Ueber geometrische Deutung algebraischer Formen, die in der Theorie der Curven dritter Ordnung auftreten.

Von S. GUNDELFINGER in Tübingen.

Die algebraische Theorie der ternären cubischen Formen ist in der letzten Zeit durch Gordan vermöge Aufstellung der 34 Grundformen eines vollständigen Systems in hohem Grade gefördert worden. Nicht das Gleiche lässt sich in geometrischer Hinsicht sagen, indem von diesen Grundformen nur sehr wenige eine geometrische Deutung erfahren haben.

Bei Bestrebungen nach dieser Richtung etwas weiter zu kommen, gelingt es zwar bald, fast für sämtliche Formen entsprechende geometrische Sätze aufzufinden; jedoch haben dieselben grösstentheils wegen ihrer Complicirtheit einen zweifelhaften Werth. Nur einige wenige Ergebnisse sind einer verhältnissmässig einfachen Fassung fähig, und deren Mittheilung bildet den Gegenstand des Folgenden.

§. 1.

Definitionen.

Wir stellen in diesem Paragraphen die Definitionen der hier vorkommenden Formen kurz zusammen, indem wir uns dabei vollkommen der von Clebsch und Gordan in Band VI. dieser Annalen S. 436 ff. eingeführten Nomenclatur anschliessen.

Die evidente Zwischenform $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ bezeichnen wir wie immer mit u_x . Bedeutet ferner f die ternäre cubische Grundform der drei Veränderlichen $x_1x_2x_3$, und setzt man:

$$f_i = \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ik} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

so ist die Hesse'sche Determinante

$$\Delta = 6 \Sigma \pm f_{11}f_{22}f_{33}.$$

Nennt man F_{ik} den Coefficienten von f_{ik} in der Determinante $\Sigma \pm f_{11}f_{22}f_{33}$, so ist die einfachste Zwischenform

$$\begin{aligned}\Theta &= 2 (F_{11} u_1^2 + 2 F_{12} u_1 u_2 + \dots + F_{33} u_3^2) \\ &= \Theta_{11} x_1^2 + 2 \Theta_{12} x_1 x_2 + \dots + \Theta_{33} x_3^2,\end{aligned}$$

aus der die beiden andern H und K vermittelst der Gleichung

$$\Theta_{\kappa f + \lambda A} = \kappa^2 \Theta + 2 \kappa \lambda H + \lambda^2 K$$

abgeleitet werden.

Die zur Berechnung der Contravarianten Σ und T , sowie der Invarianten S und T geeigneten Definitionen sind:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \Sigma u_x &= \Theta_{11} (f_{22} u_3^2 + f_{33} u_2^2 - 2 f_{23} u_2 u_3) \\ &\quad + 2 \Theta_{12} (f_{13} u_2 u_3 + f_{23} u_1 u_3 - f_{33} u_1 u_2 - f_{12} u_3^2) + \dots, \\ 6 T &= \Theta_{11} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u_1^2} + 2 \Theta_{12} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u_1 \partial u_2} + \dots + \Theta_{33} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u_3^2}, \\ S u_x^2 &= 12 (\Theta_{11} F_{11} + 2 \Theta_{12} F_{12} + \dots + \Theta_{33} F_{33}), \\ 12 T u_x &= \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots\end{aligned}$$

Bezeichnet sodann V_{ik} den Coefficienten von $\Delta_{ik} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_k}$ in $\Sigma \pm \Delta_{11} \Delta_{22} \Delta_{33}$, so kann man als fundamentale Covariante sechsten Grades

$$\chi = (F_{22} V_{33} + F_{33} V_{22} - 2 F_{23} V_{23}) x_1^2 + \dots,$$

oder besser die Brioschi'sche Combinante einführen:

$$\psi = \frac{3}{2} \chi - \frac{T f^2}{12},$$

welche die Gleichung erfüllt:

$$\psi_{\kappa f + \lambda A} = \psi (\kappa^4 - S \kappa^2 \lambda^2 - \frac{4}{3} T \kappa \lambda^3 - \frac{S^2}{12} \lambda^4)^2 = \psi G^2(\kappa \lambda).$$

Von Zwischenformen, die im Folgenden gebraucht werden, erwähnen wir noch:

$$\begin{aligned}N &= \frac{1}{3} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3, \\ N &= \frac{1}{3} \Sigma \pm \frac{\partial \Sigma}{\partial u_i} \frac{\partial T}{\partial u_2} x_3, \\ \Lambda &= -\frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial \Sigma}{\partial u_i} + \frac{1}{2} T u_x = \Lambda_1 x_1 + \Lambda_2 x_2 + \Lambda_3 x_3, \\ M &= -\frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{S}{12} \Sigma u_x = M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3, \\ L &= \frac{1}{8} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - \frac{1}{24} S f u_x, \\ M &= -\frac{1}{8} \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial u_i} + \frac{1}{24} (2 T f + S \Delta).\end{aligned}$$

§ 2.

Ueber die Combinante ψ .

Für die kanonische Form von f :

$$f = a(x^3 + y^3 + z^3) + 6bxyz$$

ist ψ von der Gestalt:

$$\begin{aligned} 2\psi &= (a^4 + 8ab^3)^2 \{ (x^3 + y^3 + z^3)^2 - 12(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3) \} \\ &= (a^4 + 8ab^3)^2 \{ y^6 + z^6 - 10y^3z^3 + x^3(x^3 - 10y^3 - 10z^3) \}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die sechs Geraden

$$y^6 + z^6 - 10y^3z^3 = 0$$

die Curve $\psi = 0$ in deren Schnittpunkten mit $x = 0$ dreipunktig berühren, d. h.:

Die 72 Wendepunkte der Brioschi'schen Curve $\psi = 0$ sind deren Schnittpunkte mit den 12 syzygetischen Geraden des Büschels $\kappa f + \lambda \Delta = 0$. Sechs Wendetangenten, deren Berührungspunkte auf einer Seite eines syzygetischen Dreiseits liegen, schneiden sich in der gegenüberliegenden Ecke des letzteren und bilden zwei Tripel, deren jedes mit den beiden übrigen Seiten des Wendepunktsdreiecks ein cyklisch projectivisches System bildet*).

Eine weitere Beziehung der Brioschi'schen Curve zu den syzygetischen Geraden liegt in dem Satze:

Durch jeden Wendepunkt der Grundcurve ($f = 0$) gehen 4 syzygetische Gerade, welche auf drei verschiedene Arten in Gruppen von zwei Strahlenpaaren zerlegt, drei quadratische Involutionen erzeugen. Die Doppelstrahlen dieser Involutionen berühren $\psi = 0$ und die sechs harmonischen Curven des Büschels $\kappa f + \lambda \Delta = 0$ in denselben, auf der zugehörigen harmonischen Polare gelegenen Punkten.

Der Beweis dieses Theorems, soweit es sich auf $\psi = 0$ bezieht, ist eine unmittelbare Folge der Formel:

$$\begin{aligned} 16\psi &= (a^4 + 8ab^3)^2 \{ 8x^6 - 20x^3(y+z)^3 - (y+z)^6 \\ &\quad + 3(y-z)^2(3y^4 + 3z^4 + 8y^3z + 8zy^3 + 18y^2z^2 - 20x^3y - 20x^3z) \}, \end{aligned}$$

indem $y - z = 0$ die zum Wendepunkte ($x = 0, x + y + z = 0$) gehörige harmonische Polare, und $8x^6 - 20x^3(y+z)^3 - (y+z)^6 = 0$ die drei betreffenden Doppelstrahlenpaare darstellt. Der übrige Theil des Satzes ergibt sich entweder aus dem Ausdrucke Brioschi's für das Quadrat von $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3}$ **), oder aus dem bekannten Zu-

*) Die Wendepunkte sind also algebraisch bestimmbar.

**) Vgl. Clebsch und Gordan in Bd. I. dieser Annalen S. 72.

sammenhange zweier Curven eines harmonischen Curvenpaares, wonach die eine die Hessiane der andern ist, und wonach also jede Wendetangente der einen Curve stets die andere noch in einem auf der zugehörigen harmonischen Polare gelegenen Punkte einfach berührt*).

Ohne Zuhülfenahme der kanonischen Form könnte das letzte Theorem auch auf folgendem, überdies zu einem neuen Ergebnisse führenden Wege bewiesen werden.

Nach der oben gegebenen Definition der Covariante χ gelten über dieselbe die Sätze**):

Die Wendetangenten von $f=0$ berühren die Curven $\chi=0$ und $\Delta=0$ in denselben neun, auf den harmonischen Polaren gelegenen Punkten. Von jedem Punkte der Curve $\chi=0$ lassen sich an dessen conische Polaren in Bezug auf $f=0$ und $\Delta=0$ harmonische Tangentenpaare legen.

Erwägt man nun, dass für irgend eine Wurzel $\frac{\lambda}{\lambda}$ der Gleichung $T(\chi\lambda)=0$:

$$\psi G^2(\chi\lambda) = \frac{3}{2} \chi_{\chi f + \lambda \Delta},$$

dass also für jede der sechs harmonischen Curven die Covariante χ mit der Brioscchi'schen Combinante ψ zusammenfällt, so steht diese letztere zu den sechs harmonischen Curven nicht blos in der schon oben dargelegten Beziehung, sondern auch noch in der weiteren:

Von jedem Punkte der Curve $\psi=0$ lassen sich an dessen conische Polaren in Bezug auf zwei zusammengehörige harmonische Curven des Büschels $\chi f + \lambda \Delta=0$ harmonische Tangentenpaare legen, und umgekehrt.

Der Combinante ψ steht reciprok gegenüber die Contravariante

$$\Phi = -\frac{R}{2}F + T\Gamma^2 - \frac{S^2}{3}\Sigma\Gamma + \frac{ST}{6}\Sigma^2,$$

welche für die kanonische Form von f die Gestalt hat:

$$\Phi = 6(a^4 + 8ab^3)^4 \{2(U_1^3 + U_2^3 + U_3^3)^2 - 24(U_1^3 U_2^3 + U_1^3 U_3^3 + U_2^3 U_3^3)\}.$$

Indem man auf dieselbe das gleiche Raisonement wie auf ψ anwendet, ergeben sich die Sätze:

Die 72 Rückkehrtangente der Curve $\Phi=0$ gehen durch die zwölf Ecken der syzygetischen Dreiseite.

Sechs Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in einem Scheitel eines

*) Clebsch in Bd. 57 des Borchardt'schen Journals S. 239.

**) Vgl. Salmon, Höhere ebene Curven, bearbeitet von Fiedler, S. 248—249.

syzygetischen Dreiecks schneiden, liegen auf der gegenüberliegenden Seite des letzteren und bilden zwei Tripel, deren jedes mit den beiden übrigen Scheiteln ein cyklisch projectivisches System bildet.

Auf jeder harmonischen Polare liegen vier Scheitel der syzygetischen Dreiecke, welche auf drei verschiedene Arten in Gruppen von zwei Punktepaaren zertheilt, drei Involutionen erzeugen. In den Doppelpunktepaaren dieser Involutionen werden $\Phi = 0$ und die harmonischen Curven der Schaar $x\Sigma + \lambda T = 0$ von denselben durch den zugehörigen Wendepunkt gehenden Geraden berührt*) etc. etc.

§ 3.

Ueber die Formen T und $ST - T\Sigma$.

Vermöge der im ersten Paragraphen gegebenen Definition für T hat man sofort das Theorem:

Jede Gerade, deren Polarkegelschnitt in Bezug auf Σ und deren Poloconik ($\Theta = 0$) conjugirt**) liegen, berührt $T = 0$, und umgekehrt.

Aus der Gleichung

$$\Sigma \Sigma \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 T}{\partial u_i \partial u_k} = 2 S \Sigma$$

und aus dem bekannten Satze über die Poloconik einer Tangente von $\Sigma^{***})$ lässt sich ferner ohne Mühe der Satz ableiten:

Die Tangenten der Hessiane $\Delta = 0$ in zwei conjugirten Polen x und ξ sind harmonische Polaren des Polarkegelschnitts der Geraden $x\xi$ in Bezug auf $T = 0$.

Nennt man sodann ϑ_{ik} den Coefficienten von Θ_{ik} in $\Sigma \pm \Theta_{11} \Theta_{22} \Theta_{33}$ und setzt

$$H = H_{11}x_1^2 + 2H_{12}x_1x_2 + \dots + H_{33}x_3^2,$$

so ist bis auf einen Zahlenfactor der Ausdruck

$$\vartheta_{11}H_{11} + 2\vartheta_{12}H_{12} + \dots + \vartheta_{33}H_{33}$$

identisch mit ΣT , was den Satz liefert:

Die Curve $T = 0$ wird eingehüllt von allen Geraden, deren nicht-zerfallende Poloconiken Systeme harmonischer Polaren ihrer H -Curven†) berühren.

*) Diese 54 Geraden sind offenbar mit den bei der Curve ψ auftretenden identisch.

**) Ich adoptire hier die Bezeichnung von Rosanes in Bd. VI. dieser Annalen S. 265.

***) Vgl. Durège, Curven dritter Ordnung, Art. 526—528.

†) $H = 0$ ist offenbar der Ort aller Punkte, deren conische Polaren in Bezug auf f und Δ die Gerade $u_x = 0$ harmonisch schneiden.

Eine wichtigere Rolle als die Form T spielt bekanntlich die Aronhold'sche Conjugirte $\Pi = T\Sigma - S\Gamma$. Die fundamentale Gleichung $\Delta^{(II)} = \frac{R^2}{3}\Sigma$ zeigt, dass Π und Σ in derselben Beziehung zu einander stehen wie die Grundcurve f und deren Hessiane Δ , und dass man also sämmtliche Eigenschaften über das gegenseitige Verhalten der letzteren in solche der ersteren (Π und Σ) umsetzen darf. So hat man beispielsweise:

Der Berührungspunkt einer Tangente der Cayley'schen Curve $\Sigma=0$ ist gleichzeitig der Pol ihrer conjugirten Tangente in Bezug auf die Aronhold'sche Curve $\Pi=0$.

Die Spitzen der Aronhold'schen Curve $\Pi=0$ sind die 9 Punkte, in welchen die Hessiane $\Delta=0$ und die Cayley'sche Curve $\Sigma=0$ sich berühren.

Da ein Paar conjugirter Pole auf der Hessiane zu dem Kegelschnittgewebe

$$v_1 \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0$$

gehört, so besteht:

Die acht Seiten zweier vollständiger Vierseite, deren Paare von Gegenecken conjugirte Pole der Hessiane $\Delta=0$ sind, berühren einen bestimmten Polarkegelschnitt der Contravariante Π .

Alle diese durch Uebertragung gewonnenen Sätze, deren Zahl noch beliebig vermehrt werden könnte*), definiren jedoch $\Pi=0$ nicht als Einhüllende einer veränderlichen Geraden.

In dieser Hinsicht gilt das charakteristische, allerdings complicirte und nur in Ermangelung eines besseren hier mitgetheilte Theorem:

Es giebt drei Curven des syzygetischen Büschels $\kappa f + \lambda \Delta = 0$, für welche irgend eine Tangente der Curve $\Pi = 0$ den Theil einer conischen Polare bildet. Das Tripel Tangenten dieser Curven in irgend einem Wendepunkte (w) und das Tripel der von w an $f=0$ gezogenen Tangenten bestimmen eine cubische Involution, deren vier Doppelstrahlen äquianharmonisch sind.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Bemerkung, dass die einfachste simultane Invariante**) der beiden in κ und λ binären cubischen Formen

$$\Delta_{\kappa\lambda} = \Delta \kappa^3 + \frac{S}{2} f \kappa^2 \lambda + \left(Tf - \frac{S\Delta}{2}\right) \kappa \lambda^2 + \left(\frac{S^2}{12} f - \frac{T}{3} \Delta\right) \lambda^3,$$

$$\Sigma_{\kappa\lambda} = \Sigma \kappa^3 + 3 T \kappa^2 \lambda + \frac{S}{2} \Sigma \kappa \lambda^2 + \left(\frac{2}{3} T \Sigma - \frac{S}{2} T\right) \lambda^3$$

*) Vgl. meine Arbeit in Band IV. dieser Annalen S. 144.

**) Vgl. meine Note über zwei simultane binäre cubische Formen in Band VII. dieser Annalen.

identisch mit der Combinante

$$\Delta (T\Sigma - S\tau) + f(T\tau - \frac{S^2}{6}\Sigma),$$

also für $f=0$ identisch mit $\Delta\Pi$ ist.

§ 4.

Ueber die Zwischenform N .

Die geraden Polaren irgend eines Punktes x in Bezug auf das Büschel $\kappa f + \lambda \Delta = 0$ schneiden sich in einem und demselben Punkte, dessen Gleichung in veränderlichen Liniencoordinaten u_i

$$N \equiv \frac{1}{3} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 = 0,$$

und welchen man den zu x conjugirten Pol des Büschels nennen kann. Betrachtet man umgekehrt in $N=0$ die u_i als gegeben und die x_i als veränderlich, so stellt diese Gleichung eine Curve vierter Ordnung dar, welche Eigenschaften besitzt, vollkommen analog denen des Polarkegelschnitts einer gegebenen Geraden in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel*).

Die Curve $N=0$ ist der geometrische Ort aller Punkte, deren conjugirte Pole (in Bezug auf das Büschel $\kappa f + \lambda \Delta = 0$) auf der Geraden $u_x = 0$ liegen. Insbesondere geht dieselbe durch die zwölf Scheitel der syzygetischen Dreiecke, durch die vier Punkte, in welchen die Gerade u_x von Curven des Büschels $\kappa f + \lambda \Delta = 0$ berührt wird**) und durch die vier Pole dieser Geraden in Bezug auf die syzygetischen Dreiecke. Jede Seite (s) eines solchen wird von $N=0$ ausser in dem Scheitelpaar noch in zwei zu diesen harmonischen Punkten geschnitten, nämlich in den harmonischen Mitteln zweiten Grades für die drei auf s gelegenen Wendepunkte in Bezug auf den Schnittpunkt von s und u_x als Pol.

Endlich trifft $N=0$ jede Curve $\kappa f + \lambda \Delta = 0$ in den Berührungspunkten der Tangenten, welche sich an die letztere von deren Schnittpunkten mit der Geraden $u_x = 0$ legen lassen.

Die Beweise dieser Sätze sind überaus naheliegend und können daher übergangen werden, ebenso wie die reciproken Eigenschaften der Curve $N=0$.

Ueber die Zwischenformen Λ , M , L und M .

Betrachtet man in Λ die u_i als die Coordinaten einer gegebenen Geraden und die x_i als veränderliche Punktcoordinaten, so stellt $\Lambda=0$

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte 1873, S. 495; Steiner-Schröter, Kegelschnitte, § 46.

**) Diese vier Berührungspunkte liegen stets äquianharmonisch.

eine Gerade dar, deren geometrische Bedeutung durch den Satz angegeben wird:

Die Gerade $u_x = 0$ trifft $f = 0$ in drei Punkten, deren Tangentialpunkte auf der Geraden $\Lambda = 0$ liegen.

$\Lambda = 0$ ist also die „Begleiterin“ der Geraden $u_x = 0$ *). Eliminiert man nämlich aus

$$f(y_1 y_2 y_3) = 0, \quad u_y = 0, \quad f'(y_1)x_1 + f'(y_2)x_2 + f'(y_3)x_3 = 0$$

die y_i , so erhält man das Product der drei Tangenten an die Grundcurve f in deren Schnittpunkten mit $u_x = 0$ nach einer kleinen Rechnung**) in der Gestalt:

$$fF - \Lambda u_x^2 = 0;$$

hieraus folgt, dass die Schnittpunkte dieser drei Tangenten mit $f = 0$ auf $\Lambda = 0$ liegen.

Aus der Identität

$$\Lambda_{\kappa f + \lambda \Delta} = G(\kappa \lambda) (\kappa \Lambda + \lambda M)$$

folgen die beiden Theoreme:

Die Gerade $u_x = 0$ trifft die Hessiane $\Delta = 0$ in drei Punkten, deren Tangentialpunkte auf der Geraden $M = 0$ liegen.

Die Begleiterinnen der Geraden $u_x = 0$ in Bezug auf das Curvenbüschel $\kappa f + \lambda \Delta = 0$ bilden einen zu diesem projectivischen Strahlenbüschel.

Betrachtet man ferner in der Gleichung $fF - \Lambda u_x^2 = 0$ die x_i als constant und die u_i als veränderlich, so stellt dieselbe das Product der sechs Berührungspunkte der vom Punkte x an f gezogenen Tangenten dar. Man hat also:

Von jedem Punkte x der Ebene gehen sechs Tangenten an $f = 0$. Die 24 Tangenten, welche von den Berührungspunkten noch weiter an $f = 0$ gezogen werden können, berühren die Curve vierter Classe $\Lambda = 0$.

Die reciproken Theoreme über L und M ergeben sich unmittelbar aus der Formel

*) Vgl. Cremona, Ebene Curven, übers. von Curtze, S. 57; Durège, Curven dritter Ordnung, Art. 230.

**) Setzt man symbolisch

$$f = a_x^3 = b_x^3 = \dots$$

so ist nach Clebsch, Binäre Formen S. 88, Formel (25), die Resultante der obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} & 2(abu)^2 a_x b_x \cdot (cdu)^2 (ceu)(deu)e_x - (acu)(bcu)(adu)^2 (beu)^2 c_x d_x e_x \\ &= 2 \Theta \cdot \frac{1}{3} \Sigma u_x - \left(\frac{2}{3} \Theta \Sigma u_x + \frac{1}{2} fF - \frac{1}{2} \Lambda u_x^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} (fF - \Lambda u_x^2). \end{aligned}$$

$$\Lambda^{\kappa \Pi + \lambda P} = -\frac{2}{3} R^3 S(\kappa \lambda) (\kappa L + \lambda M)^*).$$

Von den aus derselben ableitbaren Folgerungen führen wir nur noch an:

Zieht man von einem beliebigen Punkte x der Ebene an die Curve $\Pi = 0$ (resp. $\Sigma = 0$) drei Tangenten, so lassen sich von deren Berührungspunkten an $\Pi = 0$ (resp. $\Sigma = 0$) noch drei weitere Tangenten ziehen, die sich in dem Punkte $L = 0$ (resp. $TL - SM = 0$) schneiden.

Tübingen, Pfingsten 1874.

*) Vgl. Band VI. dieser Annalen S. 106.