THEORIE UND ANWENDUNG DER DETERMINANTEN. *Mit Beziehung auf die Originalquellen dargestellt von D. RICHARD BALTZER, Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Dresden.* LEIPZIG, Verlag von S. Hirzel 1857.

I limiti che mi prefiggo in questa breve notizia non permettendomi di indicare dettagliatamente le parti, che la lettura del libro mi ha fatto riconoscere siccome felicemente trattate e quelle che lo furono meno, stimo attenermi al più utile partito, esponendo unicamente l'indice delle materie, quale trovasi nel libro, ed i principali fra i desideri, che la lettura di esso mi ha lasciato.

INDICE. — *TEORIA DEI DETERMINANTI.* — §°. 1°. Distinzione delle permutazioni di elementi dati in due classi. §°. 2°. Determinanti di un sistema di n^2 elementi. §°. 3°. Ordinamento dei termini di un determinante secondo gli elementi di una linea o di una colonna. §°. 4°. Decomposizione di un determinante in una somma di prodotti di determinanti parziali. §°. 5°. Ordinamento di un determinante secondo prodotti di elementi di una linea e di una colonna. §°. 6°. Prodotti di determinanti. §°. 7°. Determinanti di sistemi aggiunti. §°. 8°. Determinante di un sistema di elementi, fra i quali i corrispondenti ($a_{i,k}$ ed $a_{k,i}$) sono uguali ma di segno contrario. — Applicazioni dei determinanti. — §°. 9°. Risoluzione di un sistema di equazioni lineari. §°. 10°. Teorema riguardante le equazioni alle derivate lineari. §°. 11°. Risultante di due equazioni algebriche. §°. 12°. Prodotto di tutte le differenze fra quantità date. §°. 13°. Determinanti funzionali. §°. 14°. Teoremi intorno alle funzioni omogenee. §°. 15°. Sostituzioni lineari, specialmente ortogonali. §°. 16°. Area del triangolo e volume del tetraedro. §°. 17°. Prodotti di aree di triangoli e di volumi di tetraedri. §°. 18°. Relazioni poligonometriche e poliedrometriche.

Intorno ai determinanti parziali o minori meno parco poteva essere il discorso, intorno ai determinanti gobbi forse meglio ordinato. Così, per esempio, l'autore non espone ma si limita a mentovare la generale decomposizione del prodotto di due determinanti, dovuta al sig. Sylvester ⁽¹⁾, di cui è caso particolare la formola:

$$\alpha_{n,1} B_1 + \alpha_{n,2} B_2 + \dots + \alpha_{n,n} B_n = 0$$

della pagina 14, la quale sotto più comodo aspetto potevasi presentare; così che emergesse anche più evidente la necessaria coesistenza dell'altra formola, in cui il numero dei prodotti sostituenti la somma eguale a zero non supera ma eguaglia il numero che segna l'ordine dei determinanti fra loro moltiplicati ⁽²⁾. Utile sarebbe

(1) Philosophical Magazine, 1851.

(2) Brioschi, Determinanti, pag. 32.

tornato ai principianti incontrare la bella proprietà espressa dal primo teorema sul prodotto dei determinanti, per $p > n$, anche sotto forma di relazione fra una somma di prodotti di determinanti parziali di due determinanti dati ed un determinante parziale del determinante prodotto dei due dati. Certe relazioni generali riguardanti i determinanti di sistemi aggiunti ovvero determinanti ad elementi reciproci meritavano di essere ricordate ⁽¹⁾. Le applicazioni, sebbene non siano poche, e, in un libro che mira ad essere elementare, a ragione non si faccia parola delle meno facili o riguardanti argomenti non molto famigliari, tuttavia più numerose ma principalmente più variate ancora potevano essere e maggiormente atte a dimostrare la vera utilità e la generale applicabilità dei determinanti; le applicazioni alla meccanica furono, per esempio, a torto quasi obliate. Così, nel paragrafo che tratta delle equazioni alle derivate lineari, interessante non poteva che riuscire il modo più generale di determinare le funzioni b_i nel caso contemplato dal Malmstèn ⁽²⁾; perchè specialmente diretto ad agevolare talvolta la integrazione. Come pure un cenno era bene fosse fatto di ciò che il sig. Brioschi espose nella Memoria « Sur l'analogie entre une classe de déterminants de ordre pair et les déterminants binaires ⁽³⁾; » del che, volendo, desumesi la utilità da ciò che già prima occorreva di dire al sig. Hermite sull'analogia fra certi determinanti del 4^o. ordine ed i binari, ne' suoi stupendi lavori sulla trasformazione delle funzioni Abelianne ⁽⁴⁾. Convenientissimo finalmente per la natura degli argomenti e del libro era che non si passasse sotto silenzio ciò che spetta alla decomposizione delle frazioni razionali ⁽⁵⁾, non dimenticando l'elegante teorema di Jacobi ⁽⁶⁾, tanto più prezioso in quanto che a relazioni di simil specie poco finora rivolsero i Geometri l'attenzione; e ciò che intorno alla questione, della quale è caso particolare il teorema di Sturm, scrissero gli abilissimi Geometri Sylvester ⁽⁷⁾, Hermite ⁽⁸⁾, Brioschi ⁽⁹⁾. Circa i metodi generali di trattazione non posso tacere come siasi tratto troppo poco profitto della rappresentazione di un determinante per linee e

(1) Brioschi, Determinanti, pag. 38.

(2) Brioschi -- Sur une propriété d'un déterminant fonctionnel -- The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. March, 1856.

(3) Crelle's Journal, 52 Band.

(4) Comptes rendus des seances de l'Académie des sciences. Février 1855.

(5) Brioschi. Crelle's Journal, 50 Band.

(6) Theoremata nova algebraica etc. Crelle's Journal, 14 Band.

(7) Philosophical Transactions. 1853. Parte III^a.

(8) Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. 1852, 1853.

(9) Nouvelles Annales de Mathématiques, tome XV.

colonne

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

la cui importanza può essere giustamente apprezzata nell'abbondante uso fattone in principal modo dai Geometri inglesi e nel libro del Sig. Brioschi; importanza specialmente dovuta a ciò, che, essendo per essa resi espliciti e disposti con ordine opportuno tutti gli elementi di un determinante, si può, ove trattisi di determinanti formati con elementi di particolari forme o valori, approfittare spessissimo di siffatte circostanze singolari col sostituire a metodi generali altri più spediti. La incontrastabile utilità di tali metodi particolari od artifizj, che talvolta permettono eziandio di ottenere risultati ai quali non condurrebbero vie generali, e che spontanei sempre nell'occasione si presentano all'occhio dell'addestrato nell'uso di essi, richiede pertanto che ai medesimi, in un trattato dei determinanti, si abbia un proporzionato riguardo.

Credo di dover por termine alle poche cose dette sul libro, di cui stimai far cosa utile accennare la pubblicazione, rammentando, affinchè non sfavorevole impressione ne emerga, che del medesimo non ho toccate se non le parti mancanti o suscettibili di miglior trattazione e tributando un meritato encomio all'accuratezza nel linguaggio e nelle dimostrazioni, al conveniente sviluppo di queste e delle deduzioni in generale ed alla proficua ricchezza delle citazioni.

Pavia, Dicembre 1857.

DOTT. FELICE CASORATI.