Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Bd. 85.

No. 2034—2035.

18, 19 und 20.

Bedenken gegen Herrn Stockwell's verbesserte Mondtheorie.

Von Professor Dr. *Schjellerup*.

In der Abhandlung: On the Theory of the Moon's Motion (Astr. Nachr. 2024—26) sind von Herrn *Stockwell* die ziemlich grossen Differenzen, welche man mehrere Jahre hindurch in den Wash. Observations zwischen den beobachteten und berechneten Oertern des Mondes bemerkt hat, hervorgehoben; der Verfasser baut hauptsächlich darauf die Vermuthung einer theoretischen Unvollkommenheit der vorhandenen Mondtheorien. Die Möglichkeit der Richtigkeit einer solchen Vermuthung lässt sich gewiss nicht bestreiten, um so mehr, als dieselbe gestützt wird von *Airy* in Monthl. Not. (14. Nov. 1873) und auch von Andern. Es kommt also darauf an, die Quelle der genannten Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung zu finden. Daher kann es nicht fehlen, dass die Astronomen die Anzeige der von Herrn *Stockwell* gemachten Entdeckung einer nicht geringen Unvollkommenheit der Mondtheorie von *La Place* und *Plana* mit Interesse begrüsst haben, Unvollkommenheiten, die sich auch in den *Delaunay*'schen Arbeiten vorfinden sollen, obgleich doch diese letzteren in ganz anderer Weise als jene ausgeführt sind.

In aller Kürze werde ich nun die Resultate der Untersuchungen des Herrn *Stockwell* herausheben. Die von den genannten Astronomen benutzten Entwicklungen des recipr. elliptischen Radius vectors sollen mit Fehlern behaftet sein, von der Grösse der dritten Ordnung, und diese Fehler sollen von der Nichtberücksichtigung der Breite des Perigäums herrühren.

Die zum Beweise dieser Behauptung erforderlichen, etwas weitläufigen Rechnungen sind von Herrn *Stockwell* mit so grosser Sicherheit und Gewandtheit durchgeführt, dass man veranlasst ist, die gewonnenen Resultate mit vollem Zutrauen aufzunehmen.

Es sind mir indessen bei einem eingehenden Studium dieser in mehrerer Beziehung interessanten Abhandlung solche Verstösse auffällig geworden, welche

in mir mehr als Zweifel gegen die Berechtigung von *Stockwell*'s Behauptung erregt haben, und deren Erledigung ich mir nun erlaube herzusetzen.

Es heisst gleich Anfangs (Seite 120 der genannten Nr.):

For this purpose let us take the fundamental equations for the latitude and reciprocal of the projected radius vector of the moon which are used by *La Place* and *Plana* as the basis of their respective theories of the moon's motion. If we denote the mean distance and eccentricity of the moon's orbit by a and e , the longitudes of the node and perigee by Ω and ω , the inclination of the orbit to the fixed plane by i ; and the longitude, latitude and radius vector by v , θ and r , and also put

$$v = \operatorname{tg} i, \quad s = \operatorname{tg} \theta, \quad (1)$$

we shall have the two following equations in which μ is the reciprocal of the projected radius vector,

$$s = v \sin(v - \Omega), \quad (2)$$

$$u = \frac{1}{a(1-e^2)} \left[\sqrt{1+s^2} + e \cos(v - \omega) \right] = \frac{1}{r \cos \theta}, \quad (3)$$

La Place and *Plana* have supposed that equation (3) is the equation of a projected ellipse, and we shall now proceed to show that it is not such an equation except for the particular case in which the transverse axis lies in the plane of projection.

was ich so zu sagen als Fundament der Entdeckung des vermeintlichen Fehlers ansehe. Dieses Fundament kann aber nicht vor der Kritik bestehen, weil es auf Verstösse gegen die Wahrheit gebaut ist. Unter der Voraussetzung, dass a und e die halbe grosse Axe und die Excentricität der elliptischen Mondbahn bezeichnen, weiter Ω , ω , i beziehungsweise die Längen des Knotens und Perigäums sammt der Inclination sind, und endlich v , θ , r die Länge, Breite und der elliptische Radius vector, ist weder von den genannten Geometern noch von Andern, welche sich mit demselben Gegenstand beschäftigt haben, angenommen worden, dass

oben angeführte *Stockwell*'sche Gleichung (3) ein Ausdruck sei für den recipr. proj. Radius vector.

Setzt man nämlich wie gewöhnlich

$$\gamma = \operatorname{tg} i, \quad \varepsilon = \operatorname{tg} \Theta,$$

so findet man bei *La Place* (Méc. cél. III p. 186) diese Gleichungen

$$\varepsilon = \gamma \sin(v - \Omega)$$

$$u = \frac{1}{h^2(1 + \gamma^2)} \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2} + e \cos(v - \tilde{\omega}) \right]$$

mit folgender bemerkenswerthen Zufügung:

équations dans lesquelles... e et $\tilde{\omega}$ sont deux arbitraires dépendantes principalement de l'excentricité de l'orbite, et de la position du périhélie.

An eine Verwechslung bei *La Place* von seinem e und $\tilde{\omega}$ mit den elliptischen e und ω lässt sich hier nach nicht mehr denken. Im Gegentheil ist *La Place* sich dieser Verschiedenheit natürlich völlig bewusst.

Wenden wir uns jetzt zu *Plana*, finden wir (Theor. d. m. de la Lune I, p. 46), nach einer mit allen nur wünschenswerthen Details gegebenen Entwicklung, den von uns aus Méc. cél. citirten Ausdruck für u wieder, wenn man nur mit *La Place* die Summe der Massen von Erde und Mond (*Plana*'s σ) gleich 1 setzt.

Da im vorliegenden Falle das Interesse sich wesentlich um *Plana* gruppirt, wollen wir seine weiteren Entwicklungen näher betrachten. Unter einer Menge diesem Verfasser eigenthümlicher, überaus eleganter Formeln finden sich (pag. 50) folgende für uns bemerkenswerthe Relationen

$$e \cos(\tilde{\omega} - \Omega) = \varepsilon \cos(\omega' - \Omega),$$

$$\alpha(1 - \varepsilon^2) = h^2(1 + \gamma^2),$$

$$\operatorname{tg}(\tilde{\omega} - \Omega) = \sqrt{1 + \gamma^2} \operatorname{tg}(\omega' - \Omega),$$

wo α und ε die halbe grosse Axe und die Excentricität der Mondbahn bezeichnen, und überdies ω' die Länge des Perigäums in der Bahn ist. Diese Formeln sind übrigens identisch mit jenen, welche *Poisson* auf anderem Wege (Mém. 3. le mouvem. de la Lune p. 230) gefunden hat. Aus der letzten Gleichung wird es klar, dass $\tilde{\omega}$ die Länge desjenigen Punktes der Ekliptik ist, wo

$$u = \frac{1}{h^2(1 + \gamma^2)} \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2} + e \cos(v - \Omega) \cos(\tilde{\omega} - \Omega) + e \sin(v - \Omega) \sin(\tilde{\omega} - \Omega) \right]$$

sich umwandeln lässt.

Berücksichtigt man nun die Relationen

$$e \cos(\tilde{\omega} - \Omega) = \varepsilon \cos(\omega' - \Omega),$$

$$u = \frac{1}{\alpha(1 - \varepsilon^2)} \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2} + \varepsilon \cos(\omega' - \Omega) \cos(v - \Omega) + \varepsilon \sqrt{1 + \gamma^2} \sin(\omega' - \Omega) \sin(v - \Omega) \right]$$

Die Elimination von $\omega' - \Omega$ lässt sich hier bewerkstelligen durch die Gleichung

$$\cos(\omega' - \Omega) = \frac{\cos(\omega - \Omega)}{\sqrt{1 + \gamma^2 \sin^2(\omega - \Omega)}}, \quad \sin(\omega' - \Omega) = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2} \sin(\omega - \Omega)}{\sqrt{1 + \gamma^2 \sin^2(\omega - \Omega)}}$$

diese getroffen wird von einer im Perigäum auf der Bahnebene errichteten Perpendiculären. Demnach erhält man den Winkel $\omega - \Omega$ durch eine so zu sagen von der Bahnebene reflectirte Projection des Winkels $\tilde{\omega} - \Omega$ auf die Ekliptik. Demzufolge hat man ausser der Gleichung

$$\operatorname{tg}(\tilde{\omega} - \Omega) \cos i = \operatorname{tg}(\omega' - \Omega)$$

noch

$$\operatorname{tg}(\omega' - \Omega) \cos i = \operatorname{tg}(\omega - \Omega),$$

woraus man die Beziehung

$$\operatorname{tg}(\tilde{\omega} - \Omega) = (1 + \gamma^2) \operatorname{tg}(\omega - \Omega)$$

zwischen dem Winkel $\tilde{\omega}$ und der Länge des Perigäums in der Ekliptik erhält.

Nach diesen Erörterungen glaube ich, ist es nicht mehr möglich, die Behauptung aufrecht zu halten, dass *La Place* und *Plana* die von ihnen gebrauchten, mit e und $\tilde{\omega}$ bezeichneten Grössen mit der Excentricität der elliptischen Mondbahn und der Länge des Perigäums verwechselt haben sollten, und ich glaube mich berechtigt auszusprechen, dass sämtliche von Herrn *Stockwell* bei Gleichung (3) gerügten Fehler weder mit *La Place* noch mit *Plana* zu thun haben.

Herr *Stockwell* entwickelt zunächst, unter Berücksichtigung der Breite des Perigäums, wie er es nennt, seine Gleichung (33) für $\frac{1}{r}$, nämlich

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e^2)} \left[1 + \frac{e(1 + \frac{1}{2}\gamma^2) \cos(v - \omega) - \frac{1}{2}e\gamma^2 \cos(v + \omega - 2\Omega)}{\sqrt{1 + \gamma^2 \sin^2(\omega - \Omega)} \sqrt{1 + \gamma^2 \sin^2(v - \Omega)}} \right],$$

wo a und e sich auf die elliptische Mondbahn beziehen.

Ich will jetzt zeigen, dass, wie es anders auch nicht zu erwarten war, diese Gleichung nur eine nothwendige Consequenz der hinzugezogenen Formeln nach *Plana* ist.

Nehmen wir, wie früher, $\sigma = 1$, hat man die Formel

$$u = \frac{1}{h^2(1 + \gamma^2)} \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2} + e \cos(v - \tilde{\omega}) \right]$$

die, wenn man $v - \tilde{\omega} = (v - \Omega) - (\tilde{\omega} - \Omega)$ setzt, in folgende

$$h^2(1 + \gamma^2) = \alpha(1 - \varepsilon^2),$$

$$\sin(\tilde{\omega} - \Omega) = \sqrt{1 + \gamma^2} \operatorname{tg}(\omega' - \Omega) \cos(\tilde{\omega} - \Omega),$$

erhält man

$$\operatorname{tg}(\omega' - \Omega) = \sqrt{1 + \gamma^2} \operatorname{tg}(\omega - \Omega),$$

woraus man leicht findet

Werden diese Ausdrücke eingesetzt und einige leichte Transformationen vorgenommen, kommt heraus:

$$u = \frac{1}{\alpha(1-\varepsilon^2)} \left[\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\cos(\omega-\Omega) \cos(v-\Omega) + (1+\gamma^2) \sin(\omega-\Omega) \sin(v-\Omega)}{\sqrt{1+\gamma^2 \sin^2(\omega-\Omega)}} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha(1-\varepsilon^2)} \left[\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\cos(v-\omega) + \gamma^2 \sin(\omega-\Omega) \sin(v-\Omega)}{\sqrt{1+\gamma^2 \sin^2(\omega-\Omega)}} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha(1-\varepsilon^2)} \left[\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\cos(v-\omega) + \frac{1}{2}\gamma^2 (\cos[v-\omega] - \cos[v+\omega-2\Omega])}{\sqrt{1+\gamma^2 \sin^2(\omega-\Omega)}} \right],$$

oder da

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} = \sqrt{1+\gamma^2 \sin^2(v-\Omega)} \text{ und } u = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{r},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha(1-\varepsilon^2)} \left[1 + \varepsilon \frac{(1 + \frac{1}{2}\gamma^2) \cos(v-\omega) - \frac{1}{2}\gamma^2 \cos(v+\omega-2\Omega)}{\sqrt{1+\gamma^2 \sin^2(\omega-\Omega)} \sqrt{1+\gamma^2 \sin^2(v-\Omega)}} \right]$$

welches die *Stockwell'sche* Gleichung (33) ist.

Die von Herrn *Stockwell* (Seite 139) gemachte Aeusserung:

These two last mentioned differences arise directly from the introduction of the latitude of the perigee into our analysis; an element that has never been taken into the analysis of the lunar and planetary theories; but which will be found to affect all terms of the third and higher orders in the planetary theories to the same extent as in the lunar theory.

kann ich jetzt, nach der von mir im Vorhergehenden gegebenen Darlegung, nur einfach als eine Phrase bezeichnen, da die Breite des Perigäums ja, wie Jedermann leicht sieht, implicite in *Plana's* und *Poisson's* Formel

$\text{tg}(\omega-\Omega) = \sqrt{1+\gamma^2} \text{tg}(\omega'-\Omega)$ berücksichtigt ist.

Ein näheres Eingehen in die Frage, wie weit sich in *Plana's* Mondtheorie sonst Fehler vorfinden, liegt ganz ausser dem Bereiche des gegenwärtigen Aufsatzes, eine Frage, die wohl nur in den vorhandenen Revisionen seiner Ausdrücke von *Pontécoulant* und *Delaunay* oder in weiteren Arbeiten in dieser Richtung ihre Erledigung finden wird. Besonders mag es mir doch erlaubt sein, auf *Cayley's* Aufsatz in Monthl. Not. Vol. XXXV, p. 182 u. f. zu verweisen, wo die von Herrn *Stockwell* gerügten Glieder der dritten Ordnung im *Plana'schen* Ausdrucke für den recipr. elliptischen Radius vector schon discutirt worden sind.

Kopenhagen, 1875, März 1.

Observations of Comet V, 1874 (Coggia's) made at the Orwell Park Observatory Lat. 52°0'33"N, Long. 4°55'8 E.

1874	Greenwich Mean Time	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	No of Comp.	Apparent R.A.	Lg. Factor of Parallax	Apparent Decl.	Log. Factor of Parallax	Star
Aug. 23	14 ^h 55 ^m 33 ^s	-0 ^m 21 ^s .83	+6' 52''5	12	4 ^h 6 ^m 32 ^s .55	9.454 _n	+26° 3' 18''2	0.658	a
Sept. 4	12 0 28	+1 17.96	-7 11.6	8	4 28 37.85	9.593 _n	+22 30 24.9	0.789	b
" 9	11 35 5	-2 29.16	-8 0.4	8	4 36 23.21	9.591 _n	+20 48 10.4	0.804	c
" 12	12 7 34	-2 14.21	-0 31.1	8	4 40 37.95	9.575 _n	+19 42 52.1	0.785	d
" 14	12 1 40	+3 40.19	+7 17.5	8	4 43 15.23	9.573 _n	+18 58 27.7	0.789	e
" 15	13 31 11	-2 39.27	+0 32.7	2	4 44 34.09	9.485 _n	+18 34 27.4	0.744	f
" 17	13 41 23	-2 15.58	-0 26.5	8	4 46 57.63	9.458 _n	+17 47 59.3	0.743	g
" 18	12 23 25	+4 57.67	+7 35.2	8	4 48 1.75	9.548 _n	+17 25 53.7	0.780	h
" 19	14 1 51	-4 51.75	+1 5.1	6	4 49 11.55	9.407 _n	+17 0 40.1	0.739	i
" 21	13 34 4	-2 38.19	-1 5.2	7	4 51 14.07	9.447 _n	+16 12 55.5	0.753	k
" 22	15 37 43	-4 3.84	-8 31.4	2	4 52 16.24	9.008 _n	+15 46 34.4	0.723	l
Oct. 4	12 51 15	-2 24.91	-1 3.1	6	5 0 38.27	9.439 _n	+10 43 5.0	0.790	m
" 5	13 23 17	-4 34.66	+0 26.5	9	5 1 5.43	9.366 _n	+10 15 59.9	0.786	n
" 7	12 2 49	-5 12.19	-9 16.1	8	5 1 49.16	9.493 _n	+ 9 24 12.2	0.806	o
" 8	12 54 44	-3 17.94	-1 48.2	8	5 2 9.96	9.404 _n	+ 8 56 38.0	0.798	p