \frac{n + n_0}{2n_0} (\varepsilon - \sin \varepsilon) \right) = 2m v_0 h.$$

Hier ist der Faktor

$$\frac{n + n_0}{2n_0} = 1 + \frac{n - n_0}{2n_0} \cong 1$$

unter Beschränkung auf die Nachbarschaft der Resonanz. Danach vereinfacht sich die vorige Gleichung zu

$$(24) \quad 1 - \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon = 2m v_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E} \right)^2.$$

Hier haben wir die gewünschte Bestimmungsgleichung für die Akkumulationszeit τ , die in der Verbindung $\varepsilon = (n - n_0)\tau$ nur auf der linken Seite dieser Gleichung vorkommt, während die rechte Seite bei gegebenem n , n_0 , E als bekannter Zahlenwert angesehen werden kann.

Wir haben gleichzeitig den gesuchten Wert von T in definitiver Form, wenn wir die Ausdrücke (23) und (24) linker- und rechterhand miteinander multiplizieren, nämlich

$$T(1 - \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon) = v_0 h (1 - \cos \varepsilon)$$

oder

$$(25) \quad T = v_0 h \left(1 + \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right)^{-1}.$$

T ist hiernach bekannt, sobald ε aus Gleichung (24) bestimmt ist.

§ 4. Die Kurven der Wirkung und der kinetischen Energie.

Wir diskutieren zunächst Gleichung (24). Die linke Seite dieser Gleichung möge mit $\eta = \eta_1 + \eta_2$ bezeichnet werden; sie stellt sich in einem (ε, η) -Diagramm als eine unter 45° geneigte Gerade $\eta_1 = 1 + \varepsilon$ dar, der eine regelmäßige Sinusschwingung

$$\eta_2 = -\sin \varepsilon - \cos \varepsilon = -\sqrt{2} \sin \left(\varepsilon + \frac{\pi}{4} \right)$$

von der Amplitude $\sqrt{2}$ und der Periode 2π überlagert ist. Die positiven Minima bzw. Maxima der resultierenden Kurve liegen bei den Abszissen

$$\varepsilon = 2m\pi \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Die Kurve stellt natürlich nicht den Verlauf des Wirkungsintegrals W selbst dar — dieser ist schnell oszillierend —, sondern verbindet die für uns allein in Betracht kommenden Maxima von W — ist also eine Art abgeglätteter Enveloppe jener. Ihre Hebungen und Senkungen entsprechen nicht den

Fig. 2.

Einzelschwingungen, sondern den — aus vielen Einzelschwingungen sich zusammensetzenden — *Schwebungen* des Akkumulationsvorganges.

Die Kurve hat eine Bedeutung für uns nur auf gewissen Teilstrecken und zwar aus folgendem Grunde: Denken wir uns die rechte Seite von (24) gegeben, so bestimmt diese in Fig. 2 eine Parallele zur Abszissenachse, welche je nach

den Werten n , n_0 , E in größerem oder kleinerem Abstand von der Abszissenachse verläuft und die Kurve in einem oder in drei Punkten schneidet. Der Schnittpunkt mit kleinster Abszisse liefert vermöge der Beziehung $\varepsilon = (n - n_0) \tau$ diejenige Zeit τ , bei der die Wirkung *erstmalig* den Wert $h/2\pi$ erreicht, die eventuell vorhandenen weiteren Schnittpunkte diejenigen Zeiten, bei denen dies ein zweites oder drittes Mal passieren würde, falls nicht schon bei der erstmaligen Anhäufung eines Wirkungsquantums das Elektron frei geworden wäre. Da aber nach unserer Grundhypothese letzteres stets der Fall ist, so sind die Teile der Kurve für uns bedeutungslos, die solche zweite oder dritte Schnittpunkte tragen.

Da τ positiv, kommen falls $n > n_0$ nur positive ε , falls $n < n_0$ nur negative ε in Betracht, im letzteren Falle ist notwendig

$$-\frac{\pi}{2} < \varepsilon < 0.$$

Zu $\varepsilon = -\pi/2$ gehört der Maximalwert $\eta = 2 - \pi/2$. Dieser begrenzt im Falle $n < n_0$ die zulässige Differenz $n - n_0$, bei der überhaupt noch eine Wirkung eintreten kann. Es muß nämlich nach Gleichung (24) sein

$$2 - \frac{\pi}{2} \geq 2m\nu_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E} \right)^2,$$

d. h.:

$$(26) \quad n_0^2 - n^2 \leq \pi e E \sqrt{\frac{(4 - \pi) \nu_0}{m h}}.$$

Im entgegengesetzten Falle würde die vorher besprochene Parallele zur Abszissenachse, deren Abstand gleich der rechten Seite von (24) sein sollte, unsere Kurve im Falle $n < n_0$ überhaupt nicht bei negativem ε schneiden, und daher keine mögliche positive Akkumulationszeit bestimmen. Zahlenmäßig ergibt sich mit den p. 885 benutzten Daten (z. B. ν_0 gleich dem dortigen $\nu = 10^{15}$) für die fragliche Grenze:

$$n_0^2 - n^2 = 7 \cdot 10^{20}$$

und hieraus

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 - 10^{-11}.$$

also mit $\lambda_0 = 0,3 \mu$ entsprechend $\nu_0 = 10^{15}$

$$\lambda - \lambda_0 = 3 \cdot 10^{-12} \mu.$$

Darin, daß dieser Unterschied praktisch durchaus gleich Null ist, können wir ein *Analogon der Stokesschen Regel* der Fluoreszenz sehen. Unser Ergebnis besagt: *Bei gegebener Wellenlänge λ des auffallenden Lichtes ist die kleinste Eigenwellenlänge λ_0 eines Resonators, der eben noch lichtelektrisch erregt werden kann, nicht merklich kleiner als λ .*

Anders liegen die Verhältnisse im Falle eines positiven ε , wo also $\lambda < \lambda_0$, $n > n_0$ ist. Wie groß auch der Unterschied $n - n_0$ sein möge, immer findet man, wenn man in dem durch die rechte Seite von (24) definierten Abstände eine Parallele zur Abszissenachse der Fig. 2 legt, an unserer Kurve einen Schnittpunkt von physikalischer Bedeutung und daher eine zu diesem Unterschiede $n - n_0$ gehörige mögliche Akkumulationszeit. *Ein Resonator, dessen Eigenwellenlänge größer als die Wellenlänge der auffallenden Schwingung ist, kann also stets lichtelektrisch erregt werden.* Z. B. ergibt sich unter den soeben benutzten Daten bei einer um eine Oktave tieferen Eigenschwingung ($\nu = 10^{15}$, $\nu_0 = \frac{1}{2} 10^{15}$) nach (24), indem $1, \sin \varepsilon$, $\cos \varepsilon$ hier gegen ε gestrichen werden darf:

$$2m\nu_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E} \right)^2 = 1,4 \cdot 10^{21} = \varepsilon = (n - n_0) \tau = \frac{1}{2} n \tau$$

und hieraus als Anzahl der Schwingungen, nach deren Ablauf ein Wirkungsquantum angehäuft ist:

$$\nu \tau = 4,5 \cdot 10^{20}.$$

Bei so großer Differenz von n und n_0 wächst also die Akkumulationszeit ungeheuer an gegenüber dem Falle vollkommener Resonanz in § 2, wo unter den gleichen Umständen $\nu \tau = 10^{10}$ gefunden wurde.

Wir kommen jetzt zur graphischen Diskussion des Ausdruckes (25) für T . Tragen wir T zunächst als Funktion von ε auf, so ergibt sich das folgende Kurvenbild (Fig. 3).

Für $\varepsilon = 0$ haben wir $T = \nu_0 h$ entsprechend dem Einsteinschen Gesetz, und für sehr kleine Werte von ε :

$$T = \nu_0 h \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \right),$$

also einen Anstieg nach negativen ε hin. Der kleinste Wert von ε , welcher nach der vorigen Figur noch physikalische Be-

deutung hat, ist $\varepsilon = -\pi/2$. Ihm entspricht als größter Wert von T

$$T_{\max.} = \nu_0 h \frac{2}{4 - \pi} = 2,3 \cdot \nu_0 h.$$

Man hat ferner nach (25) für:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi$$

$$T = \nu_0 h \left(\frac{2}{\pi}, \quad \frac{2}{2 + \pi}, \quad \frac{2}{4 + 3\pi}, \quad 0, \quad \frac{2}{2 + 3\pi}, \quad 0 \right).$$

Die Kurve für T nähert sich also mit abnehmenden Oszillationen der Abszissenachse, die sie bei allen Vielfachen von

Fig. 3.

2π berührt. An diesen Stellen ist nämlich $1 - \cos \varepsilon = 0$ und daher auch

$$\left(1 + \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon}\right)^{-1} = 0.$$

Da diese Minima der Fig. 3 den Minimis in Fig. 2 entsprechen, so hat die Kurve in ihrer Umgebung keine Bedeutung. Die T -Werte nehmen hiernach durchschnittlich ab mit wachsendem ε und sind für alle ε -Werte, die nach der vorigen Figur vermöge unserer h -Hypothese überhaupt in Betracht kommen, von Null verschieden.

Von der Skala der ε wollen wir in Gedanken noch zur Skala der $n - n_0$ übergehen, durch Division mit der auf Grund der Fig. 2 bestimmten Akkumulationszeit τ . Wir erkennen dann, daß sich der ganze Verlauf der Fig. 3 in der unmittelbaren Nähe der vollkommenen Resonanz abspielt. Z. B. gehörte zu $\varepsilon = -\pi/2$ ein Wellenlängenunterschied $\lambda - \lambda_0$, der praktisch durchaus unmerklich ist; dasselbe würde sich für alle positiven ε ergeben, für die nicht $\varepsilon \gg 1$ ist. Andererseits fanden

wir bei einem Unterschied von einer Oktave zwischen der anregenden und der Eigenfrequenz ($n - n_0 = \frac{1}{2} n$) einen ε -Wert von der Größenordnung 10^{21} ; diesem würde nach Gleichung (25) ein T -Wert von der Größenordnung $h \nu 10^{-21}$ entsprechen, also eine Geschwindigkeit des lichtelektrischen Elektrons, die direkt gleich Null gesetzt werden kann. Dies war von vornherein zu erwarten auf Grund der wohlbekannten Resonanzgesetze. Wenn die auffallende Schwingung von der Eigenschwingung des Resonators merklich verschieden ist, steigt dessen Energie nicht unbegrenzt an, sondern führt im dämpfungsfreien Falle Schwebungen aus, bei denen das Amplitudenmaximum um so kleiner ist, je weiter man sich von der Resonanz entfernt. Dieses Maximum bestimmt die obere Grenze der kinetischen Energie, die das lichtelektrische Elektron mit sich fortführen kann.

Fig. 3 liefert uns zugleich das positive Aufladepotential, das eine bestrahlte Platte *infolge einer einzelnen Elektronengattung von der Eigenfrequenz n_0* erlangt, in Abhängigkeit von der Frequenz n der auffallenden Strahlung. Dabei haben wir von den Ordinaten der Fig. 3 das (für das einzelne Elektron berechnete) Austrittspotential P (vgl. p. 884) abziehen und haben die Abszissen durch Division mit τ , wie zuletzt beschrieben, auf die Skala der $n - n_0$ zu reduzieren. Unsere Figur nimmt dabei die Gestalt *einer äußerst scharf ausgebildeten Zacke an*, welche nach der Seite der abnehmenden n absolut scharf und auch nach der Seite der wachsenden n sehr steil abfällt. Unsere Theorie läßt also die Möglichkeit stark ausgeprägter selektiver Effekte erwarten. Beim Vorhandensein mehrerer merklich voneinander verschiedener Eigenfrequenzen n_0 würden mehrere solche Zacken auftreten, und ihre Höhen würden mit der Eigenfrequenz n_0 , also auch mit der sie erregenden auffallenden Frequenz n linear wachsen.

§ 5. Ergänzungen und Modifikationen.

Aus der Maximalbedingung $dW/dt = 0$ wurde in der Einleitung für den Moment der Befreiung des Elektrons auf die Gleichheit der kinetischen und potentiellen Energie und als Ausdruck derselben auf die Gleichung geschlossen (vgl. p. 877):

$$\dot{x}^2 = n_0^2 x^2.$$

Von den beiden Wurzeln derselben

$$\dot{x} = \pm n_0 x$$

wurde bei der Aufstellung der Gleichung (a) nur das positive Vorzeichen berücksichtigt. Wählen wir das negative Vorzeichen, so ergibt sich

$$\frac{m}{2} x \dot{x} = - \frac{m}{2} \frac{\dot{x}^2}{n_0} = - \frac{T}{n_0}$$

und statt der Gleichung (a):

$$(a') \quad -T = \nu_0 h + \frac{n_0 e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt.$$

Wir wollen zeigen, daß nach dieser Bedingung das Elektron immer erst zu einer späteren Zeit frei werden würde, wie nach der Gleichung (a), daß also für die tatsächliche erstmalige Befreiung des Elektrons nur Gleichung (a) zu berücksichtigen ist.

Setzen wir nämlich in (a') für T den Wert aus Gleichung (23) und für das zweite Glied auf der rechten Seite von (a') den Wert von J aus Gleichung (22) ein, so ergibt sich statt (24):

$$(24') \quad -1 + \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon = 2 m \nu_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E} \right)^2.$$

In Fig. 4 ist zur Abszisse ε die linke Seite dieser Gleichung, Kurve η' , neben der linken Seite von Gleichung (24), Kurve η , eingezeichnet. Schneidet man nun diese Kurven mit einer Parallelen zur Abszissenachse auf der positiven Seite derselben — entsprechend dem positiven Vorzeichen der rechten Seite von (24) und (24') —, so gehört der Schnittpunkt mit der Kurve η' stets zu einem *größeren* positiven ε , wie derjenige mit der Kurve η , der in Fig. 4 durch ein Kreuz hervorgehoben ist (Schnittpunkte mit der Kurve η' bei negativem ε sind überhaupt nicht vorhanden). Wir schließen daraus, daß die Bedingung (a) stets bei *kleinerem* τ erfüllt ist, wie die Bedingung (a'), daß also für die Befreiung des Elektrons lediglich Gleichung (a) maßgebend ist.

Hieran schließt eine Bemerkung, welche das Vorzeichen von h in unserer Grundhypothese betrifft. Formuliert man

diese folgendermaßen (mit unbestimmtem Vorzeichen des Wirkungsintegrals):

$$\int_0^{\epsilon} (T - U) dt = \pm \frac{h}{2\pi},$$

so bleibt unsere Berechnung des Wirkungsintegrals in allen Einzelheiten erhalten, nur daß auf der rechten Seite der Gleichung (24) und (24') $\pm h$ an Stelle von $+h$ tritt. Bei Wahl des negativen Vorzeichens von h hätten wir dann unsere Kurven η , η' in Fig. 4 mit einer Parallelen zur Ab-

Fig. 4.

szissenachse auf der *negativen* Seite derselben zu schneiden. Der maßgebende, zu kleinerer Akkumulationszeit gehörende Schnittpunkt würde dann auf der Kurve η' liegen (in Fig. 4 durch ein Kreuz hervorgehoben), so daß in diesem Falle nicht mehr die Bedingung (a), sondern (a') die Befreiung des Elektrons regulieren würde. Die Abszisse dieses Schnittpunktes liegt aber im allgemeinen auf der negativen Seite der ϵ , d. h. das Elektron würde im allgemeinen bei $\epsilon < 0$, d. h. $n < n_0$ befreit werden, entgegen der Stokesschen Regel, und es würde eine Ausnahme von dieser verkehrten Stokesschen Regel nur in unmittelbarer Nähe der Resonanz vorkommen (da, wo die Kurve η' in Fig. 4 bei positivem ϵ die Abszissenachse unterschreitet). Die kinetische Energie des befreiten Elektrons wäre, wie sich aus der Rechnung vom Ende des § 3 ergibt, nach Gleichung (23) und (24'):

$$T' = v_0 h \left(1 - \frac{\epsilon - \sin \epsilon}{1 - \cos \epsilon} \right)^{-1},$$

also bei negativem ε dieselbe wie nach Gleichung (25) bei gleich großem positiven ε .

Bei der umgekehrten Wahl des Vorzeichens in unserer Grundhypothese werden wir also zu lichtelektrischen Effekten derselben Art wie früher geführt, aber mit Umkehrung der Stokesschen Regel. Wir glauben daher, daß die von uns getroffene einseitige Wahl des Vorzeichens mit der Einseitigkeit der Stokesschen Regel und der höheren Wirksamkeit oder „Wertigkeit“ der größeren Frequenzen bei derartigen Energietransformationen innerlich verknüpft ist. Wir wollen allerdings nicht behaupten, daß diese Einseitigkeit der Stokeschen Regel aus unserer Grundhypothese mit Notwendigkeit folge, sondern wollen lieber sagen, daß wir unsere Grundhypothese hinsichtlich des Vorzeichens so formuliert haben, daß sie der Stokesschen Regel entspricht.

Schließlich haben wir uns noch über den Faktor $1/2\pi$ in unserer Grundhypothese auszusprechen. Dieser wurde so gewählt, daß das Einsteinsche Gesetz $T = h\nu$ gerade in dem idealen Falle der Resonanz herauskam. Es gibt aber Gründe, die dafür sprechen, diesen Faktor vielmehr in $\frac{1}{4}$ zu modifizieren.¹⁾

Wir wollen uns vorstellen, daß die Befreiung des Elektrons um so leichter vonstatten geht, je kleiner die Akkumulationszeit τ wird, und wollen daher fragen, für welchen Wert von $n - n_0$ der kleinste Wert von τ erreicht wird, bei gegebenen Werten von n_0 und E .

ε bestimmt sich in der Verbindung $\varepsilon = (n - n_0)\tau$ aus Gleichung (24). Für kleine Werte von ε erhält man hiernach

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) = 2m\nu_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E}\right)^2.$$

Dividiert man also mit $(n - n_0)^2$ und setzt für kleine ε genähert $n + n_0 = 2n_0$, so folgt

$$\tau^2 = \frac{16m\nu_0 h}{(eE)^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

1) Es sei auch erwähnt, daß Hr. Langevin (Congrès Solvay, Brüssel 1911) unsere so modifizierte Grundhypothese angewandt hat, um die Größenordnung des Magnetons zu berechnen.

Für $\varepsilon = 0$ stimmt dieser Wert natürlich mit dem früher in (14) angegebenen überein. Für wachsende ε nimmt der Wert ab; wir haben also ein Minimum für $\varepsilon > 0$ zu erwarten. Dieses liegt bei $\varepsilon = \pi/2$, wie eine hier unterdrückte Zwischenrechnung zeigt, und beträgt

$$\tau^2 = \frac{4\pi m v_0 h}{(e E)^2}.$$

Der zugehörige Wert von T ist nach (25)

$$T = \frac{2}{\pi} v_0 h.$$

Hätten wir nun in unserer Grundhypothese $h/4$ an Stelle von $h/2\pi$ gesetzt, so würde in allen folgenden Formeln h zu multiplizieren sein mit $2\pi/4 = \pi/2$. Es würde also statt des vorstehenden Wertes von T der Einsteinsche Wert $T = v_0 h$ gerade für den ausgezeichneten Fall der kürzesten Akkumulationszeit auftreten; überhaupt wären alle von uns berechneten Werte von T im Verhältnis $\pi:2$ zu vergrößern.

Für die allgemeine Beurteilung unserer Grundhypothese ist diese Unsicherheit der Zahlenwerte natürlich ziemlich belanglos. Wir halten daher im folgenden durchweg an der ursprünglichen Formulierung unserer Hypothese fest, ohne uns für die Eindeutigkeit des Zahlenfaktors irgend verbürgen zu wollen.

§ 6. Einfluß der Dämpfung.

Für die erzwungene Schwingung eines Elektrons gilt bei Berücksichtigung der elektromagnetischen Strahlungsdämpfung bekanntlich das folgende Bewegungsgesetz (e in „rationellen“ Einheiten gemessen):

$$(27) \quad \ddot{x} + n_0^2 x - \frac{e^2}{6\pi c^3 m} \ddot{\ddot{x}} = \frac{e E}{m} \cos n t;$$

n_0 bedeutet die Eigenfrequenz des Elektrons im dämpfungs-freien Falle. Dasjenige Integral von (27), welches dem erzwungenen Endzustande der Bewegung entspricht, findet man wie bekannt gleich

$$(28) \quad x = C \cos n(t - \gamma)$$

mit den Abkürzungen (die Quadratwurzel als positiv gedacht):

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{e E}{m} \frac{1}{\sqrt{(n^2 - n_0^2)^2 + (\varrho n^2)^2}}, \quad \operatorname{tg} n \gamma = \frac{-\varrho n^2}{n^2 - n_0^2}, \\ \varrho &= \frac{e^2 n}{6 \pi c^3 m}. \end{aligned} \right.$$

Die reine Zahl ϱ hat für ultraviolettes Licht ($\nu = 10^{15}$) den Wert

$$(29a) \quad \varrho = 4 \cdot 10^{-8}.$$

Zur Bestimmung der freien Schwingungen des Elektrons andererseits dient der übliche Ansatz $x = A e^{i \alpha t}$. Gleichung (27) liefert dann mit $E = 0$:

$$-\alpha^2 + n_0^2 + \frac{i \varrho}{n} \alpha^3 = 0,$$

oder, da näherungsweise $\alpha = \pm n_0$ ist,

$$\alpha^2 = n_0^2 \left(1 \pm i \varrho \frac{n_0}{n} \right), \quad i \alpha = \pm i n_0 - \varrho \frac{n_0^2}{2 n}.$$

Wir benutzen die weitere Abkürzung

$$(29b) \quad \varrho_0 = \frac{1}{2} \varrho \frac{n_0}{n},$$

die ebenso wie ϱ eine reine Zahl von derselben Größenordnung wie diese ist. Der Ausdruck der freien Schwingungen des Elektrons wird dann:

$$(30) \quad x = e^{-\varrho_0 n_0 t} (A \cos n_0 t + B \sin n_0 t).$$

Das allgemeine Integral von (27) setzt sich aus (28) und (30) additiv zusammen:

$$(31) \quad x = C \cos n(t - \gamma) + e^{-\varrho_0 n_0 t} (A \cos n_0 t + B \sin n_0 t);$$

um es den Anfangsbedingungen $x = \dot{x} = 0$ für $t = 0$ anzupassen, haben wir zu wählen:

$$(31a) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= -C \cos n \gamma, \\ B &= -C \sin n \gamma \left(\frac{n}{n_0} + \varrho_0 \operatorname{ctg} n \gamma \right) = -C \sin n \gamma, \end{aligned} \right.$$

letzteres unter Streichung von $(n - n_0)^2$ gegen n_0^2 . Also folgt

$$(32) \quad x = C \cos(n t - \gamma) - C e^{-\varrho_0 n_0 t} \cos(n_0 t - n \gamma).$$

Zur Berechnung des Wirkungsintegrals greifen wir auf die Umformung (a) des § 1 zurück, welche, wie man leicht

nachrechnet, auch bei gedämpften Schwingungen nicht merklich abzuändern ist. Hier ist zunächst das Integral

$$J = \frac{n_0 e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt$$

mit Rücksicht auf (32) auszurechnen. Wir benutzen dieselben Vernachlässigungen wie früher, nämlich

$$n\tau \gg 1, \quad n - n_0 \ll n + n_0$$

und setzen sogleich das Resultat der ziemlich elementaren Umrechnung her:

$$(33) \quad J = -\frac{n_0^2 m C^2}{2} (\varepsilon - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \sin(\varepsilon + 2n\gamma) + \sin 2n\gamma),$$

mit der auch früher benutzten Abkürzung

$$(34) \quad \varepsilon = (n - n_0)\tau.$$

Wir haben ferner die kinetische Energie T für den Moment $t = \tau$ zu berechnen, wobei wir uns auf die Gleichung (b) des § 1 stützen.

Nach (32) wird:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} = C^2 [\cos^2 n(t - \gamma) + e^{-2\varepsilon_0 n_0 t} \cos^2(n_0 t - n\gamma) \\ - 2e^{-\varepsilon_0 n_0 t} \cos n(t - \gamma) \cos(n_0 t - n\gamma)]_m. \end{aligned}$$

Der Index m bedeutet die Bildung des Mittelwertes für eine Schwingung zur Zeit $t = \tau$, wobei die Exponentialfunktion als langsam veränderliche Größe behandelt werden kann.

Man findet leicht:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} C^2 (1 + e^{-2\varepsilon_0 n_0 \tau} - 2e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \cos \varepsilon).$$

Mithin nach Gleichung (b) des § 1:

$$(35) \quad T = \frac{n_0^2 m C^2}{4} (1 + e^{-2\varepsilon_0 n_0 \tau} - 2e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \cos \varepsilon).$$

Tragen wir die Ausdrücke (33) und (35) mit dem Werte von C aus (29) in die Gleichung (a) des § 1 ein, die wir mit der Abkürzung J schreiben können:

$$T - J = v_0 h,$$

so folgt:

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + e^{-2\varepsilon_0 n_0 \tau}) - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \cos \varepsilon + \varepsilon - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \sin(\varepsilon + 2n\gamma) \\ + \sin 2n\gamma = 2m v_0 h \frac{(n^2 - n_0^2)^2 + (v n^2)^2}{(n_0 e E)^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichung haben wir als Bestimmungsgleichung für τ mit Rücksicht auf die Dämpfung anzusehen, geradeso wie Gleichung (24) des § 3, in welche sie für $\varrho_0 = 0$, $\gamma = 0$ übergeht, im dämpfungsfreien Falle.

Um schließlich die diesem Zeitpunkte τ entsprechende kinetische Energie in geeignetster Form anzugeben, gehen wir nochmals auf die Gleichung (a) des § 1:

$$T - J = \nu_0 h$$

zurück, schreiben diese in der Form:

$$(37) \quad T = \nu_0 h \left(1 - \frac{J}{T}\right)^{-1},$$

wobei nach (33) und (35) ist

$$(37a) \quad -\frac{J}{T} = -\frac{\varepsilon - e^{-\varrho_0 n_0 \tau} \sin(\varepsilon + 2n\gamma) + \sin 2n\gamma}{\frac{1}{2}(1 + e^{-2\varrho_0 n_0 \tau}) - e^{-\varrho_0 n_0 \tau} \cos \varepsilon}.$$

Natürlich geht die Gleichung (37) mit (37a) im dämpfungsfreien Falle ($\varrho_0 = 0$, $\gamma = 0$) in die entsprechende Gleichung (25) des § 4 über.

Um an Hand dieser Ergebnisse den Einfluß der Dämpfung zu diskutieren, betrachten wir zunächst den Fall *vollkommener Resonanz*. In diesem ist jedenfalls $\varepsilon = 0$ und nach (29) $\tan \gamma = \infty$, $n\gamma = \pi/2$, also $\sin 2n\gamma = 0$. Das Verhältnis (37a) wird also bei beliebigem Betrage der Dämpfung gleich Null und Gleichung (37) liefert *wie bei verschwindender Dämpfung das wohlbekannte Gesetz*:

$$T = \nu_0 h = \nu h.$$

Zugleich belehrt uns Gleichung (36) darüber, unter welchen Umständen eine Ansammlung dieser Energiemenge bei vorhandener Dämpfung möglich ist. Gleichung (36) wird mit $n = n_0$, $\varepsilon = 0$, $\sin 2n\gamma = 0$:

$$(38) \quad \frac{1}{2}(1 - e^{-\varrho_0 n \tau})^2 = 2m\nu h \left(\frac{\varrho n}{eE}\right)^2.$$

Diese Bestimmungsgleichung für τ führt auf einen möglichen Wert von τ dann und nur dann, wenn die rechte Seite kleiner als $1/2$ ist, wenn also gilt:

$$(39) \quad \varrho < \frac{eE}{\sqrt{4m n^2 \nu h}}.$$

Benutzen wir die Daten von p. 885, so müßte also sein

$$\rho < 2 \cdot 10^{-11}.$$

Dieser Wert ist viel kleiner wie der in Gleichung (29a) angeschriebene Wert $\rho = 4 \cdot 10^{-8}$, der aus den Elektronendaten e und m berechnet war. Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß die normale elektromagnetische Strahlungsdämpfung viel zu groß ist, um eine Anhäufung der Energie bis zu demjenigen Betrage zuzulassen, der im Resonanzfalle für das Freiwerden des Elektrons erforderlich ist. Hiernach würden die hohen Geschwindigkeiten, die für den Resonanzfall charakteristisch sind, in Wirklichkeit nicht auftreten können. Es ist aber auch eine andere Auffassung möglich. Das normale Dämpfungsverhältnis ρ wird theoretisch bestimmt für ein einzelnes Elektron. Man überlegt sich leicht, daß in einem Aggregat von vielen Elektronen, wie wir es doch im Molekül vorhanden denken müssen, dieser normale Betrag der Dämpfung, je nach der gegenseitigen Lage der einzelnen Elektronen, beliebig über- oder unterschritten werden kann. Die hohen Geschwindigkeiten des Resonanzfalles wären danach gebunden an das zufällige Vorhandensein einer *unter-normalen* Dämpfung, wie sie durch die Ungleichung (39) verlangt wird. Oder schließlich könnte man die Frage mehr prinzipiell zu lösen versuchen, indem man das Dämpfungsglied in (27) für unrichtig erklärt und mit Planck die Existenz einer nicht strahlenden „Nullpunktbewegung“ zuläßt.

Über den allgemeinen Fall der unvollkommenen Resonanz mögen folgende Andeutungen genügen: Eine Befreiung des Elektrons ist hier bei beliebigem Betrage der Dämpfung immer möglich; die linke Seite von Gleichung (36) wächst nämlich wegen des Gliedes ε mit wachsendem ε beliebig an und kann daher den Wert der rechten Seite von (36) sicher erreichen. Ein hinreichend hoher Wert von ε bedeutet dabei wegen $\varepsilon = (n - n_0) \tau$ eine hinreichend lange Akkumulationszeit. Mit wachsendem ε nimmt aber die kinetische Energie, mit der das Elektron fortfliegt, immer mehr ab. Die rechte Seite von (37a) wird nämlich für große ε und τ näherungsweise gleich 2ε und Gleichung (37) liefert dann

$$T = \frac{\nu_0 h}{1 + 2\varepsilon}.$$

Die lichtelektrische Energie ist also bei großem ε gegenüber dem Werte $\nu_0 h$ stark reduziert. Beträge von der Ordnung $\nu_0 h$ sind nur bei kleinem ε und nur dann möglich, wenn die Dämpfung den in (39) angegebenen anomal kleinen Wert hat. Also:

Bei normaler Dämpfung treten lichtelektrische Energien von nennenswertem Betrage überhaupt nicht auf. Bei unter-normaler Dämpfung ist die lichtelektrische Energie im Resonanzfalle wieder genau gleich $\nu_0 h$.

Zweiter Teil.

Natürliches Licht.

§ 7. Allgemeiner Ausdruck für die durch natürliches Licht erzeugte lichtelektrische Energie und die zugehörige Akkumulationszeit.

Die Überlegungen der vorigen Paragraphen haben gezeigt, daß unsere Grundhypothese der erreichbaren lichtelektrischen Energie eine obere Grenze steckt. Sie benutzen aber durchweg die in Wirklichkeit nicht erfüllte Fiktion einer Anregung mittels einer einzelnen periodischen Welle, und es bedarf daher noch der Untersuchung, ob das Endresultat auch dann noch aufrecht erhalten werden darf, wenn die Anregung nicht rein monochromatisch ist und die verschiedenen Wellenlängen der einzelnen Bestandteile der Strahlung so durcheinander gemischt sind, wie das bei der natürlichen Strahlung der Fall ist. Von vornherein ist ersichtlich, daß von einer absoluten Gültigkeit jenes Resultates nicht die Rede sein kann. Ist es doch ein leichtes, einen besonderen Fall zu konstruieren, in dem das Wirkungsintegral erst dann den Wert $h/2\pi$ erreicht, wenn die kinetische Energie längst über ein großes Vielfaches von $h\nu$ gestiegen ist. Dennoch werden wir zeigen können, daß unsere früheren Resultate als Mittelwerte auch bei natürlichem Licht Gültigkeit behalten.

Im folgenden denken wir uns die erregende Strahlung bestehend aus einem Gemisch zeitlich exponentiell gedämpfter Elementarwellen, deren elektrische Feldstärke an der Stelle des betrachteten Elektrons dargestellt sein möge, durch je eine Formel:

$$(40) \quad f(t) = E \cdot e^{-e(t-t_s)} \sin n_0(t-t_s),$$

welche gelten soll vom Moment $t = t_s$ an bis $t = \infty$. Wir machen also die Anfangsintensität aller Elementarwellen, welche durch die Konstante E gemessen wird, gleich groß; außerdem sei auch die Schwingungszahl n_0 für alle dieselbe und falle zusammen mit der Eigenschwingungszahl des erregten Elektrons. Die einzige Unregelmäßigkeit der Strahlung besteht dann darin, daß die Anfangszeiten t_s unserer Wellen ganz regellos über die Zeit verteilt sind.

Daß die gleiche Wahl von E keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, dürfte a priori klar sein. Wir können ja mehrere t_s einander gleichsetzen und dadurch ein Vielfaches von E erreichen. Daß auch die gleiche Wahl der Schwingungszahl in allen Elementarwellen unwesentlich ist, wird dadurch erreicht, daß wir die Dämpfung ϱ der Elementarwellen so groß wählen, daß die durch alle Einzelwellen zusammengenommen erzeugte Spektrallinie breit ist im Vergleich mit dem Spektralbereich, auf den unser Resonator praktisch anspricht.

Wir entwickeln nun $f(t)$ für die einzelne Elementarwelle in ein Fouriersches Integral (die Entwicklung in eine Fouriersche Reihe ist weniger zu empfehlen) nach dem Schema

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} da f(a) \cos p(t-a),$$

wofür wir bequemer schreiben können:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} da f(a) e^{ip(t-a)}.$$

Setzen wir aus (40) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{E}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ip t} \int_{t_s}^{\infty} da e^{-ip a} (e^{-\varrho(a-t_s) + i n_0(a-t_s)} - e^{-\varrho(a-t_s) - i n_0(a-t_s)}) da \\ &= \frac{E}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ip(t-t_s)} \left(\frac{1}{\varrho + i(p - n_0)} - \frac{1}{\varrho + i(p + n_0)} \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch Summation über alle t_s als Gesamtstrahlung:

$$(41) \quad \mathfrak{E} = \frac{E}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{1}{\varrho + i(p - n_0)} - \frac{1}{\varrho + i(p + n_0)} \right) \sum_s e^{i p (t - t_s)}.$$

Das hierdurch dargestellte Spektrum ist natürlich um so schmaler (monochromatischer), je kleiner ϱ und je kleiner die Zahl der auf die Zeiteinheit durchschnittlich entfallenden Zeitpunkte t_s ist. Bezüglich der Größe von ϱ dürfen wir die folgenden beiden Festsetzungen machen:

$$(42) \quad \varrho \ll n_0, \quad \varrho \tau \gg 1.$$

Die erste besagt, daß jede Elementarwelle eine große Anzahl von Schwingungen der Frequenz n_0 ausführt, bevor sie auf $1/e$ gedämpft ist. Die zweite meint, daß für alle in Frage kommenden Akkumulationszeiten τ jede Einzelwelle vollständig abgedämpft ist.

Die von einer Elementarwelle herrührende Energiedichte am Orte unseres Resonators ist wegen der Gleichheit von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$:

$$u_s = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) = f^2(t),$$

also das Zeitintegral derselben

$$\int u_s dt = \int_{t_s}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{E^2}{4\varrho},$$

wie man leicht auf Grund des Ansatzes (40) mit Rücksicht auf die erste Bedingung (42) berechnet. Die von vielen solchen Elementarwellen herrührenden Energiebeträge superponieren sich durchschnittlich. Man erhält daher als mittlere Energiedichte U der Strahlung während einer Zeit τ , auf welche durchschnittlich S Elementarwellen entfallen, den Wert:

$$(43) \quad U = \frac{1}{\tau} \sum_s \int u_s dt = \frac{S E^2}{4\varrho \tau}.$$

Wir bestimmen jetzt die Ausschwingung x unseres Elektrons als Funktion von t , welche unter dem Einfluß der durch (41) dargestellten Strahlung erfolgt, oder vielmehr zunächst diejenige Ausschwingung, welche einer Partialwelle

$$\mathfrak{E} = e^{i p t}$$

des Spektrums (41) entspricht. Wir gestatten uns dabei die Vereinfachung, daß wir das schwingende Elektron als dämpfungs-frei behandeln, legen also als Schwingungsgleichung zugrunde:

$$(44) \quad \ddot{x} + n_0^2 x = \frac{e}{m} \mathfrak{E} = \frac{e}{m} e^{i p t};$$

die Eigenschwingung des erregten Elektrons soll, wie schon gesagt, mit der Eigenschwingung n_0 der erregenden Partialwellen übereinstimmen. Das Integral von (44), welches den Anfangsbedingungen $x = \dot{x} = 0$ für $t = 0$ genügt, lautet:

$$(45) \quad x = -\frac{e}{m} x_p$$

mit der Abkürzung:

$$(45a) \quad x_p = \frac{e^{i p t}}{p^2 - n_0^2} = \frac{1}{2} \frac{e^{i n_0 t}}{n_0 (p - n_0)} + \frac{1}{2} \frac{e^{-i n_0 t}}{n_0 (p + n_0)}.$$

Da unsere Schwingungsgleichung linear ist, erhält man die der Gesamterregung (41) entsprechende Ausschwingung aus (45) durch Multiplikation mit der betreffenden Amplitude der Partialschwingung und Integration über alle p ; also:

$$(46) \quad x = -\frac{e E}{4 \pi i m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{1}{p + i(\rho - n_0)} - \frac{1}{p + i(\rho + n_0)} \right) x_p \sum_s e^{-i p t_s}.$$

Um jetzt die allgemeinen Formeln (a) und (b) der Einleitung anwenden zu können, die auch bei natürlichem Licht angenäherte Gültigkeit behalten werden, müßten wir uns zunächst mit den beiden Größen

$$\int_0^\tau x \mathfrak{E} dt \quad \text{und} \quad \overline{x^2}$$

beschäftigen. Wir tragen ihre etwas mühsame Berechnung in § 9 nach und geben hier das Resultat an, das sich mit Rücksicht auf die Bedingungen (42) sehr einfach gestaltet, nämlich:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\tau x \mathfrak{E} dt &= \frac{e E^2}{4 m q^2 n_0} \sum_1^S \sum_1^{s-1} \sin n_0 (t_s - t_r), \\ \overline{x^2} &= \frac{e^2 E^2}{8 m^2 q^2 n_0^2} \sum_1^S \sum_1^S \cos n_0 (t_s - t_r). \end{aligned} \right.$$

Zur Interpretation der hier vorkommenden Doppelsummen denken wir uns etwa zwei quadratische Schemata von S Zeilen und S Kolonnen (S = Anzahl der auf das Zeitintervall τ entfallenden Einsätze t_s von Elementarwellen) und schreiben an die der s^{ten} Zeile und der r^{ten} Kolonne gemeinsame Stelle des ersten bzw. zweiten Schemas $\sin n_0(t_s - t_r)$ bzw. $\cos n_0(t_s - t_r)$. Im ersten Schema besteht dann die Diagonalreihe aus Nullen, im zweiten aus Einsen, im ersten sind je zwei symmetrisch zur Diagonalreihe gelegene Stellen mit dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Zahlen, im zweiten mit gleichen Zahlen ausgefüllt. Die Summe aller S^2 Zahlen des ersten Schemas wird daher gleich Null; erstrecken wir aber, wie in der ersten Zeile von (47) vorgesehen, die Summe nur über alle Zahlen links von der Diagonale, so ergibt sich ein im allgemeinen von Null verschiedener Wert, der, je nach der zufälligen Lage der Zeitpunkte t_s gegeneinander, selbst in hohem Maße dem Zufall unterworfen ist. Es ist bequem (vgl. den folgenden Paragraph) die Abkürzung einzuführen:

$$(48) \quad Si = \frac{2}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^{s-1} \sin n_0(t_s - t_r).$$

Bilden wir andererseits die Summe über alle S^2 -Zahlen unseres zweiten Schemas, wie in der zweiten Zeile von (47) vorgesehen, so besteht diese erstens aus den S Gliedern der Diagonalreihe von der festen Summe S und zweitens aus der dem Zufall unterworfenen Summe der Glieder links von der Diagonalreihe, welche doppelt zu zählen ist, da sie gleich ist der Summe der Glieder rechts von der Diagonalreihe. Führen wir die weitere Abkürzung ein

$$(48a) \quad Co = \frac{2}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^{s-1} \cos n_0(t_s - t_r),$$

so ergibt sich als Summe aller Zahlen unseres zweiten Schemas

$$\sum_{s=0}^S \sum_{r=0}^S \cos n_0(t_s - t_r) = S(1 + Co)$$

und wir können unsere Gleichungen (47) auch so schreiben:

$$(49) \quad \begin{cases} \int_0^\tau x \mathfrak{E} dt = \frac{e E^2 S}{8 m \varrho^2 n_0} Si, \\ \overline{x^2} = \frac{e^2 E^2 S}{8 m^2 \varrho^2 n_0^2} (1 + Co). \end{cases}$$

Mit diesen Werten gehen wir in die Gleichung (a) und (b) des § 1 ein. Sie lauten dann bei Benutzung von (43):

$$(50) \quad \begin{cases} T = \nu_0 h + \frac{e^2 E^2 S}{16 m \varrho^2} Si = \nu_0 h + \frac{e^2 U \tau}{4 m \varrho} Si, \\ T = \frac{e^2 E^2 S}{16 m \varrho^2} (1 + Co) = \frac{e^2 U \tau}{4 m \varrho} (1 + Co). \end{cases}$$

Es sind also die von uns gesuchten Größen T und τ mit den beiden Zufallsgrößen Si und Co durch zwei lineare Gleichungen verknüpft und daher als statistisch bekannt anzusehen. Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind bestimmt außer durch die Konstanten e , m , h durch die Energiedichte der erregenden Strahlung U , durch die Breite der erregenden Spektrallinie, welche durch die Dämpfungskonstante ϱ gemessen wird, endlich durch die Eigenschwingungszahl ν_0 des zu erregenden Resonators, welche gleich ist der mittleren Schwingungszahl der erregenden Spektrallinie.

§ 8. Die Schwankungen der Energie und der Akkumulationszeit.

Wir haben uns jetzt ein Urteil zu bilden über die Durchschnittswerte, welche bei zufälliger Verteilung der Zeitpunkte t_i den Größen Si , Co oder ihren Quadraten zukommen, und über die Wahrscheinlichkeit eines irgendwie vorgegebenen Wertebereiches derselben. Wir behaupten in dieser Hinsicht:

$$(51) \quad \begin{cases} \overline{Si} = \overline{Co} = 0, \\ \overline{Si^2} = \overline{Co^2} = 1. \end{cases}$$

Die Überstreichung bedeutet dabei ersichtlich, daß wir die überstrichene Größe für sehr viele (unendlich viele) Verteilungen der S Zeitpunkte t_i , t_r über das Intervall τ bilden und das Mittel der so erhaltenen Zahlen nehmen sollen.

Die erste Zeile von (51) folgt unmittelbar daraus, daß die Größen $\frac{\sin}{\cos} n_0(t_s - t_r)$ negative und positive Werte mit

gleicher Wahrscheinlichkeit oder Häufigkeit annehmen. Die Richtigkeit der zweiten Zeile erkennt man so: Bildet man Si^2 , so kommen darin Quadrat- und Produktglieder vor. Der wahrscheinliche Wert der letzteren ist Null, der der ersteren $\frac{1}{2}$. Es gibt aber ebensoviel Quadratglieder wie es Stellen in unserem Schema links der Diagonale gibt, nämlich $S(S-1)/2$. Daher wird

$$\overline{Si^2} = \left(\frac{2}{S}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{S(S-1)}{2} = 1 \quad \text{für } S = \infty;$$

dasselbe gilt für Co^2 .

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Si einen Wert zwischen ξ und $\xi + d\xi$ bzw. Co einen Wert zwischen η und $\eta + d\eta$ habe, setzen wir jetzt nach dem Gaußsschen Fehlergesetz

$$(52) \quad w(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \quad w(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta.$$

In der Tat entspricht dieser Ansatz der Gleichung (51), da z. B. gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi w(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 w(\xi) d\xi = 1.$$

Jedenfalls kann das Gaußssche Gesetz in unserem Falle einer durchaus symmetrischen und regulären Dispersionskurve nicht merklich falsch sein.

Nach den Gleichungen (50) gehört nun zu jedem speziellen Werte der ξ, η ein bestimmter Wert von T und τ . Wir wollen aber statt mit T und τ lieber mit zwei unbenannten Zahlen rechnen, nämlich mit

$$(53) \quad x = \frac{T}{h\nu_0}, \quad y = \frac{\tau}{\Theta},$$

wobei die Hilfszeit Θ die Bedeutung haben soll:

$$(54) \quad \Theta = \frac{4\pi q h \nu_0}{e^2 U}.$$

Dann nehmen die Gleichungen (50) die folgende einfache Gestalt an:

$$(55) \quad \begin{cases} x - y\xi = 1, \\ x - y(1 + \eta) = 0. \end{cases}$$

Sie geben aufgelöst:

$$(56) \quad \begin{cases} \xi = \frac{x-1}{y}, & \eta = \frac{x}{y} - 1, \\ x = \frac{1+\eta}{1-\xi+\eta}, & y = \frac{1}{1-\xi+\eta}. \end{cases}$$

Wir stellen uns nun eine ξ, η -Ebene und eine xy -Ebene vor, deren Punkte durch die Gleichungen (55) aufeinander bezogen sind. In der $\xi \eta$ -Ebene grenzen wir uns um einen Punkt $\xi \eta$ einen Spielraum $d\xi d\eta$ ab; die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebig herausgegriffenes Wertepaar $\xi \eta$ in diesen Spielraum fällt, ist nach (52):

$$(57) \quad w(\xi) w(\eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} d\xi d\eta.$$

Andererseits betrachten wir in der xy -Ebene einen Punkt xy mit Spielraum $dx dy$; die Wahrscheinlichkeit, daß ein durch Zufall bestimmtes Wertepaar xy in diesen Spielraum fällt, werde bezeichnet mit $W(x, y) dx dy$. Wir behaupten dann:

$$(58) \quad W(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right| e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} dx dy.$$

Zum Beweise brauchen wir uns nur die Größe desjenigen Bereiches der $\xi \eta$ -Ebene zu vergegenwärtigen, der dem Bereiche $dx dy$ vermöge (56) zugeordnet ist. Er ist offenbar ein Parallelogramm von dem Inhalt $dx dy$ mal der in (58) hingeschriebenen Funktionaldeterminante, welche letztere uns den Vergrößerungsfaktor unserer Abbildung und zugleich die Änderung des Wahrscheinlichkeitsmaßes beim Übergang von der Ebene $\xi \eta$ zu xy liefert. Die Wahrscheinlichkeit nämlich, daß xy im Spielraum $dx dy$ liege (linke Seite von (58)) ist ebenso groß wie die, daß der Bildpunkt $\xi \eta$ von xy in dem soeben bestimmten zugeordneten Bereiche der $\xi \eta$ -Ebene liege. Dessen Größe ist also für $d\xi d\eta$ auf der rechten Seite von (57) zu substituieren, wodurch sich die rechte Seite von (58) ergibt, also unsere Behauptung verifiziert ist.

Setzen wir aus (56) in (58) ein, so folgt

$$(59) \quad W(x, y) = \frac{1}{2\pi y^3} e^{-\varphi}, \quad \varphi = \frac{(x-1)^2 + (x-y)^2}{2y^2}.$$

Von der Wahrscheinlichkeit eines Wertepaares x, y können wir nun zu den Wahrscheinlichkeiten eines Einzelwertes x oder y übergehen. Wir haben letztere Größen offenbar so zu definieren:

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} W(x) &= \int_0^{\infty} W(x, y) dy = \int_0^{\infty} \frac{dy}{2\pi y^3} e^{-\varphi}, \\ W(y) &= \int_0^{\infty} W(x, y) dx = \frac{1}{2\pi y^3} \int_0^{\infty} dx e^{-\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Es bedeutet also $W(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit für eine lichtelektrische Befreiung, bei der das Elektron mit einer Energie zwischen $T = h\nu_0 x$ und $T + dT = h\nu_0(x + dx)$ fortfliegt (vgl. Gleichung (53)), nach ganz beliebiger Akkumulationszeit; und es bedeutet $W(y)dy$ die Wahrscheinlichkeit einer Auslösung, bei der die Zeit der Auslösung liegt zwischen $\tau = \Theta y$ und $\tau + d\tau = \Theta(y + dy)$ bei übrigens ganz beliebiger und unbeschränkter Energie des fortfliegenden Elektrons.

Die Ausrechnung beider Formeln (60) läßt sich auf das Fehlerintegral

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv$$

zurückführen. Es wird nämlich einfach:

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} W(x) &= \frac{u^2}{x^2} \left\{ \frac{1}{\pi \sqrt{e}} + \frac{u}{\sqrt{\pi} e} e^{u^2} (1 + \Phi(u)) \right\}, \quad u = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{2}}}, \\ W(y) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi} y^2} e^{-\left(\frac{y-1}{2y}\right)^2} \left(1 + \Phi\left(\frac{y+1}{2y}\right) \right). \end{aligned} \right.$$

An Hand der Fig. 5a und 5b kann man nun alle Fragen beantworten, die man über die Verteilung der lichtelektrischen Energie und der Akkumulationszeit stellen mag. Z. B.:

Der wahrscheinlichste Wert der lichtelektrischen Energie (Maximum der Kurve $W(x)$) liegt etwa bei $x = 0,7$. Er trägt also (vgl. Gleichung (53))

$$T = 0,7 \cdot h\nu_0.$$

Der wahrscheinlichste Wert der Akkumulationszeit (Maximum der Kurve $W(y)$) liegt bei $y = 0,4$. Er beträgt also (vgl. Gleichung (53)):

$$\tau = 0,4 \cdot \Theta.$$

Der „wahrscheinliche“ Wert von Energie und Akkumulationszeit, d. h. derjenige Wert, der ebensooft überschritten wie unterschritten wird, der sich also durch Halbierung der Flächen

Fig. 5a.

Fig. 5b.

bestimmt, ist für beide Kurven wenig kleiner als 1. Man hat daher für diese Werte:

$$T \cong h\nu_0, \quad \tau \cong \Theta.$$

Ebenso könnte man die mittleren Werte von T und τ bestimmen und würde für diese ebenfalls die Größenordnung $h\nu_0$ bzw. Θ finden.

Die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt eine lichtelektrische Emission zustande kommt, d. h. ein positives T bei positivem τ , ist gleich dem Inhalte der einen oder dem gleich großen Inhalte der anderen Kurve, nämlich:

$$\int_0^{\infty} W(x) dx = \int_0^{\infty} W(y) dy = 0,7.$$

Also nur 70 Proz. aller Fälle, die durch ganz beliebige Verteilung der Zeitpunkte t_i auf das Intervall τ gegeben sind, führen zu lichtelektrischer Aktivität, 30 Proz. nicht.

Von Wichtigkeit ist folgender Punkt: unsere Kurven liefern keine bestimmte obere Grenze für den Höchstwert der lichtelektrischen Energie, sondern geben eine Streuung, bei der beliebig große Werte x vorkommen können, wenn auch mit verschwindender Wahrscheinlichkeit. Wir betrachten in

dieser Hinsicht zwei Grenzfälle, welche folgendermaßen zustande kommen. *Entweder* dadurch, daß der Nenner $1 - \xi + \eta$ in (56) sehr klein wird. Dann wird gleichzeitig der zugehörige Wert von y , also auch die Akkumulationszeit sehr groß. Wir haben dann einen der im Anfang von § 7 genannten Fälle, wo die Energie des Resonators immer weiter ansteigt, ohne daß nach unserer Grundhypothese die Bedingung für die Befreiung des Elektrons erfüllt ist. Indem man andererseits die Länge der Akkumulationszeit nach den Umständen des Versuches begrenzt, kann man auch beliebig große Werte der Energie, die sich aus diesem Umstande ergeben, ausschließen. *Oder* wir haben einen anderen Grenzfall, welcher dadurch zustande kommt, daß der Zähler $1 + \eta$ in Gleichung (56) sehr groß wird. Der absolut größte Wert, den η annehmen kann, tritt offenbar dann ein, wenn in (48a) alle $\cos$ gleich 1, also alle $n_0(t_s - t_r)$ gleich einem ganzen Vielfachen von 2π werden. In diesem Falle folgen die Zeitpunkte t_s einander sozusagen im Takt, nämlich immer nach einem ganzen Vielfachen der Eigenschwingungsdauer $2\pi/n_0$ des Resonators. Eine derart geregelte (nicht mehr natürliche) Strahlung hat dieselbe Wirkung wie ein geregelter monochromatischer Wellenzug. In der Tat ist jetzt nach (48), (48a) und (56)

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{2}{S} \frac{S(S-1)}{2} = S - 1 = \infty,$$

also

$$x = 1, \quad y = 0.$$

Nun bedeutet $x = 1$ nach (53) $T = h\nu_0$, also den früher gefundenen Wert im monochromatischen Resonanzfalle. Andererseits bedeutet $y = 0$ nach (53), daß $\tau \ll \Theta$ wird; auch dieses ist im Einklang mit dem früher in Gleichung (14) gefundenen Wert von τ für monochromatisches Licht, wie man leicht auf Grund des Wertes (54) von Θ bestätigt. Auch versteht man ohne weiteres, daß bei derartig geregelter Energiezufuhr die Akkumulation der Energiemenge $h\nu_0$ viel schneller beendet ist, wie bei unregelter, natürlicher Strahlung, wo sie durchschnittlich die Zeit Θ erfordert. Offenbar kommt dem jetzt betrachteten Grenzfalle, wie überhaupt den im ersten Teil untersuchten Fällen, von unserem jetzigen Standpunkte aus wieder nur eine verschwindende Wahrscheinlichkeit zu.

§ 9. Nachträgliche Berechnung zweier Integrale.

Es handelt sich hier um den Beweis der beiden schon benutzten Formeln (47). Wir untersuchen also zunächst das Integral

$$J = \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt;$$

indem wir uns auf die Formeln (41) und (46) stützen, haben wir

$$\begin{aligned} J &= \frac{e E^2}{16 \pi^2 m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{1}{q + i(p - n_0)} - \frac{1}{q + i(p + n_0)} \right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dq \left(\frac{1}{q + i(q - n_0)} - \frac{1}{q + i(q + n_0)} \right) \\ &\quad \times \int_0^{\tau} x_q \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{i p t - i p t_s - i q t_r} dt. \end{aligned}$$

Hierbei mußte die Integrationsvariable und der Summationsindex der Gleichung (46), die dort ursprünglich mit p und s bezeichnet waren, in q und r verändert werden, um sie von den entsprechenden Größen der Gleichung (41) zu unterscheiden. Das Integral nach t , das wir mit J' bezeichnen, läßt sich ausführen. Es wird nämlich vermöge der Definition von x_q in Gleichung (45a):

$$\begin{aligned} J' &= \frac{1}{i} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s - i q t_r} \left\{ \frac{e^{i(p+q)\tau} - 1}{(p+q)(q^2 - n_0^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{e^{i(p+n_0)\tau} - 1}{(p+n_0)n_0(q-n_0)} + \frac{1}{2} \frac{e^{i(p-n_0)\tau} - 1}{(p-n_0)n_0(q+n_0)} \right\}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun je nach dem Vorzeichen von p und q vier Teile von J , die wir schematisch andeuten durch

$$(+ +), (+ -), (- +), (- -).$$

Hier bedeutet z. B. $(+ -)$, daß wir die Integration nach p von 0 bis $+\infty$, diejenige nach q von $-\infty$ bis 0 führen; entsprechende Bedeutung sollen die anderen drei Zeichen haben.

Bei der Ausrechnung können wir einige Vernachlässigungen machen. Zunächst ist die Frequenz n_0 eine sehr große Zahl (in sec^{-1} ausgedrückt); aber auch die Integrationsvariablen

p und q dürfen als große Zahlen derselben Größenordnung angesehen werden, da unser Spektrum nur in der Umgebung der Stelle n_0 merkliche Intensität hat. Andererseits ist ϱ im Verhältnis zu n_0 eine kleine Zahl. Im Falle $(+ -)$ können wir daher

$$\frac{1}{\varrho + i(p + n_0)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho + i(q - n_0)}$$

vernachlässigen gegen

$$\frac{1}{\varrho + i(p - n_0)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho + i(q + n_0)}.$$

Aus demselben Grunde können wir bei J' das mittlere Glied der $\{\}$ streichen gegen die beiden anderen. Wir erhalten daher näherungsweise

$$(+ -) = \frac{-e E^2}{16 \pi^2 i m} \int_0^\infty \frac{dp}{\varrho + i(p - n_0)} \int_{-\infty}^0 \frac{dq}{\varrho + i(q + n_0)}$$

$$\sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s - i q t_r} \frac{1}{q + n_0} \left\{ \frac{e^{i(p+q)\tau} - 1}{(p+q)(q-n_0)} + \frac{1}{2} \frac{e^{i(p-n_0)\tau} - 1}{(p-n_0)n_0} \right\}.$$

oder

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} (+ -) &= \frac{-e E^2}{16 \pi^2 i m} \int_0^\infty \frac{dp}{\varrho + i(p - n_0)} \int_0^\infty \frac{dq}{\varrho - i(q - n_0)} \\ \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i q t_r} &\frac{1}{q - n_0} \left\{ \frac{e^{i(p-q)\tau} - 1}{(p-q)(q+n_0)} - \frac{1}{2} \frac{e^{i(p-n_0)\tau} - 1}{(p-n_0)n_0} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Behandelt man die Kombination $(- +)$ genau ebenso, wobei aber jetzt in der $\{\}$ von J' der dritte Term gegen den ersten und zweiten zu streichen ist, so erhält man genau den konjugierten Wert zu $(+ -)$. Ferner erkennt man ebenso, daß mit derselben Annäherung zu setzen ist:

$$(+ +) = (- -) = 0.$$

Während nämlich z. B. bei $(+ -)$ von den Faktoren der Nenner in den beibehaltenen Gliedern der $\{\}$ zwei klein und nur je einer groß sind, sind z. B. bei $(+ +)$ in allen drei Gliedern je zwei dieser Faktoren groß und nur einer klein. Man hat daher im ganzen einfach

$$(62) \quad J = 2\Re(+ -),$$

unter $\Re$ den Übergang zum reellen Teil verstanden. Es

handelt sich also nur noch um die näherungsweise Auswertung des Doppelintegrals (61).

Wir bezeichnen das nach q genommene Integral mit Q und zerlegen dieses in vier Teile:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

wobei z. B. sein soll

$$(63) \begin{cases} Q_1 = \int_0^{\infty} \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-ip t_s + i q t_r} \frac{e^{i(p-q)\tau}}{(q - n_0)(p - q)(q + n_0)}, \\ Q_2 = - \int_0^{\infty} \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-ip t_s + i q t_r} \frac{1}{(q - n_0)(p - q)(q + n_0)}. \end{cases}$$

Die Integration nach q ist ursprünglich längs der positiven reellen Achse in einer q -Ebene zu erstrecken. Auf dieser liegen zwei Nullstellen der Nenner des Integranden, nämlich

$$q = n_0, \quad q = p.$$

Diese Stellen sind aber nicht etwa Unendlichkeitsstellen des Integranden von Q , da z. B. für $q = n_0$ die $\{\}$ in (61) und für $q = p$ der Zähler im ersten Term dieser $\{\}$ verschwindet. Man kann daher, ohne etwas an Q zu ändern, den Weg längs der reellen Achse nach Art der Fig. 6a in einen komplexen Weg deformieren, der den Stellen $q = n_0$ und $q = p$ aus dem Wege geht, und man muß dieses tun, wenn anders die Teilintegrale $Q_1, Q_2, \dots$ einen Sinn haben sollen. Ob wir dabei nach der positiv-imaginären Halbebene, wie in Fig. 6a angenommen, oder nach der negativ-imaginären ausweichen, ist gleichgültig, nur muß es konsequent, d. h. für alle vier Teilintegrale in gleicher Weise geschehen.

Wir deformieren jetzt den Integrationsweg in Q_1 weiter. Der Exponentialfaktor in Q_1 ist, soweit er von q abhängt:

$$e^{-i q (\tau - t_r)}.$$

Da $\tau - t_r > 0$, verschwindet er im Unendlichen der negativ-imaginären Halbebene. Wir ziehen den Integrationsweg daher nach dieser Halbebene hinüber bis an die negativ-imaginäre Achse heran, wobei er mit je einer Schleife im Punkte $q = p$ und $q = n_0$ hängen bleibt, und finden

$$Q_1 = Q_i + Q_{n_0} + Q_p;$$

dabei bedeutet Q_i die Integration längs der negativ-imaginären Achse, Q_{n_0} das Residuum von Q_1 im Punkte n_0 , Q_p dasjenige im Punkte p . Q_i ist sehr klein, da alle drei Faktoren im Nenner von Q_1 längs der imaginären Achse Zahlen von sehr großem absoluten Betrage sind. Es ist daher nach den voran-

Fig. 6a.

Fig. 6b.

gegangenen Vernachlässigungen nur konsequent, auch Q_i zu streichen.

Ferner ergibt sich nach der Residuenregel

$$(64) \left\{ \begin{aligned} Q_{n_0} &= \frac{-2\pi i}{q} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i n_0 t_r} \frac{e^{i(x - n_0)\tau}}{(p - n_0) 2 n_0}, \\ Q_p &= \frac{+2\pi i}{q - i(p - n_0)} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i p t_r} \frac{1}{(p - n_0)(p + n_0)}. \end{aligned} \right.$$

Eigentlich wäre noch ein drittes Residuum zu berücksichtigen, nämlich für die Nullstelle des Nenners $q - i(q - n_0)$, welche in der negativ-imaginären Halbebene bei

$$q = n_0 - i q$$

liegt. Das zugehörige Residuum würde aber den Exponentialfaktor

$$e^{-i(n_0 - i q)(\tau - t_r)} = e^{-i n_0(\tau - t_r)} e^{-q(\tau - t_r)}$$

enthalten, welcher sehr klein ist, da $q\tau$ und im allgemeinen auch $q(\tau - t_r)$ sehr große Zahlen sind. Wir können daher hier und im folgenden von Termen dieses Ursprunges absehen und haben einfach

$$Q_1 = Q_{n_0} + Q_p.$$

Behandeln wir in gleicher Weise die übrigen Teilintegrale $Q_2, \dots$, so finden wir sofort:

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0.$$

Dieselben enthalten nämlich sämtlich als Exponentialfaktor, soweit er von q abhängt, die Größe

$$e^{i q t_r},$$

welche im Unendlichen der positiv-imaginären Halbebene verschwindet. Hier haben wir also den Integrationsweg nach dieser Halbebene herüberzuziehen; dabei treten keine Residuen auf nach Maßgabe des in Fig. 6a gewählten ursprünglichen Weges. Alle drei Teilintegrale lassen sich daher überführen in die Integration längs der positiv-imaginären Achse, welche nur einen verschwindenden Beitrag zum Gesamtwerte von Q liefert. Wir haben daher im ganzen

$$Q = Q_1 = Q_{n_0} + Q_p.$$

Es bleibt noch das Integral nach p auszuführen, das wir mit P bezeichnen und in zwei Teilintegrale zerlegen:

$$(65) \quad P_1 = \int_0^{\infty} \frac{dp}{\varrho + i(p - n_0)} Q_{n_0}, \quad P_2 = \int_0^{\infty} \frac{dp}{\varrho + i(p - n_0)} Q_p.$$

In beiden verschwindet der Nenner (vgl. Gleichung (64)) für $p = n_0$, so daß die Integration längs der reellen Achse für diese Teilintegrale sinnlos wird. Dagegen ist die Summe beider $P = P_1 + P_2$ an der Stelle $p = n_0$ regulär, indem nach (64) gilt:

$$(p - n_0)(Q_{n_0} + Q_p) = 0 \quad \text{für} \quad p = n_0.$$

Wir haben daher ebenso wie oben zu verfahren, nämlich die reelle Integration in eine komplexe zu deformieren, die dem Punkte $p = n_0$ z. B. nach der Seite der positiv-imaginären Halbebene der p ausweicht (Fig. 6b).

Das Teilintegral P_1 hat nun (vgl. die erste Zeile von (64)) den Exponentialfaktor

$$e^{i p (\tau - t_0)}.$$

Dieser verschwindet in der positiv-imaginären Halbebene, nach der wir P_1 hinüberziehen. Daher bleibt nur die Integration längs der positiv-imaginären Achse übrig, welche einen verschwindenden Beitrag liefert, und es ergibt sich näherungsweise

$$P_1 = 0,$$

da auch das Residuum wegen des in der positiv-imaginären Halbebene verschwindenden Nenners $\varrho + i(p - n_0)$ wie oben vernachlässigt werden kann.

Dagegen lautet der Exponentialfaktor von P_2 (vgl. die zweite Zeile von (64)):

$$e^{-ip(t_s - t_r)}.$$

Hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, $t_r > t_s$ und $t_r < t_s$, oder, da wir uns die t_s der Größe nach geordnet denken:

$$r > s \quad \text{und} \quad r < s.$$

Im ersten Falle verschwindet der Exponentialfaktor in der positiv-imaginären Halbebene. Deshalb liefern bei der Deformation des Integrationsweges alle $r > s$ keinen Beitrag zum Integral P_2 . Dagegen haben wir im zweiten Falle nach der negativ-imaginären Halbebene der p zu gehen und das Residuum im Punkte $p = n_0$ zu beachten. Dieses lautet in der Summe für alle $r < s$:

$$(65) \quad P_2 = \frac{2\pi^2}{q^2 n_0} \sum_1^s \sum_1^s (r) e^{-in_0(t_s - t_r)}.$$

Schließlich haben wir nach Gleichung (61)

$$(+ -) = \frac{-e E^2}{16 \pi^2 i m} P_2$$

und erhalten nach Gleichung (62) und (65):

$$(66) \quad J = \frac{e E^2}{4 m q^2 n_0} \sum_1^s \sum_1^s (r) \sin n_0(t_s - t_r).$$

Dies ist die erste der zu beweisenden Gleichung (47); in (47) ist übrigens die Summe nach r nur bis $s-1$ geführt, da ja der $\sin$ für $s=r$ ohnehin verschwindet.

Wir wenden uns jetzt zum Beweis der zweiten Gleichung (47). Im Anschluß an (46) ist x^2 zunächst als Doppelintegral nach p, q und Doppelsumme nach s, r zu schreiben; $\overline{x^2}$ entsteht dann aus x^2 durch zeitliche Mittelung über das Intervall einer (oder einiger) Schwingungen zur Zeit $t = \tau$. Wir zerlegen $\overline{x^2}$ wieder in die vier Kombinationen nach den Vorzeichen von p und q :

$$(67) \quad \overline{x^2} = (++) + (+-) + (-+) + (--).$$

Mit den oben begründeten Vernachlässigungen ergibt sich nach (46):

$$\begin{aligned}
 (+ -) &= \frac{e^2 E^2}{16 \pi^2 m^2} \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_{-\infty}^0 \frac{dq}{q + i(q + n_0)} \overline{x_p x_q} \\
 &\quad \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s - i q t_r} \\
 &= \frac{e^2 E^2}{16 \pi^2 m^2} \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_0^\infty \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \overline{x_p x_{-q}} \\
 &\quad \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i q t_r}.
 \end{aligned}$$

Auch in dem Produkte $x_p x_{-q}$ sind einige Terme zu vernachlässigen. Dasselbe besteht nach (45a) aus Termen, welche bzw. mit den Exponentialfaktoren behaftet sind:

$$\begin{aligned}
 &e^{i(p-q)t}, \quad e^{i(p+n_0)t}, \quad e^{i(p-n_0)t}, \\
 &e^{i(n_0-q)t}, \quad e^{-i(n_0+q)t}, \quad e^{2i n_0 t}, \quad e^{-2i n_0 t}
 \end{aligned}$$

und zwei Termen mit dem Faktor

$$e^{i(n_0 - n_0)t} = 1.$$

Von diesen Exponentialfaktoren sind nun der zweite und die drei letzten schnell veränderlich nach t und geben daher bei der Mittelung nach t Null. In den übrigen kann die Mittelung dadurch ausgeführt werden, daß $t = \tau$ gesetzt wird. Man hat daher, ausführlich geschrieben:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} x_p x_{-q} &= \frac{e^{i(p-q)\tau}}{(p^2 - n_0^2)(q^2 - n_0^2)} - \frac{1}{2} \frac{e^{i(p-n_0)\tau}}{(p^2 - n_0^2)n_0(q - n_0)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{e^{i(n_0-q)\tau}}{(q^2 - n_0^2)n_0(p - n_0)} + \frac{1}{4} \frac{1}{(p - n_0)(q - n_0)n_0^2} \end{aligned} \right.$$

unter Weglassung eines zweiten mit dem Faktor 1 behafteten Termes, der an Stelle von $(p - n_0)(q - n_0)$ im Nenner $(p + n_0)(q + n_0)$ hat und daher gegen den hingeschriebenen relativ klein ist.

Untersucht man in gleicher Weise und in gleicher Näherung die Kombination $(-+)$, so findet man sie zu $(+-)$ konjugiert. Also

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} &(+ -) + (- +) \\ &= \frac{e^2 E^2}{8 \pi^2 m^2} \Re \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_0^\infty \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \overline{x_p x_{-q}} \\ &\quad \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i q t_r}. \end{aligned} \right.$$

Entsprechend lassen sich die beiden Kombinationen $(++)$ und $(--)$ zusammenziehen zu

$$(69a) \quad \left\{ \begin{aligned} & ((++) + (--)) \\ &= \frac{e^2 E^2}{8 \pi^2 m^2} \Re \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_0^\infty \frac{dq}{q + i(q - n_0)} \overline{x_p x_q} \\ & \quad \sum \sum e^{-ip t_s - iq t_r}, \end{aligned} \right.$$

wobei aber jetzt bedeutet

$$(68a) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{x_p x_q} &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(p - n_0)\tau}}{(p^2 - n_0^2) n_0 (q + n_0)} - \frac{1}{4} \frac{1}{(p - n_0) n_0^2 (q + n_0)} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{e^{i(q - n_0)\tau}}{(q^2 - n_0^2) n_0 (p + n_0)} - \frac{1}{4} \frac{1}{(q - n_0) n_0^2 (p + n_0)}. \end{aligned} \right.$$

Wir berechnen zunächst (69), bezeichnen das dort vorkommende Integral nach q mit Q , zerlegen es in vier Teile

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

entsprechend den vier Bestandteilen von (68), verlegen den Integrationsweg ins Komplexe entsprechend Fig. 6a und verfahren ganz analog wie früher. Es mögen in dieser Hinsicht die folgenden Andeutungen genügen:

Q_1 . Übergang in die negativ-imaginäre Halbebene, Residuum im Punkte $q = n_0$:

$$Q_1 = - \frac{2 \pi i}{q} \frac{e^{i(p - n_0)\tau}}{(p^2 - n_0^2) 2 n_0} \sum_{(s)} \sum_r e^{-ip t_s + i n_0 t_r}.$$

Q_2 . Übergang ins Unendliche der positiv-imaginären Halbebene:

$$Q_2 = 0.$$

Q_3 . Übergang zur negativ-imaginären Halbebene. Residuum für $q = n_0$:

$$Q_3 = \frac{2 \pi i}{q} \frac{1}{4 n_0^2 (p - n_0)} \sum_s \sum_r e^{-ip t_s + i n_0 t_r}.$$

Q_4 . Übergang nach der positiven Halbebene:

$$Q_4 = 0.$$

Durch Integration nach p im Sinne der Gleichung (69) entstehen aus Q_1 und Q_3 die beiden Integrale:

$$P_1 = \int_0^{\infty} \frac{dp}{q + i(p - n_0)} Q_1, \quad P_3 = \int_0^{\infty} \frac{dp}{q + i(p - n_0)} Q_3.$$

Integrationsweg wie in Fig. 6b. Bei P_1 nach der positiv-imaginären p -Halbebene zu deformieren. Daher

$$P_1 = 0.$$

Bei P_3 nach der negativen. Residuum für $p = n_0$. Daher

$$P_3 = -\frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{2\pi i}{q} \frac{1}{4n_0^2} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i n_0 (t_s - t_r)}.$$

Also nach (69):

$$(70) \quad (+-) + (-+) = \frac{e^2 E^2}{8 m^2 q^2 n_0^2} \sum_{(s)} \sum_{(r)} \cos n_0 (t_s - t_r).$$

Rechnet man ebenso (69a) aus, indem man die Integration nach q entsprechend den vier Termen von (68a) zerlegt in Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , so ergibt sich

$Q_1 = Q_2 = 0$, weil bei der Deformation des Integrationsweges nach der negativ-imaginären Halbebene keine singuläre Stelle überschritten wird.

$Q_3 = 0$, weil der Weg nach der positiven Halbebene herüberzuziehen ist.

$$Q_4 = -\frac{2\pi i}{4q n_0^2 (\rho + n_0)} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s - i n_0 t_r}.$$

Integriert man aber diesen Ausdruck wie in Gleichung (69a) vorgesehen, nach p , so tritt keine singuläre Stelle auf, an der bei der Deformation der Integrationsweg hängen bliebe. Deshalb wird in unserer Näherung

$$(++ +) + (---) = 0.$$

Nach (67) ist also $\bar{x}^2$ gleich dem in (70) berechneten Ausdruck und dieser erweist sich als identisch mit der zweiten der zu beweisenden Gleichung (47).

§ 10. Zusammenfassende und kritische Bemerkungen zu der vorgetragenen Theorie. Vergleich mit der Erfahrung.

Die Meinung liegt uns sehr ferne, als ob es in Wirklichkeit beim Photoeffekt genau nach unserer Grundhypothese

zuginge. Wir möchten diese Hypothese nur ansehen als Ersatz eines Atommodelles, gewissermaßen selbst als ein analytisches Modell der Haupteigenschaften des Atoms, welches wegen seiner größeren Allgemeinheit und Vorsichtigkeit vielleicht mehr Vertrauen verdient, als die spezielleren Konstruktionen des Atoms aus Massen, Ladungen, Bewegungen.

Die Haupteigenschaft unseres analytischen Mechanismus ist diese: das Atom ist ein in sich abgeschlossenes System, welches aus den umgebenden Feldern mittels eines resonierenden Elektrons Energie aufspeichern kann. Wann diese Abgeschlossenheit durchbrochen wird und aus dem Atominnern Energie nach außen abgegeben wird, bestimmt die Konstante h . Die physikalische Bedeutung von h wäre hiernach die, daß h bestimmt, wann eine quasielastische Bindung gesprengt oder ein Ventil am Atom geöffnet wird. Von der eventuellen Strahlungsdämpfung abgesehen, geschieht vermöge dieser Ventilwirkung die Energieabgabe diskontinuierlich und quantenhaft.

Eine gewisse Ähnlichkeit unserer Anschauung mit der neuen Strahlungshypothese von Planck (kontinuierliche Absorption, quantenhafte Emission) liegt auf der Hand, abgesehen von dem Umstande, daß die Plancksche Hypothese die Emission von Wellenstrahlung, die unserige die von Korpuskularstrahlung regulieren soll. Aber es bestehen auch sehr wesentliche Unterschiede: Planck operiert mit Energiequanten $h\nu$, wir allein mit dem Wirkungsquantum h ; bei Planck ist der Emissionsvorgang durch Wahrscheinlichkeit bestimmt, bei uns ist er durch unsere Grundhypothese genau determiniert, nur die Unkenntnis des wirksamen optischen Feldes bringt bei uns das statistische Element herein, während bei Planck das statistische Element bereits in den Resonator und seine Neigung zur Emission verlegt wird; bei Planck schwankt die (Strahlungs-)Energie nur zwischen den Werten $h\nu$, $2h\nu$, $3h\nu$..., bei uns streut die (Korpuskular-)Energie kontinuierlich, z. B. um den Mittelwert $h\nu$ im Resonanzfalle; bei Planck ist die Dämpfung prinzipiell, bei uns nur opportunistisch ausgeschlossen. Übrigens ist natürlich das Problem, das Planck stellt und löst, die Ableitung der Strahlungsgesetze, ein viel tieferes und schwierigeres als das unserige.

Einstein hat gelegentlich¹⁾ die Schwierigkeiten der Photoelektrizität und der verwandten Gebiete folgendermaßen charakterisiert:

„Man sieht nach unseren (gewöhnlichen elektromagnetischen) Vorstellungen nicht ein, warum Strahlung höherer Frequenz Elementarprozesse von größerer Energie zu erzeugen vermag als solche niedrigerer Frequenz. Wir begreifen weder die spezifische Wirksamkeit der Frequenz, noch den Mangel an spezifischer Wirksamkeit der Intensität.“

Wir können sagen, daß gerade diese Schwierigkeiten zu heben unsere Grundhypothese da ist, daß sie nämlich zeigt, wie eine „spezifische Wirksamkeit der Frequenz und eine Unwirksamkeit der Intensität“ gedacht werden kann, ohne die Energie selbst quantenhaft zu unterteilen.

Neben dieser Haupteigenschaft unseres Atommodelles sei auch darauf hingewiesen, daß unsere Grundhypothese für die maximale Ausschwingung des Elektrons kurz vor der Befreiung, Gleichung (15), eine charakteristische (von der Intensität des Lichtes unabhängige, universell durch die Frequenz bestimmte) Größe ergibt, die sich gut an die bekannte Größe der molekularen Wirkungssphäre anschließt. Die Ausdehnung der Atome erscheint hiernach gewissermaßen als eine Funktion von h , nämlich als diejenige Länge, über welche hin vermöge unserer h -Hypothese das Atom seine Elektronen noch zusammenhalten kann.

Auf eine Erklärung der Eigenfrequenz n_0 des Atoms haben wir verzichtet. Diese liegt ersichtlich außerhalb unserer h -Hypothese und erfordert speziellere Vorstellungen über den Atombau. Wir können dieserhalb auf F. A. Lindemann verweisen, der sowohl von der Vorstellung zentraler Coulombscher Kräfte wie quasielastischer Kräfte zu einer Formel gelangt ist, die meist sehr gut mit der Erfahrung beim selektiven Photoeffekt stimmt.²⁾

Besonderen Nachdruck möchten wir auf den Begriff der *Akkumulationszeit* legen, um so mehr, als wir, wie es scheint,

1) A. Einstein, Congrès Solvay 1911, p. 430. Paris 1912.

2) A. F. Lindemann, Congrès Solvay 1911, p. 392, Paris 1912; Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 13. p. 482. 1911.

demnächst wertvolles experimentelles Material¹⁾ zur Beurteilung dieser Frage haben werden. Da unsere Theorie die Energie des lichtelektrischen Effektes auf ganz natürliche Weise aus der Energie der primären Strahlung entnehmen läßt, so ist dazu eine endliche Zeit erforderlich. Der umgekehrte Standpunkt wäre der, daß die Energie des lichtelektrischen Effektes aus dem Atom stammt, daß die auffallende Strahlung nur auslösend wirkt, und daß ihre Energie nur dazu benutzt wird, um die in der Atomenergie entstandenen Defekte wieder aufzufüllen. Eine Entscheidung zwischen beiden Standpunkten ist nur dadurch möglich, daß die Konsequenzen beider Auffassungen gezogen und mit dem Experiment verglichen werden. Wir stellen daher hier zusammen, was unsere Auffassung über die Akkumulationszeit ergibt.

a) *Die Größe der Akkumulationszeit.* Die mittlere Länge der Akkumulation wird bestimmt durch Gleichung (54) und beträgt:

$$\Theta = \frac{4 \pi \rho h \nu_0}{e^2 U}.$$

ρ war die Abklingungskonstante der auffallenden Wellenzüge (Dimension sec^{-1}) und ist proportional mit der Breite der Spektrallinie, die zur Erregung dient. Wir entnehmen ρ aus der gewöhnlichen elektromagnetischen Dämpfung und beachten, daß wegen der Zusammenstöße das wirkliche ρ einige Male größer sein kann, wie das so berechnete. Nach Gleichung (30) zusammen mit (29 b) und (29) ist die Abklingungskonstante eines lediglich elektromagnetisch gedämpften Elektrons (in Gleichung (30) mit $\rho_0 n_0$ bezeichnet)

$$\frac{1}{2} \frac{e^2 n_0^2}{6 \pi c^3 m} = \frac{\pi e^2 \nu_0^2}{3 c^3 m},$$

so daß wir Θ auch schreiben können

$$\Theta = \frac{4 \pi}{3} \frac{h \nu_0^3}{U c^3} = \frac{4 \pi}{3} \frac{h}{U \lambda_0^3}.$$

Θ ist also im wesentlichen gleich h , geteilt durch die im Wellenlängen kubus enthaltene Energie.

1) Wir meinen die der Münchener Akademie vorgelegte, im Druck befindliche Arbeit von Joffé und die der Schweizer Naturforschergesellschaft vorgeführte Untersuchung von Edgar Meyer.

Die letztere entnehmen wir z. B. aus Beobachtungen¹⁾ von Fabry und Buisson. Nach diesen strahlt die grüne Quecksilberlinie einer Heraeuslampe ($\lambda_0 = 5460 \cdot 10^{-8}$) im Abstände 1 m auf den Quadratcentimeter

$$E = 0,583 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} = 58,3 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}.$$

Die Energiedichte im gleichen Abstände ist

$$U = \frac{E}{c} = 19,4 \cdot 10^{-10} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$$

und die Energie im Wellenlängenkeubus

$$U \lambda_0^3 = 3,1 \cdot 10^{-22}.$$

Daher

$$\Theta = 8,7 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

Bei dieser Ausrechnung wurde angenommen, daß die Breite der zu dem auslösenden Lichte gehörigen Spektrallinie nur herrührt von der elektromagnetischen Dämpfung der strahlenden Elektronen. Tatsächlich sind die Spektrallinien durchweg breiter und wird ihre Breite bei verdünnten Gasen in erster Linie durch den Dopplereffekt bestimmt. Das Verhältnis dieser beiden Breiten ist indessen nur etwa 10, so daß wir bei richtigeren Annahmen über die Linienbreite zwar eine Vergrößerung der Akkumulationszeit erwarten müssen, welche aber nicht sehr wesentlich ist. Ein weiterer Umstand, der eine Vergrößerung von Θ herbeiführen wird, ist die starke Absorption des Lichtes in den lichtelektrisch wirksamen Metallen, welche bewirkt, daß die auslösende Intensität für ein etwas unterhalb der Oberfläche liegendes Elektron eventuell nur ein kleiner Bruchteil der auffallenden Intensität ist.

Beobachtet man, nicht wie oben angenommen, in 1 m Abstand, sondern 10 cm von der Quelle entfernt, so wäre dagegen die Zeit wieder auf $\frac{1}{100}$ zu verkleinern; ebenfalls verkleinert wird sie, wenn man das Licht durch eine Linse konzentriert, oder wenn man mit röterem Licht von gleicher Stärke operiert. Im allgemeinen wird die Zeitdauer, wenn man die Intensität nicht außerordentlich schwächt, unmeßbar klein.

1) Ch. Fabry u. H. Buisson, *Compt. rend.* 152. p. 1838. 1911.

b) *Die Schwankung der Akkumulationszeit.* Wie in Fig. 5b dargestellt, ist die Dauer der Akkumulation keineswegs bestimmt, es kommen neben den überwiegenden Fällen mittlerer Werte sowohl sehr große, als unverhältnismäßig viel kleinere Werte vor, letztere namentlich dann, wenn (vgl. p. 913) die Energiezufuhr eine geeignet geregelte wäre. Eine untere Grenze für die Akkumulationszeit ist daher praktisch nicht vorhanden, ebensowenig wie eine obere. Der Vergleich mit der Erfahrung kann nur die mittlere Dauer betreffen.

Wie oben bei der Energie hervorgehoben und in Gegensatz zu der Planckschen Hypothese der Quantenemission gesetzt wurde, rührt die starke Streuung der Akkumulationszeit nur von den statistischen Eigenschaften des auffallenden Lichtes, nicht von dem Emissionsvorgange selbst her. Die Dauer des letzteren ist bei gegebener Zusammensetzung des erregenden Lichtes durch unseren Mechanismus mit gegeben.

Dagegen könnte ein weiteres Element des Zufalls durch die Dämpfung des mitschwingenden Elektrons eingeführt werden (deren Rolle bei uns nicht völlig geklärt ist). Wir sahen im monochromatischen Falle (§ 6), daß eine unternormale Dämpfung nötig ist, damit überhaupt nach unserer Grundhypothese lichtelektrische Emission stattfinden kann, und wir wollten uns vorstellen, daß durch wechselnde Konstellationen der Elektronen im Atom (Abschirmung der Ausstrahlung) die Dämpfung vermindert werden könne. Ein Zufallsmoment dieser Art muß durchaus hinzugezogen werden, will man nicht auf einen Widerspruch kommen: Wenn in allen Atomen die Elektronen zur photoelektrischen Wirkung gleichmäßig disponiert wären, so würde für alle der Akkumulationsprozeß zu gleicher Zeit beginnen, und es würde um diejenige Zeit, die dem Maximum in Fig. 5b entspricht, sozusagen eine lichtelektrische Katastrophe eintreten, indem ein unverhältnismäßig großer Photostrom aufträte, während nachher die lichtelektrische Aktivität allmählich versagen würde. Davon ist in Wirklichkeit nicht die Rede. Hier kommt also ein unserer Grundhypothese unzugängliches, sehr wesentliches neues Moment herein, das man lichtelektrische Disposition des Atoms nennen wird. Unser Befreiungsprozeß kann erst einsetzen, wenn zufällig diese Disposition erreicht ist. Durch diesen Umstand wird der licht-

elektrische Strom, wie wir annehmen, zeitlich konstant, trotz des in Fig. 5b dargestellten zeitlichen Verteilungsgesetzes. Als Ursache der wechselnden Disposition wäre in unserem Schema des Vorganges, wie gesagt, der größere oder geringere Betrag an Dämpfung anzusehen.

c) *Verträglichkeit mit den Kohärenzeigenschaften des Lichtes.* Wenn auch die unter a) berechnete Zeit Θ als klein bezeichnet wurde, so ist sie doch außerordentlich groß gegen die Zeiten, in denen eine Lichtquelle als kohärent wirkt. Der zugehörige „Lichtweg“ Θc ist nämlich in unserem Beispiel etwa $3 \cdot 10^8$ cm, während die Kohärenz selbst bei möglichst monochromatischen Lichtquellen schon nach Wegen von 50 cm praktisch aufhört. Dies wäre für die monochromatische Betrachtungsweise des ersten Teiles verhängnisvoll, macht aber bei der statistischen Behandlung durchaus keine Schwierigkeit.

Nachdem wir nach der Fourierschen Methode zerlegt haben, ist ja jeder der konstituierenden Wellenzüge unbegrenzt kohärent; die natürliche Beschaffenheit des Lichtes kommt nunmehr in der mit der Wellenlänge (nicht mit der Zeit) wechselnden Amplitude und Phase der einzelnen Bestandteile zum Ausdruck. Es liegt im Sinne der Fourierschen Methode, daß die zeitliche Unordnung in eine spektrale Unordnung übergeführt wird. Diese aber ist in unserer Rechnung vollständig berücksichtigt und überhebt uns weiterer Kohärenzrücksichten.

Beim Vergleich unserer Vorstellungen mit den Ergebnissen der Erfahrung möchten wir mehr auf die allgemeinen Züge des lichtelektrischen Vorganges — die spezifische Wirksamkeit der Frequenz (vgl. den Beginn dieses Paragraphen) und die Unwirksamkeit der Intensität — wie auf die quantitativen Einzelheiten Gewicht legen. Für die ersteren gibt unsere h -Hypothese ein geeignetes Modell, für die letzteren ist sie zu sehr schematisiert. Überdies sind gerade heute die quantitativen photoelektrischen Daten mit einer außerordentlichen Unsicherheit behaftet.

Von den beiden Typen des lichtelektrischen Vorganges, dem *normalen* und *selektiven*, kann unsere Theorie direkt wohl nur zur Darstellung des selektiven Effektes dienen.

Einmal wegen der Polarisationsverhältnisse: Unser Elektron schwingt in der Schwingungsrichtung der elektrischen Kraft

und tritt in dieser Richtung aus dem Atom aus. Soll es die Oberfläche des Metalles verlassen können, so muß also die elektrische Schwingung eine zur Oberfläche senkrechte Komponente haben. Dies ist bekanntlich die Bedingung für die Möglichkeit des selektiven Effektes, der ja bei senkrechter Inzidenz des Lichtes oder bei Polarisierung in der Einfallsebene aufhört.

Sodann wegen der selektiven Folgen, die die Einführung der Eigenschwingungszahl ν_0 für die Nähe der Resonanz theoretisch mit sich bringt. Allerdings bezieht sich das beobachtete selektive Maximum auf den Strom (die Anzahl der Teilchen), unsere theoretische Zacke aber auf die Energie (die Geschwindigkeit der Teilchen). Es wäre außerordentlich wichtig zu wissen, ob, wie man vermuten sollte, tatsächlich mit dem selektiven Stromeffekt auch ein selektiver Geschwindigkeitseffekt, d. h. eine Steigerung der Anfangsgeschwindigkeiten in der Nähe des Maximums der Stromkurve, Hand in Hand geht. Nach Beobachtungen von Wright¹⁾ schien es so. Dieser fand bei Al für $\lambda = 2166 \text{ \AA}$. eine ausgeprägte Zacke in der Energiekurve (Aufladepotential) und nach der oben zitierten Formel von Lindemann, die das Maximum des Stromes bei den Alkalien so gut wiedergibt, ist $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-5}$ gerade derjenige Wert, für den man bei Al ein selektives Maximum des Stromes erwarten muß (wenigstens dann, wenn man dazu die Wertigkeit von Al gleich 1 nimmt). Indessen bedürfen einerseits die Wrightschen Ergebnisse (wie alle quantitativen photoelektrischen Daten) der Nachprüfung, andererseits haben Pohl und Pringsheim ein Strommaximum für Al nicht bei $\lambda = 2166$, sondern bei $\lambda = 2600$ gefunden.

Den photoelektrischen Strom nach unserer Theorie zu bestimmen, ist unmöglich. Seine Größe hängt von der Anzahl Atome ab, die, wie wir oben sagten, zur lichtelektrischen Aktivität disponiert sind; sie ist daher unserer Theorie nicht zugänglich.

Man könnte den normalen Effekt dadurch in unsere Vorstellungen einzubeziehen suchen, daß man im Atom sehr viele Resonatoren von allen möglichen ν_0 vorhanden denkt, die

1) J. R. Wright, Physik. Zeitschr. 12. p. 338. 1911.

voneinander unabhängig sein sollen. Man würde dann das Einsteinsche Gesetz (vgl. p. 884) im eigentlichen Sinne haben, d. h. die Gültigkeit der Gleichung $T = h\nu$ im ganzen Spektrum und dementsprechend eine kontinuierliche Zunahme der Energie nach Violett statt einer einmaligen Zacke.

Indessen ist diese Vorstellung von den vielen unabhängigen Resonatoren nicht nur sehr künstlich; sie würde auch dem charakteristischen Unterschied über die erforderliche Polarisation zwischen selektivem und normalem Effekt nicht Rechnung tragen. Wir müssen daher auf ein spezielleres Verständnis des normalen Effektes verzichten und uns damit begnügen, daß unsere Theorie einige allgemeinste Züge des lichtelektrischen Problems wiedergibt, ohne mit der Elektrodynamik in Konflikt zu kommen; insoweit wenigstens, als man in der erforderlichen unternormalen Dämpfung keine prinzipielle Schwierigkeit sehen will.

(Eingegangen 7. April 1913.)