**2. Ueber die von der
Variation electrostatistischer Energie abgeleiteten
electrischen ponderomotorischen Kräfte;
von N. Schiller.**

Im Nachfolgenden schlage ich eine Methode vor zur Ableitung der Maxwell'schen, v. Helmholtz'schen und Kirchhoff'schen electrischen Druckkräfte; die angegebene Ableitungsweise wird vielleicht auf kürzerem Wege zum Endresultat der Rechnung führen, als diejenige, welche in den Abhandlungen der obenerwähnten Begründer der Electrostrictionstheorie benutzt wurde.¹⁾

Ponderomotorische electrische Druckkräfte werden bekanntlich gefunden, indem man die electrostatische Energie eines gegebenen Systems leitender Körper und Isolatoren in Bezug auf entsprechende Parameter variirt. Die Parameter müssen dabei so gewählt werden, dass sie die Form und die gegenseitige Stellung der vorhandenen electrisirten Körper endgültig bestimmen könnten. Da nun überhaupt mehrere Parametergruppen gefunden werden können, welche die Lage des Systems einzeln angeben, so müssen entsprechend auch verschiedene einander äquivalente Kräftegruppen existiren, welche die gegenseitige Wirkung den Theilen eines gegebenen electrischen Systems vorstellen. Ausserdem kann man immer irgend ein fingirtes System von Gelenkmechanismen erfinden, welches derart mit gegebenen electrisirten Körpern verbunden wäre, dass die Parameter des neuen Systems jede Lage der vorhandenen Körper vollständig bestimmen könnten. Dann würden die Wirkungen zwischen den erwähnten electrisirten Körpern auf die Kräfte herabgeführt, welche verschiedene Theile des neuhinzugefügten fingirten Systems angreifen.

Als einen geeignetsten Ausdruck für electrische Energie wählen wir den folgenden:

$$(1) \quad W = \iiint \frac{K}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

1) v. Helmholtz, Abh. 2. p. 798. 1884; Kirchhoff, Abh. Nachtrag. p. 91. 1884; Lorberg, Wied. Ann. 21. p. 300. 1884.

wobei die Integration auf alle diejenigen Theile des unendlichen Volumens des electrischen Feldes zu erstrecken ist, wo die Werthe von $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ von Null verschieden bleiben. Der dielectriche Coefficient K ist dabei als Function von den Raumcoordinaten x , y , z zu betrachten. Ausserdem darf die Function K an gewissen Trennungsflächen sprungweise sich ändern, wobei aber $K(\partial\varphi)/\partial n$ immer stetig bleiben soll, indem n die Richtung der Normale zu einer der erwähnten Trennungsflächen bezeichnet.

Nun stelle man sich ein continuirliches Medium vor, welches den ganzen Raum des electrischen Feldes ausfüllt und mit den Theilen der verschiedenen leitenden und dielectriche Körper auf die Art verbunden ist, dass die in Betracht kommenden Verschiebungen der letzteren durch geeignete Verrückungen der Volumenelemente des erwähnten Mediums vollständig angegeben werden könnten. Dabei darf man dem fingirten Medium nur diejenigen kinematischen Eigenschaften zuschreiben, welche der Beweglichkeit des vorhandenen Körpersystems entsprechen, oder sind umgekehrt nur diejenigen Verschiebungen des letzteren zu betrachten, welche durch die im voraus vorgeschriebenen kinematischen Eigenschaften eines continuirlichen Mediums bedingt werden könnten.

Es werde angenommen, dass die Punkte des fingirten continuirlichen Mediums mit den Punkten des Raumes, nach dessen Volumenelementen das Integral (1) berechnet wird, zusammenfallen. Um die Continuitätsbedingungen des Mediums zu erfüllen, müssen die virtuellen Verschiebungen δx , δy , δz seiner Punkte als stetige Functionen der Raumcoordinaten in denjenigen Raumgebieten betrachtet werden, wo K ebenso stetig bleibt. Nimmt man dabei an, dass die Projectionen der virtuellen Verschiebungen auf die Normale zur Trennungsfläche der Gebiete, wo die Stetigkeit von K aufhört, auch stetig bleiben, so wird dadurch die Bedingung der Unzertrennlichkeit verschiedener electrischer Körper eingeführt, wobei die Möglichkeit einer Gleitung nicht ausgeschlossen bleibt.

Wir wollen nun die Variation δW untersuchen, welche durch die oben erwähnten virtuellen Verschiebungen hervorgerufen wird, indem wir die Integration in (1) auf die unver-

änderlichen Raumpunkte, zwischen den geänderten Grenzen, beziehen. Wird K bloss als eine Function von den Raumcoordinaten gegeben, so bleibt es bei den Verschiebungen unverändert; hängen dagegen die Werthe von K im Raume von der Lage der Körperpunkte ab, so kommt nach der erfolgten Verschiebung ($\delta x, \delta y, \delta z$) in dem Raumpunkt (x, y, z) derjenige Werth von K an, welcher vor der Verschiebung dem Raumpunkte $(x - \delta x, y - \delta y, z - \delta z)$ entsprach. Daraus folgt:

$$(2) \quad \delta K = - \frac{\partial K}{\partial x} \delta x - \frac{\partial K}{\partial y} \delta y - \frac{\partial K}{\partial z} \delta z.$$

Die Integrationsgrenzen von (1), welche etwa durch x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 bezeichnet werden mögen, gehen durch die Verschiebungen in $x_1 + \delta x_1 \dots, x_2 + \delta x_2 \dots$ über, wobei $\delta x_1 \dots, \delta x_2 \dots$ durch die willkürlichen Verrückungen innerer Punkte angegeben werden oder umgekehrt.

Was nun die Function φ betrifft, so geht ihr Werth φ in einem unbeweglichen Raumpunkte (x, y, z) in Folge der stattgefundenen Verschiebungen in den vom früheren unendlich wenig verschiedenen Werth φ' über. Die Potentialfunction kann aber nirgends im Innern eines Raumes, wo sie stetig bleibt, Maximal- und Minimalwerthe annehmen; deshalb findet man in unendlicher Nähe vom Punkte (x, y, z) Werthe von φ , welche um unendlich wenig sowohl grösser als kleiner gegen den im Punkte (x, y, z) stattfindenden Werth ausfallen; in folgedessen kann man immer einen Punkt finden, wo derjenige Werth von φ besteht, welcher durch die Verschiebung in den Punkt (x, y, z) übergeht. Es kann aber dabei wohl geschehen, dass der Uebergang der Werthe von φ von einem Punkt des Raumes in den anderen nicht mit den erfolgten Verschiebungen zusammenfällt und dass der in dem Punkt (x, y, z) ankommende Werth von φ nicht dem in dieselbe Lage verschobenen Punkt des beweglichen Mediums entspricht. Indessen dürfen wir die anfänglichen Grenzwerte von φ auf die Weise ändern (z. B. durch Zu- und Ableiten der Ladungen), dass das obenerwähnte Zusammenfallen der Verschiebungen beweglicher Punkte mit dem Uebergang der Werthe von φ zu Stande kommen könnte. Ist es uns gelungen, die dazu nöthige Aenderung der Grenzwerte von φ herauszufinden, so

würde die Variation von φ auf dieselbe Weise berechnet, wie die von K und zwar würde

$$(3) \quad \delta \varphi = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z.$$

sein.

Es ist einleuchtend, dass in den Raumpunkten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, welche den Integrationsgrenzen vor der Verschiebung entsprachen, die Function $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in $\varphi(\bar{x} - \delta x, \bar{y} - \delta y, \bar{z} - \delta z)$ übergeht. Um den Werth von φ in den durch die Verschiebungen neuentstandenen Grenzen zu ermitteln, muss man in $\varphi(\bar{x} - \delta x, \bar{y} - \delta y, \bar{z} - \delta z)$ die geänderten Grenzwerte $\bar{x} + \delta x, \bar{y} + \delta y, \bar{z} + \delta z$ der Coordinaten setzen, wodurch man wieder zum Werth $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ kommt. Daraus schliessen wir also, dass die Variation von φ nur dann auf die in (3) angegebene Weise berechnet werden darf, wenn die virtuellen Verrückungen unter der Bedingung zu Stande kommen, dass die leitenden Oberflächen auf constanten Potentialen bleiben. Durch die erwähnte Nebenbedingung wird aber die Willkürlichkeit der Verschiebungen gar nicht beschränkt.

Findet man also die Variation δW bei unveränderten Grenzwerten der Potentialfunction, so erhält man nach Maxwell die Arbeit, welche durch die ponderomotorischen Kräfte bei den entsprechenden Verrückungen geleistet wird und somit kommt man zum Ausdruck der erwähnten Kräfte. Nimmt man dabei an, dass K für jeden dielectricischen Körper constant bleibt oder bloß wie eine Function der Punktcoordinaten der letzteren sich ändert, so erhält man die Maxwell'schen Kräfte; führt man noch ein, dass K ausserdem von den relativen Verschiebungen der Körpertheile abhängen soll, so kommt man zu den Kräften, welche von Korteweg, v. Helmholtz, Lorberg und Kirchhoff zuerst in Betracht gezogen wurden.

Wir wollen mit den Maxwell'schen Kräften anfangen.

Setzt man

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = R^2,$$

so hat man

$$(5) \quad \delta W = \Sigma \delta \iiint \frac{K}{8\pi} R^2 d\Omega,$$

wo jedes Integral der bezeichneten Summe nur auf den Raum, wo K stetig bleibt, zu erstrecken ist. Man findet weiter:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W &= \Sigma \iiint \frac{\delta K}{8\pi} R^2 d\Omega + \Sigma \iiint \frac{K}{8\pi} 2R \delta R d\Omega \\ &- \Sigma \iiint \frac{K}{8\pi} R^2 (\cos(n, x) \delta x + \cos(n, y) \delta y \\ &\quad + \cos(n, z) \delta z) dS, \end{aligned} \right.$$

wo $d\Omega = dx dy dz$, dS ein Element der Grenzoberfläche und n — die Richtung der Normale zum betrachteten Flächenelement ist. Sie ist in das geschlossene Integrationsgebiet nach innen gerichtet. Nimmt man weiter in Betracht, dass

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0,$$

so findet man:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{K}{8\pi} 2R \delta R &= \frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta \varphi \right), \end{aligned} \right.$$

und da nach (2) und (3)

$$\begin{aligned} \delta K &= - \frac{\partial K}{\partial x} \delta x - \frac{\partial K}{\partial y} \delta y - \frac{\partial K}{\partial z} \delta z, \\ \delta \varphi &= - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z, \end{aligned}$$

so folgt:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W &= - \Sigma \iiint \frac{R^2}{8\pi} \left(\frac{\partial K}{\partial x} \delta x + \frac{\partial K}{\partial y} \delta y + \frac{\partial K}{\partial z} \delta z \right) d\Omega \\ &+ \Sigma \iiint \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z \right) dS \\ &- \Sigma \iiint \frac{K}{8\pi} R^2 (\cos(n, x) \delta x + \cos(n, y) \delta y \\ &\quad + \cos(n, z) \delta z) dS. \end{aligned} \right.$$

Sondert man im obigen Ausdruck die Coefficienten bei den willkürlichen Grössen δx , δy , δz ab, so kommt man zu folgenden Kräften:

1. Zu den Kräften, welche an jedem inneren Punkt des continuirlichen Mediums angreifen. Bezeichnet man ihre Com-

ponenten nach den Coordinatenaxen auf eine Volumeneinheit bezogen, durch X , Y , Z , so findet man:

$$(10) \quad X = -\frac{R^2}{8\pi} \frac{\partial K}{\partial x}, \quad Y = -\frac{R^2}{8\pi} \frac{\partial K}{\partial y}, \quad Z = -\frac{R^2}{8\pi} \frac{\partial K}{\partial z};$$

2. Zu den Kräften, welche auf die Elemente der Grenzoberflächen wirken und deren Componenten, auf die Flächeneinheit bezogen, sind:

$$(11) \quad \begin{cases} X = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{K}{8\pi} R^2 \cos(n, x), \\ Y = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{K}{8\pi} R^2 \cos(n, y), \\ Z = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{K}{8\pi} R^2 \cos(n, z), \end{cases}$$

wobei n die Richtung der inneren Normale bezeichnet.

Die Grenzpunkte des betrachteten Mediums liegen entweder an der Oberfläche eines leitenden Körpers oder an der Trennungsfläche zweier Isolatoren. Was die leitende Oberfläche betrifft, so ist es ersichtlich, dass infolge von

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(n, x) \quad \text{u. s. w.}$$

die Resultirende von $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ durch die Kraft

$$(12) \quad \frac{K}{8\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2$$

dargestellt wird, welche senkrecht zur leitenden Oberfläche vom leitenden Körper weg in den Isolator gerichtet ist. Wird die Möglichkeit der Trennung des Isolators vom Conductor ausgeschlossen, so kann man die erwähnte Resultirende als eine, sowohl auf den letzteren wie auf den ersteren, wirkende Kraft betrachten. Können aber der vorhandene Isolator und der Leiter voneinander getrennt werden, so tritt jedenfalls an die Stelle des verschobenen Isolators ein anderes dielectrisches Medium (oder endlich auch dasjenige, welches wir als das *Leere* bezeichnen). In diesem Falle müssen wir der die leitende Oberfläche angreifenden Kraft den Werth

$$\frac{K_0}{8\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2$$

zuschreiben, wobei K_0 den dielectrischen Coefficienten des neu

eintretenden Mediums bezeichnet. Im Falle des *leeren* Raumes ist $K_0 = 1$ zu setzen.

An der Grenze zweier dielectricischer Medien, wo R überhaupt nicht mit n zusammenfällt, findet man für das eine der beiden Medien:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{K}{8\pi} R^2, \\ F_n = F \cos(F, n) = \frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 - \frac{K}{8\pi} R^2, \\ \cos(F, n) = \cos 2(R, n), \\ F_s = F \sin(F, n) = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \end{array} \right.$$

wobei s die Richtung bezeichnet, welche senkrecht zu n ist, d. h. in der Tangentialebene der Trennungsfläche und dabei in der Ebene von F und n liegt. Der zweite der beiden angrenzenden Isolatoren bedingt auch die Kräfte, welche auf die gegenseitige Grenzfläche wirken und welche ebenso wie (11), (12) und (13) sich ausdrücken lassen, indem man darin statt K und n die Bezeichnungen K' und n' einführt; dabei ist leicht zu ersehen, dass die Richtungen von n und n' einander entgegengesetzt sind und dass F und F' , welche in dieselbe Ebene mit n, n' zu liegen kommen, mit dieser letzteren Richtung verschiedene Winkel bilden. Ist für die beiden sich berührenden Isolatoren die Möglichkeit der Trennung und des Auseinandergleitens ausgeschlossen, so findet man, dass die Resultirende der beiden Kräfte F und F' gleich $F_n - F'_n$ sein und in der Richtung von n wirken muss, da wegen der Stetigkeit von $\partial \varphi / \partial s$, $F_s = -F'_s$ ist. Beachtet man, dass

$$(14) \quad K \frac{\partial \varphi}{\partial n} - K' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 0, \quad R'^2 - R^2 = \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2,$$

So erhält man aus (13):

$$(15) \quad F_n - F'_n = \frac{K' - K}{8\pi} \left[R^2 + \frac{K - K'}{K'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \right]$$

und ausserdem, wie schon früher bemerkt:

$$(16) \quad F_s = -F'_s.$$

Falls die beiden Isolatoren sich von einander trennen können, wirken die Kräfte F und F' gesondert auf die einzelnen von einander verschiebbaren Flächenelemente. Es kommt aber,

wie schon oben erklärt wurde, an die Stelle des weggeschobenen Isolators ein neues durch den Coefficienten K_0 charakterisirtes dielectrisches Medium, welches schon als untrennbar von den beiden Isolatoren betrachtet werden muss; dann geht die normale auf den Isolator K wirkende Flächenkraft in die folgende über:

$$(15') \quad F_n - F_n'' = \frac{K_0 - K}{8\pi} \left[R^2 + \frac{K - K_0}{K_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \right].$$

Stellt man die sehr wahrscheinliche Hypothese auf, dass das von den leitenden Isolatoren untrennbare dielectrische Medium (oder die *Leere*) mit denselben so verbunden sei, dass die Möglichkeit des Aneinandergleitens dabei ausgeschlossen wäre, so fallen die Tangentialkräfte an den Grenzen der von einander verschiebbaren Isolatoren, wegen $F'_s = -F''_s$, wieder gleich Null aus.

Die Variation δW können wir ausserdem so transformiren, dass dieselbe nur durch Volumenintegrale ausgedrückt wird; demzufolge kann man auch die electrischen ponderomotorischen Kräfte sich als solche vorstellen, die auf alle Volumenelemente des Mediums vertheilt werden. Zieht man nämlich in Betracht, dass

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \iint \frac{K}{8\pi} R^2 (\cos(n, x) \delta x + \cos(n, y) \delta y + \cos(n, z) \delta z) dS \\ & = \iiint \frac{K}{8\pi} R^2 \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) d\Omega \\ & + \iiint \frac{R^2}{8\pi} \left(\frac{dK}{dx} \delta x + \frac{\partial K}{\partial y} \delta y + \frac{\partial K}{\partial z} \delta z \right) d\Omega \\ & + \iiint \frac{K}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right) dx \right. \\ & \quad + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) \delta y \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \delta z \right] d\Omega, \end{aligned} \right.$$

wobei das dritte Volumenintegral des letzten Ausdrucks folgendermaassen transformirt werden kann

$$\begin{aligned}
& - \iint \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z \right) dS \\
& - \iiint \frac{K}{4\pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \delta z}{\partial x} \right) \right. \\
& \quad + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) \\
& \quad \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) \right] d\Omega;
\end{aligned}$$

so geht die Form (9) in die folgende über:

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \delta W = \iiint d\Omega & \left\{ \frac{K}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \delta x}{\partial x} \right. \\ & + \frac{K}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial \delta y}{\partial y} \\ & + \frac{K}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ & - \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) \\ & - \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) \\ & \left. - \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck (18) von δW stellt die Arbeit dar, welche von den auf jede Flächeneinheit der sämtlichen Volumenelemente $d\Omega$ wirkenden normalen und tangentialen Druckkräften bei willkürlichen Elongationen und Scheerver-schiebungen in den genannten Volumenelementen geleistet wird. Jede der drei normalen Flächenkräfte wird am entsprechenden Volumenelement durch die Coefficienten bei den willkürlichen Elongationen

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \delta z}{\partial z}$$

dargestellt; die Coefficienten der willkürlichen Scheerver-schiebungen

$$\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right), \quad \left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x} \right), \quad \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right)$$

drücken dagegen die entsprechenden tangentialen Flächenkräfte aus. Die beiden erwähnten Gattungen der electrischen Druckkräfte sind diejenigen, welche von Maxwell zuerst angedeutet wurden; diese Kräfte können bekanntlich durch ein System normaler Hauptkräfte ersetzt werden, welche das dielectrische Medium in der Richtung der Kraftlinien zusammendrücken und in der den letzteren senkrechten Richtung dehnen. Je nach der Grösse fallen alle Hauptkräfte gleich $(K/8\pi)R^2$ aus.

Betrachten wir nun die von v. Helmholtz eingeführte Bedingung, dass die dielectrischen Coefficienten infolge der durch die Verschiebungen δx , δy , δz hervorgerufenen *Verdichtung* des Dielectricums sich ändern sollten. Unter der Verdichtung verstehen wir den Werth von $\delta \varrho / \varrho$, wo ϱ die Dichtigkeit des vorhandenen Dielectricums bezeichnet, und

$$(19) \quad -\frac{\delta \varrho}{\varrho} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = \delta \theta$$

die cubische Ausdehnung vorstellt.

Der erwähnten v. Helmholtz'schen Bedingung gemäss, nimmt die Variation δK eine folgende Form an:

$$(20) \quad \delta K = -\frac{\partial K}{\partial x} \delta x - \frac{\partial K}{\partial y} \delta y - \frac{\partial K}{\partial z} \delta z + \frac{\partial K}{\partial \theta} \delta \theta;$$

man führe ausserdem die Bezeichnung ein:

$$(21) \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = -\frac{\partial K}{\partial \log \varrho} = -4\pi \theta,$$

wobei θ als eine Function der Coordinaten betrachtet werden kann. Nachher ist leicht zu ersehen, dass die neu eingeführte Art der Veränderlichkeit von K ein neues Glied im Ausdruck (17) oder (9) von δW ergibt, von der Form

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_1 W &= -\Sigma \iiint \frac{R^2}{\delta \pi} 4\pi \theta \delta \theta d\Omega \\ &= -\Sigma \iiint R^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) d\Omega, \end{aligned} \right.$$

woraus man durch Partialintegration erhält:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} \delta_1 W &= \Sigma \iiint \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\theta R^2)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial(\theta R^2)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial(\theta R^2)}{\partial z} \delta z \right] d\Omega \\ &+ \Sigma \iint R^2 \frac{\theta}{2} [\cos(n, x) \delta x + \cos(n, y) \delta y + \cos(n, z) \delta z] ds. \end{aligned} \right.$$

Aus (23) ersieht man, dass durch die neu eingeführte Veränderlichkeit von K neue ponderomotorische electrische Kräfte entstehen, welche man als von Helmholtz'sche Kräfte zu bezeichnen pflegt, und welche folgender Weise ausfallen:

1) Die Kräfte, welche an den inneren Punkten des Dielectricums angreifen und deren auf eine Volumeneinheit bezogene Componenten sind:

$$(24) \quad X_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial(\theta R^2)}{\partial x}, \quad Y_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial(\theta R^2)}{\partial y}, \quad Z_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial(\theta R^2)}{\partial z};$$

2) die Kräfte, welche an den Elementen der Grenzoberfläche angreifen und deren auf eine Flächeneinheit bezogene Componenten sind:

$$(25) \quad \bar{X}_1 = \frac{\theta}{2} R^2 \cos(n, x), \quad \bar{Y}_1 = \frac{\theta}{2} R^2 \cos(n, y), \quad \bar{Z}_1 = \frac{\theta}{2} R^2 \cos(n, z),$$

wobei n die Richtung der inneren Normale bezeichnet.

Die durch die Componenten (25) gegebenen Grenzkkräfte sind überall senkrecht zur Grenzoberfläche des betrachteten Dielectricums gerichtet. An der Grenzoberfläche der Leiter vergrößert die von Helmholtz'sche Kraft die dort existirende Spannung $K/\delta\pi(\partial\varphi/\partial n)^2$ um die Grösse $\theta/2(\partial\varphi/\partial n)^2$. An der Trennungsfläche zweier dielectrischer Körper wirken auf jedes Flächenelement zwei entgegengesetzte neue Normalkräfte: $(\theta/R)^2$ und $(\theta'/2)R'^2$. Erinnt man sich, dass

$$(26) \quad R'^2 = R^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^2 \frac{K'^2 - K^2}{K'^2},$$

wobei n in das durch die Grössen R, K, θ characterisirte Dielectricum hinein gerichtet ist, so findet man die Resultirende der beiden erwähnten Normalkräfte, in der Richtung von n :

$$(27) \quad \frac{\theta}{2} R^2 - \frac{\theta'}{2} R'^2 = \frac{R^2}{2} (\theta - \theta') + \frac{\theta'}{2} \frac{K'^2 - K^2}{K'^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^2.$$

Falls die beiden Isolatoren voneinander getrennt werden können, kommen, ebenso wie im Falle der Maxwell'schen Kräfte, statt (27) die Kräfte zum Vorschein, welche auf die

voneinander verschiebbaren Grenzelemente wirken und in folgender Form ausgedrückt werden können:

$$(27') \quad \frac{R^2}{2}(\theta - \theta_0) + \frac{\theta_0}{2} \frac{K_0^2 - K^2}{K_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2,$$

wobei θ_0 und K_0 auf ein neu hinzutretendes, vom Isolator untrennbares Medium bezogen sind. Ist das letzte Medium der *leere* Raum, so geht (27) in $(R^2/2)\theta$ über.

Ausserdem ist aus (22) ersichtlich, dass die v. Helmholtz'schen Kräfte in jedem Volumenelement Normalkräfte (Dehnungen) $-(\theta/2)R^2$ hervorrufen, welche als supplementäre im Innern des Dielectricums wirkende hydrostatische Drucke von der Grösse $(\theta/2)R^2$ betrachtet werden können.

Zum Schluss wollen wir noch die von Korteweg¹⁾ gemachte Voraussetzung in Betracht ziehen, dass die dielectricischen Coefficienten in Folge der Elongationen des Dielectricums je nach der Richtung der Kraftlinien oder senkrecht zu denselben sich verschieden ändern. Diese Voraussetzung führt, wie Kirchhoff zeigte, neben dem v. Helmholtz'schen Coefficienten noch einen neuen ein, der die Abhängigkeit des K von den Elongationen λ des Mediums in der Richtung der Kraftlinien charakterisiren soll. Setzt man

$$(28) \quad \frac{\partial K}{\partial \lambda} = -4\pi\gamma^2,$$

so nimmt dadurch die Variation δK eine neue Form an:

$$(29) \quad \delta K = -\frac{\partial K}{\partial x} \delta x - \frac{\partial K}{\partial y} \delta y - \frac{\partial K}{\partial z} \delta z - 4\pi\theta \delta \vartheta - 4\pi\gamma \delta \lambda.$$

Wir ersehen also, dass die Kirchhoff'sche Bedingung zu einem neuen additiven Glied $\delta_2 W$ im Ausdruck der Variation von W führt, und zwar so, dass

$$(30) \quad \delta_2 W = -\Sigma \iiint R^2 \frac{\gamma}{2} \delta \lambda d\Omega.$$

Zieht man weiter in Betracht, dass, wie leicht zu ersehen ist:

1) Korteweg, Wied. Ann. 9. p. 48. 1880.

2) Nach der Bezeichnungsweise von Kirchhoff ist $\theta = x'$, $\gamma = x''$, nach Lorberg ist $\theta = \beta$, $\gamma = \alpha - \beta$, nach Korteweg ist $4\pi\theta = x_2$, $4\pi\gamma = x_1 - x_2$.

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \lambda \cdot R^2 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right), \end{aligned} \right.$$

so kommt man zum folgenden Ausdruck für $\delta_2 W$:

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_2 W &= - \iiint R^2 \frac{\gamma}{2} \delta \lambda \, d\Omega \\ &= \Sigma \iiint d\Omega \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \delta x \right. \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \delta y \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \delta z \Big\} \\ &\quad + \Sigma \iint dS \frac{\gamma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z \right). \end{aligned} \right.$$

Daraus lassen sich folgende Kirchhoff'sche Kräfte ableiten:

1. die Kräfte, welche auf jedes Volumenelement im Innern des Mediums wirken und deren auf die Volumeneinheit bezogene Componenten sind:

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} X_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \\ Y_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \\ Z_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right); \end{aligned} \right.$$

2. die Kräfte, welche auf Flächenelemente der Grenzoberfläche wirken und deren auf die Flächeneinheit bezogene Componenten sind:

$$(34) \quad X_2 = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{Y}_2 = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \bar{Z}_2 = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

An der leitenden Grenzoberfläche fällt die Resultirende der Kräfte (34) gleich $(\gamma/2) R^2$ aus und wirkt in derselben Richtung wie die Maxwell'sche electriche Spannungskraft. An der

Trennungsoberfläche zweier dielectricischer Medien ergibt sich zuerst die vom ersten Medium hervorgerufene Resultirende:

$$(34) \quad F_2 = \sqrt{X_2^2 + I_2^2 + Z_2^2} = \frac{\gamma}{2} R \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

deren Richtung mit der von R zusammenfällt. Multiplicirt man nämlich die Ausdrücke (34) resp. mit $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ und addirt, so erhält man:

$$(36) \quad F_2 \cos(F_2, n) = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2,$$

woraus infolge des (35) man findet:

$$(37) \quad \cos(F_2, n) = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \cos(R, n).$$

Die andere zur Normale n senkrechte Componente von F_2 ergibt sich gleich

$$(38) \quad F_2 \sin(F_2, n) = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

wo s die Richtung bezeichnet, welche senkrecht zur Normale in der Ebene der letzteren und der Kraft R liegt. Aehnliche Ausdrücke findet man für die an demselben Flächenelement wirkenden Grenzkkräfte, welche vom zweiten anstossenden und durch die Grössen K' und γ' charakterisirten Medium herühren:

$$(39) \quad F_2' \cos(F_2', n') = \frac{\gamma'}{2} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n'} \right)^2, \quad F_2' \sin(F_2', n') = \frac{\gamma'}{2} \frac{\partial \varphi'}{\partial n'} \frac{\partial \varphi'}{\partial s};$$

da aber

$$(49) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad \text{und} \quad K \frac{\partial \varphi}{\partial n} + K' \frac{\partial \varphi'}{\partial n'} = 0,$$

so erhält man:

$$(41) \quad \begin{cases} F_2' \cos(F_2', n') = \frac{\gamma'}{2} \frac{K^2}{K'^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2, \\ F_2' \sin(F_2', n) = - \frac{\gamma'}{2} \frac{K}{K'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \end{cases}$$

Falls für die beiden Isolatoren die Möglichkeit der Trennung und des Aneinandergleitens ausgeschlossen ist, so ergeben die beiden tangentialen Flächenkräfte (41) und (38) eine Resultirende:

$$(42) \quad F_2' \sin(F_2', n) + F_2 \sin(F_2, n') = \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma'}{2} \frac{K}{K'} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Die in der Richtung von n ausfallende Resultirende der beiden Normalkräfte (41) und (36) ergibt sich dabei gleich

$$(43) \quad F_2 \cos(F_2, n) - F'_2 \cos(F'_2, n') = \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma'}{2} \frac{K^2}{K'^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2.$$

Ist aber die Möglichkeit der oben erwähnten Bewegungen vorhanden, so kommen an der Trennungsoberfläche der beiden voneinander trennbaren Medien folgende Kräfte zum Vorschein:

1. Eine Normalkraft

$$(44) \quad \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma_0}{2} \frac{K^2}{K_0^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2,$$

2. und eine Tangentialkraft

$$(45) \quad \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma_0}{2} \frac{K}{K_0} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

wobei K_0 und γ_0 auf das an die Stelle des weggeschobenen Isolators und vom Isolator (K, γ) untrennbare Medium sich beziehen. Für den *leeren* Raum ist K_0 gleich Eins und γ_0 gleich Null zu setzen.

Es ist endlich leicht zu ersehen, dass die Kirchhoff'schen Kräfte folgende je drei Normal- und Tangentialdrucke zu den übrigen Maxwell'schen und v. Helmholtz'schen Druckkräften beitragen:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, & \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2, & \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2, \\ -\frac{\gamma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, & -\frac{\gamma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\gamma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Kiew, Juni 1894.