Ueber ebene einfache Fachwerke.

Von

FRIEDRICH SCHUR in Aachen.

Nach dem Referate, das Henneberg im 3. Bande der Berichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung (1892—1893)*) gegeben hat, könnte eine ausführlichere Abhandlung über ebene einfache Fachwerke überflüssig erscheinen. Die folgenden Untersuchungen werden indessen zeigen, dass dem Verfasser, der diese Theorie einer erneuten Durcharbeitung unterzog, noch viel zu thun übrig blieb. Für den Theoretiker ist ja das Spannungsproblem, um das es sich hier handelt, nämlich die unter dem Einflusse äusserer in den Knotenpunkten eines einfachen und stabilen Fachwerks angreifender Kräfte in den Stäben des Fachwerks entstehenden Spannungen zu bestimmen, in gewissem Sinne dadurch vollkommen erledigt, dass es auf die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante zurückgeführt ist. Eine solche Lösung des Problems ist aber in den allermeisten Fällen praktisch gänzlich unbrauchbar; hier wird es sich vielmehr darum handeln, graphische Methoden zu finden, welche die Spannungen in übersichtlicher und dem Gedächtnisse sich leicht einprägender Weise zu construiren gestatten. Eine Methode, die diesen Anforderungen genügt und zugleich in jedem Falle anwendbar wäre, war aber bisher nicht bekannt. Denn wenn auch die Methode von Henneberg**) in keinem Falle versagen kann, so dürfte man doch schwerlich behaupten können, dass sie der obigen Forderung genügt. Uebersichtlicher gestaltet sich schon die Construction der Spannungen nach der Methode von Müller-Breslau***), von der allerdings erst durch

---

*) a. a. O. S. 568—596, wo man sich auch bezüglich der Litteratur über dieses Gebiet vollständig informiren kann.

**) Henneberg, Statik der starren Systeme S. 228 ff. Darmstadt 1886 und a. a. O. S. 586 ff.

***) Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks, Schweizer Bauzeitung 1887, S. 121, sowie Müller-Breslau, die graphische Statik der Bauconstructionen, II. Aufl. Bd. I, S. 206. Leipzig 1887.

die folgenden Untersuchungen gezeigt wird, dass sie in jedem Falle anwendbar ist. Sie gestattet wenigstens die Spannung jedes einzelnen Stabes für sich zu bestimmen ohne Kenntniss der übrigen Spannungen, während man nach Henneberg immer die Spannungen mehrerer Stäbe zugleich zu finden hat. Das ist allerdings nicht immer ein Nachtheil, da es häufig gerade darauf ankommen wird, die Spannungen in allen Stäben zu kennen. Das kann aber in wirklich übersichtlicher Weise nur erreicht werden nach einer Methode, welche die Spannungen in jedem Falle in einem sogenannten Cremona'schen Kräfteplane*) anzuordnen lehrt. Erwägen wir nämlich, dass hierbei das Spannungsproblem für ein gegebenes Fachwerk auf ein solches für ein Fachwerk mit einem Knotenpunkte weniger durch Zerlegung der in dem fortzulassenden Knotenpunkte angreifenden Kraft nach den durch ihn gehenden Stäben zurückzuführen ist, so wird es offenbar darauf ankommen, diese Zerlegung so vornehmen zu können, dass das Polygon der äusseren Kräfte für das neue Fachwerk sich unmittelbar aus dem Zerlegungsprocesse ergibt und nicht erst durch neue Constructionen gefunden zu werden braucht. Das wird aber gerade durch einen Kräfteplan erreicht, und für den Praktiker Taylor, der zuerst Kräftepläne zeichnete, ist dieses Princip gewiss maassgebend gewesen.

Was aber die Möglichkeit betrifft die Stabkräfte irgend eines einfachen stabilen Fachwerks bei beliebiger Annahme der äusseren Kräfte in einen Kräfteplan zu ordnen, so sind alle bisherigen Untersuchungen hierüber durchaus unzulänglich. Besonders gilt dies von den Untersuchungen, welche Maurice Lévy**) in der ersten Auflage seiner *Statique graphique* veröffentlicht hat; es handelt sich dort grösstentheils um Scheinbeweise. Es wird nicht nöthig sein, dies im Einzelnen zu belegen, da M. Lévy in der zweiten Auflage seines Werkes jenes Capitel fortgelassen hat. Den ersten ernsthaften Versuch, die Bedingungen für die Existenz eines Kräfteplanes aufzustellen, hat Petersen***) in seinem Lehrbuch der Statik gemacht. Er ist allerdings zu keinem brauchbaren Resultate gekommen. Wohl im Anschlusse hieran hat Grüber†) einige Sätze über die Zerlegung eines Fachwerks

*) Man vergleiche hierzu besonders die folgende Schrift: *Les figures réciproques en statique graphique* par Luigi Cremona, ouvrage précédé d'une introduction de G. Jung et suivi d'un appendice extrait des Mémoires et des cours du statique graphique de Saviotti. Traduit par L. Bossut. Paris 1885. In dieser Schrift findet man weiteres litterarisches Material zur Theorie des Fachwerks, besonders das Wesentliche dessen, was über Kräftepläne veröffentlicht wurde.

**) a. a. O. S. 28—53, Paris 1874.

**) Petersen, Lehrbuch der Statik fester Körper, S. 151 ff. Kopenhagen 1882. S. auch die Anmerkungen auf S. 173, 180 und 182.

†) Grüber, Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks, *Riga'sche Industrie-Zeitung* 1887. Nr. 4 u. 5, II. S. auch die Anmerkungen auf S. 169 u. 181.

in Polygone aufgestellt, die, so weit sie überhaupt richtig sind, mit einer Ausnahme für die Frage nach der Existenz eines Kräfteplanes nicht von Belang sind.

Noch mehr als das Fehlen der Aufstellung von exacten und brauchbaren Kriterien für die Existenz eines Kräfteplanes fällt der Umstand ins Gewicht, dass es noch nicht gelungen war, in jedem Falle der Existenz den Kräfteplan auch wirklich zu construiren, d. h. die Construction des Kräfteplanes zur Ermittlung der Spannungen zu benutzen; denn gerade hierin besteht die Stärke der Cremona'schen Methode in den Fällen der Praxis. Zwar hat Saviotti*) einige neue Regeln angegeben, die eine solche Construction in bisher unzulänglichen Fällen auszuführen erlaubten, und zugleich durch Einführung der sogenannten idealen Knotenpunkte die Aussicht eröffnet, die Aufstellung eines Kräfteplanes unter geeigneter Modification der ursprünglichen Forderung in jedem Falle möglich erscheinen zu lassen**). Dass aber diese Aussicht keine trügerische ist, und dass jene Regeln stets zum Ziele führen, das konnte erst auf Grund eines tieferen Eindringens in die Natur eines zu einem einfachen, stabilen Fachwerks gehörigen Kräfteplanes erkannt werden, wie es der Verfasser im Folgenden versucht hat.

Um auch für diejenigen Leser verständlich zu sein, welche über unser zwar der Statik entlehnte, aber schliesslich doch geometrische Problem nicht hinreichend orientirt sind, habe ich in dem Folgenden eine vollständige und voraussetzungslose Theorie der ebenen, einfachen Fachwerke auf neuer Grundlage gegeben. Ich habe mich dabei überall rein geometrischer Methoden bedient, weil dies einmal dem graphischen Ziele dieser Abhandlung besser entspricht, und sich andererseits bei analytischer Behandlungsweise wegen der Unsymmetrie der betreffenden Gleichungen und der Nothwendigkeit auch besondere Lagen des Coordinatensystems zu berücksichtigen keine Vereinfachung ergibt.

Als Angelpunkt unserer Untersuchungen dient der zwar nahe liegende, aber in dieser Form bisher noch nicht ausgesprochene Satz, dass ein Fachwerk stabil ist oder nicht, je nachdem es durch seine Gliederung und die Richtungen seiner Stäbe seiner Form nach vollständig bestimmt ist oder nicht. Ebenso werden fast alle in Betracht kommenden Aufgaben zurückgeführt auf die Fundamentalaufgabe: „Ein einfaches, stabiles Fachwerk zu construiren, von dem die Gliederung und die Richtungen der Stäbe gegeben sind“. Die Lösung dieser Fundamentalaufgabe löst zugleich das Spannungsproblem nach verschiedenen Methoden. Erstens nach einer Modification der Henneberg'schen Methode, die zugleich zum Beweise des Satzes benutzt wird, dass jedes

*) I. c. Appendice par Saviotti p. 65—69.

**) Man vergl. hierzu die Schrift des Verfassers: Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik, Zeitschrift für Math. u. Physik. 40. Jahrg. 1895, S. 52.

einfache, stabile Fachwerk auch statisch bestimmt sei. Die Modification besteht darin, dass wir die Bestimmung der Kräfte, von deren Kenntniss die Lösung des Problems für das Fachwerk mit einem Knotenpunkte weniger abhängt, ohne die Henneberg'sche Voraussetzung ausführen, dass das niedere Problem bei jeder Annahme der äusseren Kräfte gelöst sei. Gerade diese Behandlung lässt leicht erkennen, wann das Problem unlösbar wird.

Zweitens zeigt die vollständige Lösung der Fundamentalaufgabe, dass die Methode von Müller-Breslau stets zum Ziele führt, endlich aber hat sie den Verfasser auf eine neue stets anwendbare Methode geführt. Wie die Methode von Müller-Breslau in dem besonderen Falle, dass das Fachwerk durch Angliederung eines einfachen stabilen Fachwerks an ein anderes entstanden ist, in die längst bekannte von Ritter übergeht, so geht die Methode des Verfassers in diesem Falle in die Culmann'sche über und gestattet dem entsprechend auch eine einfachere graphische Ausführung als diejenige von Müller-Breslau.

Um nun zu einer entsprechenden Erweiterung der Cremona'schen Methode zu kommen, haben wir zuerst der allgemeinen Idee eines Kräfteplanes, wie sie aus dem einfachsten Falle der Dreiecksnetze erwachsen ist, in folgerichtiger Entwicklung diejenige Bestimmtheit gegeben, welche die Aufstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Kräfteplanes erfordert. Hierzu bedurfte es scharfer Begriffsbestimmungen und der Entwicklung der wesentlichen Eigenschaften von sogenannten Zerlegungen eines Fachwerks in einfache Polygone. Der Verfasser will keineswegs behaupten, dass die betreffenden Sätze alle durchaus neu seien, er vermuthet vielmehr, dass sie in anderer Form, als Sätze über Polyeder höherer Art schon irgendwo ausgesprochen seien. Es ist dem Verfasser nicht gelungen in der Litteratur über Polyeder oder Analysis situs bestimmte Sätze zu finden, aus denen die für den vorliegenden Zweck nöthigen Sätze sich leicht herleiten liessen, er hat es daher vorgezogen sie besonders abzuleiten, er wird aber für jeden darauf bezüglichen genauen Hinweis dankbar sein. Wir kamen so zu dem Resultate, dass jede zu einem Kräfteplane führende Zerlegung eines einfachen, stabilen Fachwerks auf diejenige Zerlegung eines gleich gegliederten Fachwerks zurückgeführt werden kann, welche in der schlichten Zerlegung des von ihm überdeckten Theiles der Ebene unmittelbar vorliegt, also auf diejenige Art der Zerlegung, die bisher ausschliesslich angewendet wurde und schliesslich auch die einzige ist, an deren praktische Anwendung ernsthaft gedacht werden kann.

Die Einführung gewisser idealer Knotenpunkte und Stäbe gestattet so das Spannungsproblem für jedes einfache, stabile Fachwerk und bei jeder Annahme der äusseren Kräfte, welcher Punkt bisher ganz ausser

Acht gelassen war, in übersichtlicher Weise mit Hülfe eines Kräfteplanes zu lösen. Die wirkliche Construction des Kräfteplanes ist hierbei ebenfalls in der Lösung der Fundamentalaufgabe enthalten, insofern der um das Kräftepolygon und die Seilstrahlen erweiterte Kräfteplan als ein stabiles Fachwerk nachgewiesen wird, das zwei Stäbe mehr besitzt, als zu seiner Stabilität nothwendig und hinreichend sind.

Im letzten Paragraphen wurden die Beziehungen der beiden reciproken Figuren des Fachwerks und des zugehörigen Kräfteplanes zum Nullsysteme in erschöpfender Weise behandelt, vor allem wurde gezeigt, was bisher wohl nicht scharf genug hervorgehoben worden ist, dass jene Figuren in jedem Falle als Parallelprojectionen zweier in Beziehung auf ein Nullsystem reciproker Polyeder angesehen werden können; von dem einen dieser Polyeder wurde zugleich eine von der Kenntniss des Kräfteplanes unabhängige Construction gegeben.

So hoffen wir, durch diese Inhaltsangabe gezeigt zu haben, dass die vorliegende Schrift nicht überflüssig sei.

§ 1.

Ueber die Stabilität eines Fachwerkes.

Ein Fachwerk besteht aus s Stäben, welche um k Knotenpunkte $P_1, P_2, \dots, P_k$ drehbar so mit einander verbunden sind, dass eine starre oder stabile Scheibe entsteht; die Stäbe werden in unseren Betrachtungen durch geradlinige Strecken, die Stabachsen, zu ersetzen sein. Will man ein gegebenes Fachwerk beschreiben, so muss zunächst bekannt sein, welche Knotenpunkte mit einander durch Stäbe verbunden sind; die hierzu dienenden Angaben wollen wir *die Gliederung des Fachwerks* nennen. Falls s nicht den Maximalwerth $\frac{k(k-1)}{2}$ hat, kann diese Gliederung für gegebene Knotenpunkte ja noch eine mannigfaltige sein. Selbst wenn zwei Fachwerke dieselbe Anzahl von Knotenpunkten und Stäben besitzen, kann ihre Gliederung noch verschieden sein, wie aus dem Beispiele zweier Fachwerke mit sechs Knotenpunkten und neun Stäben hervorgeht; dies kann entweder aus den sechs Seiten zweier Dreiecke und drei deren Ecken verbindenden Stäben bestehen oder aus den sechs Seiten eines Sechsecks und den drei Diagonalen desselben (s. Fig. 1).

Um aber auch *die Form eines stabilen Fachwerks* beschreiben zu können, wird sich die Kenntniss der *Richtungen der Stäbe* als ausreichend erweisen. Die sich hieran knüpfenden Kriterien der Stabilität eines Fachwerks finden wir am schnellsten aus einigen einfachen Sätzen der Bewegungslehre, an die wir zunächst erinnern wollen. Ist irgend ein Punktsystem der Ebene in dieser in Bewegung begriffen, so wollen

wir den Endpunkt P' derjenigen Strecke PP' , welche die momentane Geschwindigkeit jedes Punktes P darstellt, aber in einer im Sinne des Uhrzeigers um einen rechten Winkel gegen die Bewegungsrichtung gedrehten Richtung, den *Geschwindigkeitspol* von P nennen. Da nun die momentane Bewegung jeder starren Scheibe entweder als eine Rotation oder als eine Translation betrachtet werden kann, die momentanen Geschwindigkeiten aller Punkte der Scheibe also entweder senkrecht zu den Strahlen nach dem momentanen Drehpol stehen und diesen proportional sind oder aber alle gleich und gleich gerichtet sind, so gilt der folgende Satz:

1. *Die Figur der Geschwindigkeitspole einer irgendwie bewegten starren Scheibe ist in jedem Momente der Scheibe selbst ähnlich und mit ihr in Bezug auf den momentanen Drehpol ähnlich gelegen*).*

Soll also die momentane Bewegung einer Scheibe beschrieben werden, so genügt es offenbar, die Geschwindigkeitspole P_1' und P_2' zweier Punkte P_1 und P_2 so anzunehmen, dass sie auf einer Parallelen zu P_1P_2 liegen. Handelt es sich umgekehrt um ein aus mehreren Scheiben, die durch Gelenke mit einander verbunden sind, bestehendes System, so wird dasselbe offenbar starr sein oder nicht, je nachdem jede momentane Bewegung desselben durch die Annahme der Geschwindigkeitspole P_1' und P_2' zweier Punkte P_1 und P_2 des Systems, wo $P_1'P_2' \parallel P_1P_2$ ist, eindeutig bestimmt ist oder nicht. Denn die dem gegebenen Systeme ähnliche und in Beziehung auf den Punkt $D = (P_1P_1', P_2P_2')$ ähnlich gelegene Figur, in welcher den Punkten P_1 und P_2 die Punkte P_1' und P_2' entsprechen, kann sicher als die Figur der Geschwindigkeitspole einer möglichen Bewegung des Systems betrachtet werden. Soll es also nur eine solche Figur geben, in der die Geschwindigkeitspole von P_1 und P_2 bekannt sind, so ist sie die gesuchte; das System kann also nur als starre Scheibe eine momentane Rotation oder Translation ausführen, ist also stabil. Wir erhalten daher den Satz:

2. *Eine aus mehreren Scheiben, welche durch Gelenke mit einander verbunden sind, bestehendes System, ist starr oder nicht, je nachdem die jeder momentanen Bewegung desselben entsprechende Figur der Geschwindigkeitspole durch die dem entsprechende Annahme der Geschwindigkeitspole von zwei Punkten des Systems eindeutig bestimmt ist oder nicht.*

Wenden wir diese Sätze auf ein Fachwerk an, in welchem wir ja jeden Stab als eine Scheibe betrachten können, so ergibt sich zunächst der folgende Satz:

3. *Die Figur der Geschwindigkeitspole eines irgendwie bewegten Fachwerks ist in jedem Momente ein Fachwerk von derselben Gliederung*

*) Vgl. Müller-Breslau, Graphische Statik u. s. w. S. 203, auch Burmeister, Lehrbuch der Kinematik, S. 23, Leipzig 1888.

und mit entsprechenden Stäben gleicher Richtung; und es kann umgekehrt jedes solche Fachwerk als die Figur der Geschwindigkeitspole einer dadurch bestimmten Bewegung des ersten Fachwerks betrachtet werden.

Das Letzte folgt daraus, dass die dadurch bestimmte Bewegung jedes Knotenpunktes mit derjenigen jedes ihn enthaltenden Stabes vereinbar ist. Hiermit nimmt Satz 2 die folgende Form an:

4. Ein Fachwerk ist stabil oder nicht, je nachdem es durch seine Gliederung, die Richtungen seiner Stäbe und die diesen Bedingungen entsprechende Annahme der Endpunkte eines Stabes eindeutig bestimmt ist oder nicht.*).

Das aus zwei stabilen Fachwerken, die durch drei Stäbe mit einander verbunden sind, zusammengesetzte Fachwerk liefert uns das einfachste Beispiel für diesen Satz. Gehen nämlich die drei Verbindungsstäbe durch einen Punkt, so kann man ein zweites Fachwerk von derselben Gliederung und mit entsprechenden Stäben gleicher Richtung aus einem der beiden Theilfachwerke und einem andern zusammensetzen, welches dem zweiten ähnlich ist und mit ihm in Beziehung auf jenen Punkt ähnlich liegt, während die Lage der Verbindungsstäbe dieselbe bleibt. Man kann in diesem Falle auch leicht

direct sehen, dass der eine Theil gegen den andern um den Schnittpunkt der drei Verbindungsstäbe eine unendlich kleine Drehung ausführen kann, bei welcher die Längen der Verbindungsstäbe sich nur um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung ändern. Sind die drei Verbindungsstäbe einander parallel und gleich, so ist offenbar auch eine endliche Bewegung des einen Theiles gegen den anderen möglich.

Ein zweites Beispiel**)

liefert das Sechseit
 $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$
 (s. Fig. 1) nebst den Diagonalen $P_1 P_4$, $P_2 P_5$, $P_3 P_6$.

Fig. 1.

Denken wir uns P_1 und P_2 fest und nehmen P_3' beliebig auf $P_2 P_3$ an,

*) Diesem Satze kommt am nächsten Müller-Breslau. Man vergl. den o. a. Bericht von Henneberg S. 596.

**) Hierzu vergl. man z. B. Müller-Breslau, a. a. O. S. 208 ff.

so ist auch P_4' auf P_1P_4 durch die Parallele durch P_3' zu P_3P_4 bestimmt, ebenso P_6' auf P_1P_6 durch die Parallele durch P_3' zu P_3P_6 , endlich P_5' auf P_2P_5 durch die Parallele durch P_6' zu P_6P_5 , und es fragt sich, ob dann auch $P_4'P_5'$ parallel zu P_4P_5 sein wird, wenn P_3' von P_3 verschieden war. Da bei der Bewegung von P_3' alle diese Punkte ähnliche Punktreihen beschreiben, so würde, wenn $P_4'P_5'$ einmal parallel zu P_4P_5 wäre, es ihm stets parallel bleiben. Nun ist der Ort der Schnittpunkte $R' = (P_6'P_5', P_3'P_4')$ eine Gerade, da diese Geraden auf RR' ähnliche Punktreihen ausschneiden, die zwei Elemente entsprechend gemein haben. Diese Gerade RR' geht nun sicher durch den Punkt $Q = (P_1P_6, P_2P_3)$, weil $P_3'P_6'$ stets parallel zu P_3P_6 ist. Wäre daher auch $P_4'P_5'$ stets parallel zu P_4P_5 , so ginge die Gerade $RR' = RQ$ auch durch den Punkt $S = (P_5P_2, P_4P_1)$, d. h. das Sechseck $P_6P_5P_2P_3P_4P_1$ wäre ein Pascal'sches, oder die sechs Knotenpunkte des Fachwerkes liegen auf einem Kegelschnitte. Weiss man umgekehrt, dass dies der Fall ist, dass also Q, R, S in einer Geraden liegen, so wären die Punktreihen (P_4') und (P_5') perspectiv, es wäre also $P_4'P_5'$ stets parallel zu P_4P_5 , das Fachwerk kann folglich nicht stabil sein. *Unser Fachwerk ist also instabil oder stabil, je nachdem seine sechs Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte liegen oder nicht.*

Ist nun die Stabilität eines Fachwerkes in gegebenem Falle festgestellt, so wird die weitere Frage nach dem Grade der Beweglichkeit desjenigen Fachwerkes entstehen, welches aus dem gegebenen durch Entfernung eines Stabes hervorgeht. In dieser Beziehung wird uns der folgende Satz später gute Dienste leisten:

5. *Wird ein stabiles Fachwerk bei Entfernung eines Stabes instabil, so besitzt das neue Fachwerk nur einen Grad der Beweglichkeit, oder es giebt nur einfach unendlich viele Fachwerke, welche mit dem gegebenen die Gliederung, die Richtungen der entsprechenden Stäbe bis auf die des fortgelassenen Stabes und die Endpunkte eines Stabes gemein haben; die Knotenpunkte aller dieser Fachwerke beschreiben hierbei, so weit sie überhaupt beweglich sind, gerade ähnliche Punktreihen.*

Ist nämlich PQ (s. Fig. 2) der fortgelassene Stab und QR ein anderer Stab durch Q , und soll dann das Fachwerk bei Festhaltung von QR beweglich sein, so seien etwa $P', S', T', U', V' \dots$ die Geschwindigkeitspole von $P, S, T, U, V, \dots$; sie sind ja die Knotenpunkte eines der unendlich vielen im Satze gemeinten Fachwerke. Nehmen wir nämlich die Punkte $P'', S'', T'', U'', V'', \dots$ so auf den Geraden $PP', SS', TT', \dots$ an, dass $PP'P'' \sim SS'S'' \sim TT'T'' \sim \dots$, wo natürlich T'' mit T zusammenfällt, falls dasselbe von T' gilt, so sind auch diese Punkte die Knotenpunkte eines Fachwerkes derselben Art. Es ist nun leicht zu zeigen, dass es ausserhalb dieser Schaar keine andern Fachwerke derselben Art geben kann, welche den Stab

QR enthalten. Zunächst wolle man bemerken, dass P' niemals auf PQ liegen darf, weil sonst das ursprüngliche Fachwerk nach Satz 4 nicht stabil wäre, es müsste denn P' mit P , S' mit S u. s. w. zusammenfallen, was wieder unserer Voraussetzung widerspricht, dass $P', S', T', \dots$

Fig. 2.

die Geschwindigkeitspole von $P, S, T, \dots$ für eine wirkliche Bewegung des Fachwerks seien. Nehmen wir nunmehr an, es gebe ausserhalb der obigen Schaar noch ein Fachwerk $P_1, Q, R, S_1, T_1, \dots$ von derselben Art, so gilt dasselbe auch von dem Fachwerke $P_2, Q, R, S_2, T_2, \dots$, wo die Punkte $P_2, S_2, T_2, \dots$ wieder auf den Geraden $P''P_1, S''S_1, T''T_1, \dots$ so angenommen sind, dass $P''P_1 P_2 \sim S''S_1 S_2 \sim P''T_1 T_2 \sim \dots$ sind. Denn ist z. B. ST ein Stab des ursprünglichen Fachwerks, so ist $S''T''$ und S_1T_1 parallel zu ST , also auch S_2T_2 . Da hierbei der Punkt P_2 auf der Geraden $P''P_1$ ganz beliebig angenommen werden könnte, ebenso wie P'' auf PP' , so würde P_2 auch ein beliebiger Punkt von PQ sein können, es müsste denn P_1 auf PP' liegen, in welchem Falle wir P_2 nach P verlegen könnten. Dann dürften aber nicht gleichzeitig $S_2, T_2, U_2, \dots$ nach $S, T, U, \dots$ fallen, weil sonst das Fachwerk $P_1, Q, R, S_1, T_1, U_1, \dots$ unserer obigen Schaar angehören würde. Würden wir also voraussetzen, dass dies nicht der Fall sei, so könnten wir jedenfalls ein von dem gegebenen Fachwerke verschiedenes Fachwerk finden, das mit ihm die Gliederung, die Richtungen *aller* entsprechenden Stäbe und den Stab QR gemein hätte, das gegebene Fachwerk wäre also nicht stabil. Hiermit ist unser Satz bei Festhaltung des Stabes QR bewiesen, welcher mit dem fort-

gelassenen Stabe PQ einen Endpunkt gemein hat. Hieraus ergibt er sich aber leicht für den Fall, dass irgend ein anderer Stab UV festgehalten wird. Denn jedes Fachwerk, das mit dem gegebenen die Gliederung, die Richtungen entsprechender Stäbe bis auf diejenige von PQ und den Stab UV gemein hat, muss aus einem Fachwerke $P'', Q, R, S'', T'', U'', V'', \dots$ obiger Schaar durch die Ähnlichkeitstransformation entstehen, bei welcher $U''V'' \sim UV$, den Punkten Q, R also zwei Punkte Q_I, R_I entsprechen, wie auch das Umgekehrte der Fall ist. Gäbe es also bei Festhaltung von UV mehr als einfach unendlich viele Fachwerke der eben beschriebenen Art, so müsste dasselbe auch bei Festhaltung von QR gelten. Hiermit ist also unser Satz in seinem vollen Umfange bewiesen.

Alle die Fachwerke unserer obigen Schaar sind offenbar die Figuren der Geschwindigkeitspole für die Bewegungen des Fachwerks, welche bei Fortlassung von PQ und Festhaltung von QR noch möglich sind. Alle diese momentanen Bewegungen unterscheiden sich aber nur durch das Maass der Geschwindigkeit, da bei allen jeder Stab denselben momentanen Drehpol besitzt; deshalb besitzt das Fachwerk nur einen Grad der Beweglichkeit.

Unser Satz lehrt uns, dass die Richtung *eines* Stabes eines stabilen Fachwerks, durch dessen Entfernung das Fachwerk instabil wird, beliebig abgeändert werden kann, ohne dass das neue Fachwerk aufhört stabil zu sein. Hieraus geht hervor, dass die Instabilität eines Fachwerks schon durch die Richtungen von weniger als s Stäben bedingt sein muss. Wir gehen auf diese interessante Frage hier nicht näher ein, da sie für das Folgende ohne Belang ist.

§ 2.

Die Bildungsgesetze der einfachen stabilen Fachwerke.

Das einfache Beispiel eines Vierseits mit seinen zwei Diagonalen lehrt, dass ein stabiles Fachwerk mehr Stäbe besitzen kann, als zu seiner Stabilität unbedingt nothwendig sind. Da die Spannungen in einem solchen Fachwerke, wie wir später sehen werden, sich nicht mehr auf Grund der blossen Sätze der Statik starrer Körper bestimmen lassen, so schliessen wir sie von unserer Betrachtung aus und beschränken uns auf die sogenannten einfachen stabilen Fachwerke, welche folgendermassen zu definiren sind: *Ein stabiles Fachwerk heisst einfach, wenn seine Stabilität durch Fortnahme jedes einzelnen Stabes aufgehoben werden kann.*

Für solche einfachen stabilen Fachwerke gilt nun zunächst der folgende Satz:

6. *Laufen durch einen Knotenpunkt P eines einfachen stabilen*

Fachwerks mehr als zwei Stäbe, so kann man nach Fortlassung eines durch P laufenden Stabes stets einen nicht durch P laufenden Stab so einfügen, dass das Fachwerk stabil und einfach bleibt, vorausgesetzt dass die übrigen durch P laufenden Stäbe nicht gleiche Richtung haben oder nicht alle übrigen Knotenpunkte in einer Geraden liegen*).

Ist wie im vorigen Paragraphen PQ der fortgelassene, QR der festgehaltene und etwa ST der einzufügende Stab, so brauchen wir nach Satz 5 nur eins der Fachwerke $P'QRS'T'U'V', \dots$ zu untersuchen, das mit dem gegebenen Fachwerke $PQRSTUV \dots$ die Gliederung, die Richtungen entsprechender Stäbe bis auf die von PQ und den Stab QR gemein hat; denn je nachdem $S'T'$ parallel zu ST ist oder nicht, muss nach diesem Satze für jedes denselben Bedingungen genügende Fachwerk die ST entsprechende Strecke ihr parallel sein oder nicht, wird folglich nach Satz 4 das durch Einfügung des Stabes ST entstehende Fachwerk stabil sein oder nicht. Irgend ein solches Fachwerk $P'QRS'T'U'V' \dots$ muss aber als Figur der Geschwindigkeitspole einer nach Fortlassung von PQ und Festhaltung von QR möglichen Bewegung des ursprünglichen Fachwerks existiren, weil dieses sonst nicht einfach wäre; wie wir es in jedem Falle wirklich construiren können, werden wir sehr bald sehen.

Es ist nunmehr leicht zu sehen, dass nicht alle Verbindungslinien je zweier der Punkte $QRS'T'U'V' \dots$ den Verbindungslinien der entsprechenden Punkte $QRSTUV \dots$ parallel sein können, weil sonst die erste Figur der zweiten ähnlich, also mit ihr zusammenfallen müsste, es müssten denn alle diese Punkte in einer Geraden liegen. Gehen daher durch P ausser PQ noch mindestens zwei Stäbe, welche nicht dieselbe Richtung haben, so müsste auch P' mit P zusammenfallen gegen die Voraussetzung. Es muss also sicher möglich sein, nach Fortlassung von PQ einen Stab ST so einzufügen, dass das neue Fachwerk wieder stabil ist. Es muss aber auch einfach sein. Würde nämlich dieses Fachwerk bei Fortlassung etwa des Stabes UV noch stabil bleiben, so kann es nach weiterer Fortlassung von ST — und da wird es sicher instabil — und Festhaltung von QR wegen des Satzes 5 nur denjenigen Grad der Beweglichkeit haben, wie er durch die Figur der Geschwindigkeitspole $P'S'T'U'V' \dots$ charakterisirt ist, es würde also wieder stabil werden, falls PQ eingefügt würde. Daraus aber würde folgen, dass das ursprüngliche Fachwerk auch bei Fortlassung von UV noch stabil bliebe gegen die Voraussetzung dass es einfach sein sollte. Es muss folglich das durch Fortlassung von PQ und Einfügung von ST entstehende stabile Fachwerk einfach sein, unser Satz ist also vollständig bewiesen.

*) Wegen der letzten Ausnahme des Satzes vergl. man den o. a. Bericht Henneberg S. 582.

Haben wir nunmehr ein einfaches, stabiles Fachwerk mit k Knotenpunkten und s Stäben, welches einen Knotenpunkt P besitzt, in dem nur zwei Stäbe zusammenlaufen, so wird nach Ablösung desselben offenbar ein einfaches, stabiles Fachwerk mit $k - 1$ Knotenpunkten und $s - 2$ Stäben entstehen; denn wäre dies Fachwerk nicht stabil und nicht zugleich auch einfach, so würde dasselbe von dem ersten Fachwerke gelten. Besitzt aber das gegebene Fachwerk keinen Knotenpunkt mit nur zwei Stäben, so sei P einer der Knotenpunkte, in welchem die geringste Anzahl von Stäben zusammenläuft. Dann können wir nach Satz 6 einen solchen Stab fortlassen und einen nicht durch P laufenden Stab so einfügen, dass wieder ein einfaches, stabiles Fachwerk entsteht. Die von P ausgehenden Stäbe können nämlich nicht sämtlich gleiche Richtung haben, weil sonst P ohne Aenderung der Richtung dieser Stäbe in ihnen beliebig verschoben werden könnte, das Fachwerk also nicht stabil wäre; man braucht daher immer nur einen solchen Stab fortzulassen, dass durch P noch ein anderer Stab verschiedener Richtung geht. Im zweiten Ausnahmefalle des Satzes 6 müssen ja immer zwei-stäbige Knotenpunkte vorhanden sein. Mit dem so entstehenden Fachwerke können wir nun, falls durch P immer noch mehr als zwei Stäbe laufen, ebenso verfahren, bis ein Fachwerk entsteht, das in P nur noch zwei Stäbe hat. Giebt es also ein einfaches stabiles Fachwerk mit k Knotenpunkten und s Stäben, so giebt es stets ein solches mit $k - 1$ Knotenpunkten und $s - 2$ Stäben. Dieses Verfahren kann man so oft anwenden, bis man ein Fachwerk mit nur drei Knotenpunkten, also auch drei Stäben enthält; es ist folglich:

$$s - 2(k - 3) = 3 \quad \text{oder} \quad s = 2k - 3.$$

Wir haben also den Satz:

7. *In einem einfachen stabilen Fachwerke ist die Anzahl der Stäbe gleich der doppelten Anzahl der Knotenpunkte vermindert um drei.*

Es bedarf hier kaum des Hinweises, dass diese Bedingung zwar nothwendig, aber nicht hinreichend für die Stabilität des Fachwerks ist, die vielmehr immer in Satz 4 zu suchen ist. Wohl aber ist die Bedingung $s = 2k - 3$ für die Einfachheit des Fachwerks hinreichend, falls seine Stabilität festgestellt ist, weil eben das Fachwerk nicht stabil sein kann, wenn $s < 2k - 3$ ist.

Aus unserem Satze ergibt sich sofort der folgende:

8. *Ein einfaches stabiles Fachwerk besitzt mindestens einen Knotenpunkt, in welchem höchstens drei Stäbe zusammenlaufen*).*

Denn liefen in allen k Knotenpunkten mindestens 4 Stäbe zusammen, so wäre die Anzahl der Stäbe mindestens $\frac{4k}{2} = 2k$, was unmög-

*) S. Henneberg, a. a. O. S. 213.

lich ist. Es lässt sich sogar leicht zeigen, das, falls gar keine Knotenpunkte mit nur zwei Stäben vorhanden sind, mindestens 6 mit nur drei Stäben vorhanden sein müssen*); doch ist dieser Satz von geringerer Bedeutung.

Dieser Satz in Verbindung mit dem Satze 6 erlaubt uns alle möglichen einfachen stabilen Fachwerke mit k Knotenpunkten zu finden, wenn wir diejenigen mit $k - 1$ Knotenpunkten kennen, und zwar auf Grund zweier Prozesse: *Erstens* können wir an das Fachwerk mit $k - 1$ Knotenpunkten einen neuen Knotenpunkt durch zwei Stäbe angliedern, ein solches Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ wird immer stabil sein, vorausgesetzt dass der neue Knotenpunkt nicht mit den beiden Knotenpunkten, mit denen er durch Stäbe verbunden ist, in einer Geraden liegt. *Zweitens* können wir in dem Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ einen Stab fortlassen und einen neuen Knotenpunkt durch drei Stäbe angliedern. Um zu entscheiden, ob das so entstehende Fachwerk stabil ist oder nicht, werden wir die Figur der Geschwindigkeitspole $\mathfrak{F}'_{k-1}$ construiren müssen, die einer nach Fortlassung des Stabes und Festhaltung eines anderen noch möglichen momentanen Bewegung von $\mathfrak{F}_{k-1}$ entspricht; je nachdem die den drei hinzugefügten Stäben parallelen Geraden durch die Geschwindigkeitspole der Endpunkte jener drei Stäbe durch einen Punkt laufen oder nicht, wird $\mathfrak{F}_k$ instabil sein oder stabil.

Es ist hiernach leicht zu entscheiden, wie man bei gegebenem $\mathfrak{F}_{k-1}$ den neuen Knotenpunkt P zu wählen haben wird, damit das durch Hinzufügung der Stäbe P_1P , P_2P , P_3P entstehende Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ stabil sei. Bewegt sich P' auf einem Strahle p_3' durch P_3' (s. Fig. 3),

Fig. 3.

so ist der Ort der Schnittpunkte der durch P_1 und P_2 zu $P_1'P'$ und $P_2'P'$ gezogenen Parallelen offenbar ein Kegelschnitt durch die Punkte

*) Vergl. Grübler, a. a. O. I.

P_1 und P_2 , den Punkt Q_3 , in welchem sich die Parallelen durch P_1 und P_2 zu $P_1'P_3'$ und $P_2'P_3'$ schneiden, den unendlich fernen Punkt U_∞ von $P_1'P_2'$ und den unendlich fernen Punkt V_∞ von p_3' . Schneidet dieser Kegelschnitt die Parallele p_3 zu p_3' durch P_3 zum zweiten Male in P , so werden daher nach dem Pascal'schen Satze in einer Geraden liegen die Punkte: $\alpha_\infty = (P_1 P_2, U_\infty V_\infty)$, $\beta = (P_2 Q_3, V_\infty P)$, $\gamma = (Q_3 U_\infty, P P_1)$. Beschreibt daher p_3 das Strahlenbündel (p_3) um P_3 , so bleibt α_∞ fest, β beschreibt eine zu (p_3) projective Punktreihe (β) auf $P_2 Q_3$, γ eine zu (β) ähnliche Punktreihe (γ) auf $Q_3 U_\infty$, also $P_1 P = P_1 \gamma$ ein zu $(P_3 P)$ projectives Strahlenbüschel. Es liegen demnach alle Punkte P , welche ein instabiles Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ liefern würden, auf einem Kegelschnitte*) durch P_3, P_1, P_2 und Q_3 , wie man leicht sieht, wenn man β nach P_2 resp. Q_3 fallen lässt. Offenbar liegen auch die entsprechenden Punkte P' auf einem Kegelschnitte durch P_3', P_1', P_2' und Q_3' , wo Q_3' der Schnittpunkt der Parallelen durch P_1' und P_2' zu $P_1'P_3'$ und $P_2'P_3'$ ist. Fällt daher P' nach Q_3' , so rückt P nach P_3 , sodass $P_3'Q_3'$ der Tangente von P_3 an den Ort der Punkte P parallel ist**). Wir erhalten demnach das Resultat:

9. Kennt man alle einfachen stabilen Fachwerke mit $k - 1$ Knotenpunkten, so findet man aus ihnen alle einfachen stabilen Fachwerke mit k Knotenpunkten entweder dadurch, dass man zwei Knotenpunkte P_1 und P_2 eines der ersteren mit einem nicht in der Geraden $P_1 P_2$ liegenden neuen Knotenpunkte P durch Stäbe verbindet, oder dadurch, dass man in einem der ersteren Fachwerke einen Stab fortlässt und drei seiner Knotenpunkte P_1, P_2, P_3 mit einem nicht auf einem gewissen Kegelschnitte durch P_1, P_2, P_3 liegenden Knotenpunkte P durch drei Stäbe verbindet.

Soll der Kegelschnitt in gegebenem Falle gefunden werden, so müssten wir die Aufgabe lösen können:

Ein einfaches Fachwerk zu construiren, von dem gegeben sind die Gliederung und die Richtungen seiner Stäbe.

Sie erweist sich als die *Fundamentalaufgabe* der ganzen Theorie der einfachen Fachwerke. Der obige Gedankengang führt uns unmittelbar zu ihrer Lösung, indem wir voraussetzen, sie sei für das Fachwerk von $k - 1$ Knotenpunkte gelöst, aus dem das Fachwerk von k Knotenpunkten durch einen der beiden Processe entstanden ist. Dann ist sie ja sofort gelöst für diejenigen Fachwerke $\mathfrak{F}_k$, welche aus einem Fachwerke $\mathfrak{F}_{k-1}$ durch den ersten Process entstehen. Um die Aufgabe auch für den zweiten Entstehungsprocess zu lösen, denken wir uns neben $\mathfrak{F}_{k-1}$ mit den Knotenpunkten $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$ ein

*) Henneberg, Statik der starren Systeme, S. 219.

**) Grubler, Die momentane Bewegung dreier starrer Geraden mit gemeinschaftlichen Punkten in einer Ebene. Zeitschr. für Math. u. Phys. 35. Jahrg. S. 247.

zweites Fachwerk $\mathfrak{F}'_{k-1}$ mit den Knotenpunkten $P'_1, P'_2, \dots, P'_{k-1}$ gefunden, das dieselbe Gliederung und von einem Stabe $P'_a P'_b$, der dem zu entfernenden Stabe $P_a P_b$ entspricht, abgesehen entsprechende Stäbe gleicher Richtung hat. Dann genügen ja denselben Bedingungen alle diejenigen Fachwerke $\mathfrak{F}''_{k-1}$, deren Knotenpunkte $P''_1, P''_2, \dots, P''_{k-1}$ auf den Geraden $P_1 P'_1, P_2 P'_2, \dots, P_{k-1} P'_{k-1}$ so liegen, dass

$$P_1 P'_1 P''_1 \sim P_2 P'_2 P''_2 \sim \dots \sim P_{k-1} P'_{k-1} P''_{k-1}$$

ist, wobei P''_c mit P_c zusammenfällt, falls von P'_c dasselbe gilt. Legen wir nun durch P''_1 und P''_2 jedesmal Geraden p''_1 und p''_2 in gegebenen Richtungen, so wird ihr Schnittpunkt Q_3'' offenbar eine Gerade $Q_3 Q'_3$ beschreiben, weil $Q_3 Q'_3$ von den beiden Schaaren paralleler Geraden in zwei ähnlichen Punktreihen geschnitten wird, welche Q_3 und Q'_3 entsprechend gemein haben. Ist nun ebenso auch für eine Gerade p''_3 durch P''_3 die Richtung vorgeschrieben, so erhalten wir auch als Ort der Punkte $Q_1'' = (p''_2, p''_3)$ und $Q_2'' = (p''_3, p''_1)$ zwei Geraden $Q_1 Q'_1$ und $Q_2 Q'_2$, deren Schnittpunkt P''' auch auf $Q_3 Q'_3$ liegt. Das dem Punkte P''' entsprechende Fachwerk $\mathfrak{F}'''_{k-1}$ in jener Reihe ist nach Angliederung des Knotenpunktes P''' durch die Stäbe $P_1''' P''', P_2''' P'''$, $P_3''' P'''$ ein solches Fachwerk $\mathfrak{F}_k$, in welchem diese drei Stäbe sowohl als die $\mathfrak{F}'''_{k-1}$ angehörigen Stäbe, von dem fortzulassenden Stabe $P_a''' P_b'''$ abgesehen, vorgeschriebene Richtungen haben.

Will man hiernach in gegebenem Falle die Aufgabe lösen, so wird man sich zuerst schematisch die Entstehung des Fachwerks durch die beiden Prozesse klar machen und dann die Aufgabe vom Dreiecke anfangend den gegebenen Richtungen der Stäbe entsprechend successive nach obiger Vorschrift zu lösen haben, indem die Richtungen der später fortzulassenden Stäbe zunächst willkürlich angenommen werden, und zwar wird man jedesmal zwei solche willkürliche Annahmen zu machen haben, wenn ein Stab fortzulassen ist. Durch ein Beispiel wird dies Verfahren, das, falls unsere Aufgabe überhaupt eine Lösung hat, zwar unter Umständen sehr langwierig sein, aber niemals versagen kann, am besten klar werden.

Wir wählen als *Beispiel* *), das in Fig. 4 dargestellte Fachwerk $P_1 P_2 \dots P_{11}$ so abzuändern, dass P_1 und P_2 fest bleiben und alle Stäbe mit Ausnahme des Stabes $P_{10} P_{11}$, welcher $P_{10} P_{12} P_{13}$ parallel werden soll, ihre Richtungen beibehalten. Das Bildungsgesetz des Fachwerks ergibt sich zunächst nach dem Schema, dass zuerst P_{11} abgelöst wird und der Stab $P_2 P_3$ eingefügt, dann der Reihe nach die zweiständigen Knotenpunkte P_{10} und P_9 , ferner der dreiständige Knotenpunkt P_8 mit gleichzeitiger Einfügung des Stabes $P_1 P_4$, endlich der Reihe nach die zweiständigen Knotenpunkte P_7, P_6, P_4 abgelöst werden,

*) Vergl. Fig. 201, S. 212 des a. Werkes von Müller-Breslau.

bis das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ übrig bleibt. Es wird also unsere erste Aufgabe sein müssen, ein Fachwerk $P_1 P_2 Q_3 Q_4 \dots Q_{10}$ zu construiren, in welchem $P_2 Q_3$ eine von $P_2 P_3$ verschiedene Richtung hat, und das den Stab $P_1 Q_4$ noch nicht enthält. Um diese Aufgabe zu lösen, werden wir zuerst zwei Fachwerke $P_1 P_2 Q_3 P_4 Q_5' Q_6' Q_7'$ und $P_1 P_2 Q_3 Q_4'' Q_5'' Q_6'' Q_7''$ zu construiren haben, welche zwei verschiedenen Richtungen des Stabes $P_1 P_4$ zugehören, dessen Einfügung der Ablösung von P_8 entspricht. Schneiden sich dann die Parallelen durch Q_5' und Q_7' einerseits und durch Q_5'' und Q_7'' andererseits zu $P_5 P_8$ und $P_7 P_8$ resp. in Q_8' einer-

Fig. 4.

seits und Q_8'' andererseits, so schneidet $Q_8' Q_8''$ offenbar die $P_1 P_8$ in dem Punkte Q_8 des gesuchten Fachwerkes $P_1 \dots Q_{10}$, wonach die übrigen Knotenpunkte desselben leicht zu finden sind. Nunmehr bestimmen die Parallelen durch P_4, P_7, P_{10} einerseits und durch Q_4, Q_7, Q_{10} andererseits zu $P_4 P_{11}, P_7 P_{11}, P_{10} P_{12} P_{13}$ resp. zwei ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke $P_{11} P_{12} P_{13}$ und $Q_{11} Q_{12} Q_{13}$, deren Aehnlichkeitscentrum der Knotenpunkt P_{11}' des gesuchten Fachwerks sein muss; aus ihm ergeben sich leicht die übrigen Punkte $P_{10}', \dots, P_3'$, welche je auf $P_{10} Q_{10}, \dots, P_3 Q_3$ liegen müssen. Hätten alle Stäbe andre Richtungen

erhalten sollen, so hätten wir alle zu dem Fachwerke $P_1 P_2 Q_3 \dots Q_{10}$ führenden Constructionen für eine zweite Richtung des einzufügenden Stabes $P_2 P_3$ wiederholen müssen; da hierdurch unsre Figur jede Uebersichtlichkeit verloren hätte, so haben wir uns auf jene einfachere Aufgabe beschränkt, die dem Leser doch vollkommen klar zu machen geeignet ist, wie sich unser Verfahren in der Ausführung gestaltet.

Wir haben es nicht für nöthig gehalten, die verschiedenen Fälle zu discutiren, in denen unsre Aufgabe, *unendlich viele oder nur solche Lösungen hat, bei der ein oder mehrere Knotenpunkte in's Unendliche rücken*; bei der Ausführung wird sich das von selbst herausstellen.

Wohl aber wird manchem Leser die folgende *methodische* Bemerkung vielleicht von Interesse sein. Denken wir uns den Begriff der Stabilität eines Fachwerks auf Grund des Satzes 4 aufgestellt, so zeigt uns Satz 9, dass wir sicher einfache stabile Fachwerke mit beliebig viel Knotenpunkten und von jeder Gliederung, die nicht durch das Vorhandensein überzähliger Stäbe in an sich stabilen Theilen des Fachwerks die Stabilität des ganzen Fachwerks von selbst ausschliesst, construiren können. Für die so construirten Fachwerke lässt sich auch unabhängig von den infinitesimalen Untersuchungen des § 1 beweisen, dass *es bei Festhaltung eines Stabes und Veränderung der Richtung eines anderen immer eine Schaar von einfach unendlich vielen Fachwerken giebt, die mit dem gegebenen in der Gliederung und in den Richtungen aller übrigen Stäbe übereinstimmen, so zwar, dass alle beweglichen Knotenpunkte gerade ähnliche Punktreihen beschreiben, der Stab veränderlicher Richtung also eine zu diesen Punktreihen projective Parabel umhüllt oder ein dazu projectives Strahlenbüschel beschreibt* (vergl. Satz 5). Wird nämlich der Satz für die Fachwerke $\mathfrak{F}_{k-1}$ als bewiesen betrachtet, aus denen $\mathfrak{F}_k$ durch einen der beiden Prozesse entstanden ist, so gilt er sofort auch für $\mathfrak{F}_k$, falls es sich um den ersten Process handelt. Ist aber $\mathfrak{F}_k$ aus $\mathfrak{F}_{k-1}$ durch Angliederung der Stäbe $P_1 P$, $P_2 P$, $P_3 P$ entstanden, so betrachten wir die Schaar der Fachwerke $\mathfrak{F}_{k-1}$, $\mathfrak{F}'_{k-1}$, $\mathfrak{F}''_{k-1}$, $\dots$, die aus $\mathfrak{F}_{k-1}$ bei Festhaltung von $P_1 P$ und blosser Veränderung der Richtung von $P_2 P$ entstehen. Der Schnittpunkt P' der Parallelen durch P_2' und P_3' zu PP_2 und PP_3 beschreibt dann eine gerade Punktreihe durch P , die zu dem Büschel der Richtungen des Stabes $P_a' P_b'$ projectiv ist. Geben wir dann einem Stabe $P_c P_b$ von $\mathfrak{F}_{k-1}$ eine andre Richtung, halten wieder $P_1 P$ fest und verändern nur die Richtung von $P_a P_b$ der obigen Aenderung entsprechend, so erhalten wir eine neue Schaar von Fachwerken $\mathfrak{G}_{k-1}$, $\mathfrak{G}'_{k-1}$, $\mathfrak{G}''_{k-1}$, $\dots$, für welche der P' entsprechende Punkt Q' wieder eine Gerade beschreibt, die $P_1 P$ in einem Knotenpunkte Q''' eines Fachwerks $\mathfrak{G}_k$ der gesuchten Art schneiden würde, wenn man annehmen könnte, dass diese Gerade QQ' nicht bei jeder

Annahme der Richtung von $P_c P_b$ parallel zu $P_1 P$ wäre. Geben wir aber wieder $P_c P_b$ alle möglichen Richtungen, so beschreiben nach dem Obigen die Punkte Q und Q' gerade projective Punktreihen; wäre also QQ' beständig parallel zu $P_1 P$, so müsste dasselbe für PP' gelten, was wegen der Stabilität von $\mathfrak{F}_k$ nicht der Fall ist. Haben wir aber überhaupt ein Fachwerk $\mathfrak{G}_k''$ der gesuchten Art gefunden, so ergibt sich alles Weitere wie beim Beweise des Satzes 5. Da unser Satz nun sicher für das Dreieck gilt, so ist er hiermit allgemein bewiesen.

Wir bemerken schliesslich noch, dass mit unserer Aufgabe auch die nur scheinbar allgemeinere gelöst ist, die *nicht einfachen* Fachwerke bei gegebenen Richtungen der Stäbe zu finden; soll nämlich diese Aufgabe überhaupt lösbar sein, so müssen die Richtungen der sogenannten *überzähligen Stäbe*, deren Fortlassung die Stabilität des Fachwerks nicht aufhebt, durch die übrigen bestimmt sein; man braucht also die Aufgabe nur zu lösen für dasjenige einfache Fachwerk, das aus dem gegebenen durch Fortlassung der überzähligen Stäbe entsteht, dann müssen diese von selbst die gegebenen Richtungen annehmen.

§ 3.

Die Bestimmung der Spannungen in den Stäben eines einfachen Fachwerks.

In den k Knotenpunkten $P_1 P_2 \dots P_k$ eines einfachen stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ denken wir uns die mit einander im Gleichgewichte stehenden Kräfte angebracht, deren Angriffslinien $a_1 a_2 \dots a_k$ sind, während ihre Grössen und ihre Pfeilrichtungen durch die Seiten eines geschlossenen Kräftepolygons $K_0 K_1 K_2 \dots K_{k-1} K_0$ dargestellt sind. Sollen die Kräfte im Gleichgewichte sein, so muss ausserdem das irgend einem Pole C zugehörige Seilpolygon*) $S_1 S_2 S_3 \dots S_k$, wo S_a auf a_a liegt und $S_{a-1} S_a$ zu CK_{a-1} parallel ist, ein geschlossenes sein derart, dass $S_k S_1$ zugleich erste und letzte Seite des Seilpolygons ist (s. Fig. 5). Man kann offenbar die in $k - 2$ Knotenpunkten angreifenden Kräfte der Grösse und Richtung nach willkürlich annehmen, und es müssen sich dann die den letzten beiden Knotenpunkten zugehörigen Angriffslinien auf der Resultante jener schneiden; sind sie dieser Bedingung gemäss gewählt, so sind auch die Grössen der letzten

*) Jede (in a_a wirkende) Kraft $K_{a-1} K_a$ ist nämlich zerlegt in die beiden in $S_{a-1} S_a$ und $S_a S_{a+1}$ wirkenden Componenten $K_{a-1} C$ und CK_a , sodass nur die in der ersten und letzten Seite des Seilpolygons wirkenden Kräfte übrig bleiben, welche sich also ebenfalls aufheben müssen. Man vergl. z. B. Müller, Breslau, a. a. O. S. 7 u. 8.

beiden Kräfte als Componenten der jener Resultante entgegengesetzt gleichen Kraft bestimmt.

Die Aufgabe, die unter dem Einflusse dieser äusseren Kräfte in den Stäben entstehenden inneren Kräfte oder Spannungen zu bestimmen, das sogenannte *Spannungsproblem*, kommt nun, wie bekannt, darauf hinaus, *die in jedem Knotenpunkte P_a wirkende Kraft $k_a = K_{a-1}K_a$ so nach den in P_a zusammenlaufenden Stäben zu zerlegen, dass in jedem Stabe seinen beiden Endpunkten entsprechend zwei entgegengesetzt gleiche Componenten oder Spannungen resultiren*; nimmt man an, dass jede Componente in dem jedesmaligen andern Endpunkte des Stabes wirkt, so herrscht sowohl in jedem Stabe als in jedem Knotenpunkte unter dem Einflusse der äusseren Kräfte Gleichgewicht, wie es die Entstehung dieser gegliederten Scheibe erfordert. Eine solche in dem Stabe P_aP_b wirkende Componente von k_a wird Druck oder Zug sein, je nachdem sie von P_a nach P_b oder in umgekehrter Richtung wirkt. Wir könnten offenbar den in jedem Stabe wirkenden Druck oder Zug beliebig annehmen und daraus die äusseren Kräfte als Resultanten der in jedem Knotenpunkte angebrachten Spannungen bestimmen; diese müssen dann mit einander im Gleichgewichte sein, weil dasselbe von ihren Componenten gilt. Es giebt also jedenfalls ∞^s Kräftesysteme, für welche unser Spannungsproblem lösbar ist. Da es nun nach unsern obigen Betrachtungen ∞^{2k-3} Systeme von im Gleichgewicht stehenden äusseren Kräften giebt, die in den k Knotenpunkten des Fachwerks angreifen, so wird unsre Aufgabe im Allgemeinen nur für die einfachen Fachwerke lösbar oder bestimmt sein.

Um dies näher zu untersuchen, setzen wir wieder voraus, das Spannungsproblem sei für das einfache stabile Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ lösbar, aus dem das Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ durch einen unserer beiden Prozesse entstanden ist. Dann gilt dasselbe unmittelbar für $\mathfrak{F}_k$, falls es sich nur um den ersten Process handelt. Ist aber $\mathfrak{F}_k$ aus $\mathfrak{F}_{k-1}$ dadurch entstanden, dass die drei neuen Stäbe PP_1, PP_2, PP_3 hinzugefügt wurden, der Stab P_aP_b hingegen fortgelassen, so wird es offenbar darauf ankommen, die in P angreifende Kraft k so nach den drei Stäben zu zerlegen, dass das Spannungsproblem für $\mathfrak{F}_{k-1}$ bei Hinzufügung dieser drei Componenten zu den übrigen äusseren Kräften in dem Stabe P_aP_b keine Spannung ergibt, dieser Stab also wirklich als nicht vorhanden betrachtet werden kann*). Nehmen wir nun an, das Spannungsproblem sei für $\mathfrak{F}_{k-1}$ dieser Bedingung gemäss gelöst, und bringen wir die so bestimmten Spannungen in den entsprechenden Stäben eines Fachwerks $\mathfrak{F}'_{k-1}$ an, das sich von $\mathfrak{F}_{k-1}$ nur in der Richtung von $P'_aP'_b$ unterscheidet, so werden auch die äusseren Kräfte in ent-

*) Vgl. Henneberg a. a. O. S. 230.

sprechenden Knotenpunkten dieselben sein, da die beiden entsprechenden Stäbe verschiedener Richtung $P_a P_b$ und $P'_a P'_b$ spannungslos sind. Es sind demnach die Componenten von k nach PP_1 , PP_2 , PP_3 so zu bestimmen, dass die hiernach für $\mathfrak{F}_{k-1}$ resultirenden äusseren Kräfte auch in den entsprechenden Knotenpunkten von $\mathfrak{F}'_{k-1}$ angebracht mit einander im Gleichgewicht stehen. Nun werden die in den Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_{k-1}$ angreifenden, *gegebenen* äusseren Kräfte $k_1 k_2 \dots k_{k-1}$ in den Knotenpunkten $P'_1 P'_2 \dots P'_{k-1}$ von $\mathfrak{F}'_{k-1}$ angebracht eine gewisse Resultante k' haben, welche mit der in P angreifenden Kraft k gleich gerichtet und ihr entgegengesetzt gleich ist. Zerlegen wir also die Kraft k' nach den drei Parallelen p'_1, p'_2, p'_3 durch P'_1, P'_2, P'_3 zu PP_1, PP_2, PP_3 , so sind diese drei Componenten die gesuchten; denn die ihnen gleichen Kräfte in PP_1, PP_2, PP_3 selbst haben k zur Resultante. Da unser Fachwerk stabil sein soll, so dürfen p'_1, p'_2, p'_3 nicht durch denselben Punkt laufen, jene Zerlegung von k nach PP_1, PP_2, PP_3 ist also eine völlig bestimmte*). Es lässt sich übrigens auch leicht direct zeigen, dass sie von der Wahl des Fachwerks $\mathfrak{F}_{k-1}$ unabhängig ist; wir übergehen diesen Beweis, da er offenbar überflüssig ist.

Es sind also nunmehr für das Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ die äusseren Kräfte so bestimmt, dass erstens in PP_1, PP_2, PP_3 die Componenten von k wirken und zweitens der fortzulassende Stab $P_a P_b$, falls für $\mathfrak{F}_{k-1}$ das Spannungsproblem überhaupt lösbar ist, spannungslos ist. Wir können diese Schlussweise fortsetzen, bis wir zum Dreiecke $P_c P_b P_e$ kommen. Zerlegen wir dann die in P_c angreifende Kraft, die sich natürlich im Allgemeinen aus k_c und mehreren schon bestimmten Spannungskräften zusammensetzen wird, nach den Richtungen $P_c P_b$ und $P_c P_e$, so werden diese beiden Componenten $s_{c,b}$ und $s_{c,e}$ den in P_b und P_e angreifenden Kräften das Gleichgewicht halten müssen. Setzen wir also $s_{c,b}$ mit der in P_b angreifenden Kraft zur Resultante $s_{b,e}$ zusammen, so muss diese aufgehoben werden durch die Resultante $s_{c,e}$ von $s_{c,e}$ und der in P_e angreifenden Kraft. Es wirken diese Resultanten folglich in dem Stabe $P_b P_e$ und sind den Spannungen desselben gleich. Schliessen wir nun wieder rückwärts, so haben wir das Spannungsproblem der Reihe nach für ein Fachwerk mit drei, vier, $\dots, k-1$, k Knotenpunkten gelöst und zwar für die vorher be-

*) Laufen p'_1, p'_2, p'_3 durch denselben Punkt P' , ist also $\mathfrak{F}_k$ ein instabiles Fachwerk, so liefert das Spannungsproblem entweder unendlich viele oder nur unendlich grosse Werthe der Spannungen, je nachdem k' durch P' läuft oder nicht. Denn die Zerlegung wird bekanntlich dadurch bewerkstelligt, dass man zuerst k' in zwei Componenten nach p'_3 und der Verbindungslinie der beiden Punkte (k', p'_3) und (p'_1, p'_2) zerlegt und dann die letzte Componente in zwei Componenten nach p'_1 und p'_2 .

stimmten äusseren Kräfte, sodass die später fortzulassenden Stäbe von selbst spannungslos werden. Der von uns eingeschlagene Weg lässt zugleich erkennen, dass unter der Voraussetzung der Stabilität des gegebenen einfachen Fachwerks das Spannungsproblem nur eine Lösung haben kann. Wir erhalten also den Satz:

10. *Ein einfaches stabiles Fachwerk ist stets auch statisch bestimmt, d. h. die unter dem Einflusse von äusseren mit einander im Gleichgewichte stehenden Kräften, die in seinen Knotenpunkten angreifen, entstehenden Spannungen sind vollkommen bestimmt*).*

Ist ein Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ bekannt, das mit $\mathfrak{F}_k$ die Gliederung und die Richtungen der entsprechenden Stäbe bis auf diejenige irgend eines Stabes $P_a P_b$ gemein hat, so lässt sich die Spannung $s_{a,b}$ in diesem Stabe auch ganz direct ohne Kenntniss anderer Spannungen construiren. Wird nämlich das durch Fortlassung des Stabes $P_a P_b$ entstehende Fachwerk durch Einfügung eines geeigneten Stabes $P_c P_d$ wieder zu einem stabilen Fachwerke $\mathfrak{G}_k$ gemacht und werden, damit das Spannungsproblem dasselbe bleibe, in P_a und P_b die beiden Kräfte $s_{b,a}$ und $s_{a,b}$ hinzugefügt, so wird ja $P_c P_d$ spannungslos sein. Denken wir uns daher wieder in allen Stäben eines Fachwerks $\mathfrak{G}_k'$, das sich von $\mathfrak{G}_k$ nur in der Richtung des Stabes $P_c P_d$ unterscheidet, also z. B. mit $\mathfrak{F}_k'$ alle Knotenpunkte gemein haben darf, dieselben Spannungen wirkend wie in den entsprechenden Stäben von $\mathfrak{G}_k$, so müssen auch in allen Knotenpunkten von $\mathfrak{G}_k'$ äussere Kräfte derselben Richtung und Grösse resultiren wie in den entsprechenden Knotenpunkten von $\mathfrak{G}_k$. Denken wir also umgekehrt in allen Knotenpunkten von $\mathfrak{G}_k'$ oder $\mathfrak{F}_k'$ Kräfte derselben Richtung und Grösse angebracht wie die gegebenen äusseren Kräfte in den entsprechenden Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_k$, so werden dieselben ein Kräftepaar bestimmen, dessen Componenten nach zwei Parallelen zu $P_a P_b$ durch P_a' und P_b' den gesuchten Zusatzkräften in P_a und P_b für $\mathfrak{G}_k$ entgegengesetzt gleich, also den gesuchten Spannungen $s_{a,b}$ und $s_{b,a}$ in $P_a P_b$ (als Componenten von k_a resp. k_b) gleich sind. Wir können diese Regel in dem folgenden Satze aussprechen:

11. *Ist ein Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$ von derselben Gliederung wie $\mathfrak{F}_k$ bekannt, das sich von $\mathfrak{F}_k$ nur in der Richtung eines Stabes $P_a' P_b'$ unterscheidet, so bringe man in den Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_k'$ gleiche und gleich gerichtete Kräfte an wie in den entsprechenden Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_k$; reducirt man dann das diesen Kräften äquivalente Paar auf zwei zu $P_a P_b$ parallele Angriffslinien durch P_a' und P_b' , so stellt die durch P_a' gehende Kraft dieses neuen Paares die von P_a ausgehende Spannung in $P_a P_b$ dar.*

*) S. Föppl, Theorie des Fachwerks, S. 23 ff., Leipzig 1880, und Henneberg a. a. O. S. 233.

Was die hier nöthige Reduction des Kräftepaares betrifft, so braucht man nur für irgend einen Pol Q , der sich auf einer Parallelen zu $P_a P_b$ durch den Anfangspunkt K_0 des gegebenen Kräftepolygons befindet, und für die den Seiten dieses Kräftepolygons parallelen Angriffslinien durch $P_1' P_2' \dots P_k'$ ein Seilpolygon $S_0' S_1' \dots S_k' S_{k+1}'$ zu

Fig. 5.

zeichnen, dessen erste Seite durch P_a' geht; schneiden sich dann die erste und vorletzte Seite des Seilpolygons in σ , die Parallele durch P_b' zu $P_a P_b$ aber und die letzte Angriffslinie in τ , so schneidet die Parallele durch K_{k-1} zu $\sigma\tau$ den Seilstrahl CK_0 in einem solchen Punkte Q' , dass $K_0 Q'$ die gesuchte Spannung $s_{a,b}$ darstellt; denn das Seilpolygon für den Pol Q' , dessen erste Seite durch P_a' geht, schickt seine letzte

Seite durch P_6' *). Wir haben diese Construction in Fig. 5 zur Bestimmung der Spannung im Stabe P_4P_5 des mehrfach betrachteten Fachwerks mit sechs Knotenpunkten benutzt, wobei wir nur der grösseren Bequemlichkeit wegen den Punkt K_4 zum Anfangspunkte des ja geschlossenen Kräftepolygons gemacht haben; das Seilpolygon $S_1S_2 \dots S_6$ diente zur Bestimmung der ursprünglichen äusseren Kräfte und konnte zugleich mit dem anderen construiert werden. Man wird hiernach beurtheilen können, welche Vortheile diese neue graphische Methode zur Bestimmung der Spannungen in einem Fachwerke in den Fällen bietet, in denen die alten Methoden versagen.

Hierbei wird es nicht ohne Interesse sein, zu sehen, wie diese Methode in die alte Culmann'sche übergeht, falls das Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ aus zwei Fachwerken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch Verbindung mit drei Stäben entstanden ist, von denen P_aP_b der eine ist. Dann kann man nämlich als das Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$ dasjenige betrachten, das aus $\mathfrak{A}$ und einem Fachwerke $\mathfrak{B}'$ besteht, das zu $\mathfrak{B}$ ähnlich und mit ihm in Bezug auf den Schnittpunkt D der beiden andern Stäbe ähnlich gelegen ist; diese zwei Verbindungsstäbe behalten dann ihre Lage, während P_aP_b in P_aP_b' übergeht. Das Kräftepaar können wir uns hier gegeben denken durch die Resultante a der auf $\mathfrak{A}$ wirkenden Kräfte und die Resultante b' der auf $\mathfrak{B}'$ wirkenden Kräfte, deren Angriffslinie offenbar durch die obige Aehnlichkeitstransformation hervorgeht aus der mit der von a zusammenfallenden Angriffslinie der Resultante b der auf $\mathfrak{B}$ wirkenden Kräfte; denn die Angriffslinie der Resultante einer Reihe von Kräften ändert sich nicht, wenn die Kräfte in demselben Verhältnisse vergrössert oder verkleinert werden. Es liegen folglich D , der Punkt $A = (a, P_aP_b)$ und der Schnittpunkt B' der Parallelen durch P_b' zu P_aP_b mit b' in einer Geraden. Man kann hier also die Reduction des Kräftepaares a, b' auf die beiden zu P_aP_b parallelen Angriffslinien so vornehmen, dass man a nach P_aP_b und AD und b' nach AD und $P_b'B'$ zerlegt, und in dem ersten Schnitte besteht bekanntlich die Culmann'sche Methode **).

Auch die Methode zur Bestimmung der Spannung in irgend einem Stabe, welche man Müller-Breslau***) verdankt, setzt die Construction des Fachwerks $\mathfrak{F}_k'$ voraus, das bei M. die Rolle der Figur der Geschwindigkeitspole spielt. M. bildet nämlich für jeden Knotenpunkt P_c die Gleichung, welche ausdrückt, dass das Drehungsmoment

*) Es beruht das auf dem bekannten Satze der graphischen Statik, dass die Schnittpunkte gleichvielter Seiten zweier Seilpolygone, die zu demselben Systeme von Kräften, aber zu verschiedenen Polen gehören, auf einer zur Verbindungslinie dieser Pole parallelen Geraden liegen. Man vergl. z. B. Müller-Breslau a. a. O. S. 9.

**) Culmann, Die graphische Statik 1. Aufl., S. 363, Zürich 1866.

***) S. das Citat auf S. 142.

der von P_c ausgehenden Spannungen in Beziehung auf den Punkt P'_c gleich dem Momente der Kraft k_c für denselben Punkt ist. Addirt man alle diese Gleichungen, so bleibt auf der einen Seite nur die Spannung $s_{a,b}$ multiplicirt mit der Differenz der Entfernung des Punktes P'_b von derjenigen des Punktes P'_a von $P_a P_b$, während auf der andern Seite die algebraische Summe der Drehungsmomente der äusseren Kräfte in Beziehung auf die entsprechenden Geschwindigkeitspole steht. Die graphische Verwerthung der hieraus fliessenden Methode führt entschieden zu weniger einfachen Constructionen als die von mir angegebene Methode, wie schon daraus hervorgeht, dass man Satz 11 auch in folgende Form setzen kann: *Ist ein Fachwerk $\mathfrak{F}'_k$ von derselben Gliederung wie $\mathfrak{F}_k$ bekannt, das sich von $\mathfrak{F}_k$ nur in der Richtung des Stabes $P'_a P'_b$ unterscheidet, so ist das Moment der in P'_a angebrachten Spannung $s_{a,b}$ des Stabes $P_a P_b$ in Beziehung auf den Punkt P'_b gleich dem Momente der in den Punkten P'_c von $\mathfrak{F}'_k$ angebrachten gegebenen äusseren Kräfte k_c für denselben Momentenpunkt.* Auch hiernach kann $s_{a,b}$ in bekannter Weise mit Hülfe eines Seilpolygons ermittelt werden, da es sich überall um denselben Momentenpunkt handelt, während hierzu nach Müller-Breslau erst eine umständliche Verlegung der äusseren Kräfte erforderlich ist. In der That gehen beide Methoden in einander über, wenn man berücksichtigt, dass erstens die Summe der Momente der in P_c angreifenden Kräfte k_c in Beziehung auf einen und denselben Momentenpunkt P'_b verschwindet, und dass zweitens das Moment der in P_c angreifenden Kraft k_c für P'_c gleich der Differenz der Momente derselben in P_c resp. P'_c angreifenden Kraft für den Punkt P'_b ist. Es muss jedoch bemerkt werden, dass der Verfasser diese Ueberführbarkeit der beiden Methoden in einander erst nachträglich erkannte, dass für ihn vielmehr der auch bei den obigen Beweisen befolgte Gesichtspunkt massgebend war, für die beiden Fachwerke $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{F}'_k$, die sich nur in der Richtung eines Stabes unterscheiden, auch die Spannungsprobleme in möglichst grosse Uebereinstimmung zu bringen.

Nimmt man wieder an, dass das Fachwerk aus zwei stabilen Fachwerken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch Einfügung von drei Stäben entstanden ist, so geht die Methode von Müller-Breslau in die Ritter'sche*) über; denn dann kann man die Geschwindigkeitspole der Punkte von $\mathfrak{B}$, die der Bewegung von $\mathfrak{B}$ gegen $\mathfrak{A}$ nach Entfernung des Verbindungsstabes $P_a P_b$ entsprechen, alle in den momentanen Drehpunkt D der Scheibe $\mathfrak{B}$ verlegen, während die Geschwindigkeitspole der Punkte von $\mathfrak{A}$ mit ihnen selbst zusammenfallen, also keinen Beitrag für obige algebraische Summe liefern.

*) Ritter, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. Hannover 1863.

Jedenfalls sieht man, wie die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Spannungen in einem Fachwerke alle aus unserer Methode ohne Schwierigkeit abgeleitet werden können. Wie sie auch zur Vervollständigung der Cremona'schen Methode dient, werden wir im nächsten Paragraphen sehen.

§ 4.

Ueber Kräftepläne.

Die erste von uns entwickelte Methode zur Bestimmung der Spannungen in einem einfachen stabilen Fachwerke, das aus einem Dreiecke durch allmähliche Anfügung von je zwei Stäben entstanden ist, gestaltet sich dann besonders einfach, wenn die allmähliche Zerlegung der in dem jedesmal fortzulassenden Knotenpunkte P_a angreifenden Kraft $K_{a-1}K_a$ so vorgenommen werden kann, dass der die

gelagerten Dreiecken bestehen. Dann liegen nämlich sämtliche Knotenpunkte am Rande der von diesen Dreiecken überdeckten Fläche, und wir brauchen die äusseren Kräfte nur in die Reihenfolge zu bringen, welche der Aufeinanderfolge ihrer Angriffspunkte auf diesem Rande entspricht. Dann ist $K_{a-1}Q_b \parallel P_{a-1}P_a$ und $Q_bK_a \parallel P_aP_{a+1}$, sodass nach Fortlassung von P_a in P_{a-1} und P_{a+1} Kräfte angreifen, welche durch die aufeinander folgenden Seiten $K_{a-2}Q_b$ und Q_bK_{a+1} des neuen Kräftepolygons dargestellt sind (vergl. Fig. 6). Diese Figur, welche die Stabkräfte nunmehr in übersichtlicher Anordnung enthält, wird ein *Kräfteplan* genannt. *In einem Kräfteplane ist die Lösung des Spannungsproblems gewissermassen in Evidenz gesetzt, insofern den von jedem Knotenpunkte auslaufenden Stäben als Darstellungen ihrer Spannungen im Kräfteplane Strecken entsprechen, die mit der dem Knotenpunkte entsprechenden Seite des Kräftepolygons ein geschlossenes Polygon bilden, und jede Stabkraft gemeinsame Seite von zwei solchen Polygonen ist.* Es wird nun unsre Aufgabe sein, die allgemeinen Bedingungen aufzustellen, an welche die Existenz eines solchen zu einem einfachen, stabilen Fachwerke gehörigen Kräfteplanes geknüpft ist. Hierbei werden wir allerdings die folgende allgemeine Voraussetzung zu Grunde legen: *Die Existenz eines Kräfteplanes für ein gegebenes, einfaches, stabiles Fachwerk und gegebene äussere Kräfte soll nicht aufgehoben werden durch Veränderung der Richtungen der Stäbe und der Grössen und Richtungen der nicht verschwindenden äusseren Kräfte.* Ohne eine solche Voraussetzung würden in der That unsre Untersuchungen, wenn sich dann überhaupt noch ein Angriffspunkt für sie böte, zu keiner allgemeinen und praktisch brauchbaren Methode führen können.

Dieser Voraussetzung fügen wir noch die weitere hinzu, dass *kein Stab des Fachwerks bei beliebiger Annahme der von Null verschiedenen äusseren Kräfte spannungslos sei*; wir werden diese Annahme, damit unsre Untersuchungen sich nicht von vornherein zu verwickelt gestalten, erst auf S. 172 u. 173 als stets erfüllt nachweisen, falls das Fachwerk in geeigneter Weise reducirt ist.

Es wird nun unsre nächste Aufgabe sein, durch Ermittlung der Anzahl p der Eckpunkte Q_a des Kräfteplanes unseren weiteren Untersuchungen eine feste Grundlage zu geben. Zu diesem Zwecke erweitern wir die Figur des Kräfteplanes durch Hinzufügung der Seilstrahlen $CK_0, CK_1, \dots, CK_{n-1}$, wo n , wie wir sehen werden, im Allgemeinen kleiner als k ist, d. h. in einer Reihe von Knotenpunkten wirken keine äusseren Kräfte. Wir wollen die neue Figur den *erweiterten Kräfteplan* nennen; er ist offenbar ein Fachwerk mit $n + p + 1$ Knotenpunkten, nämlich den n Ecken des Kräftepolygons, den p Ecken des Kräfteplanes und dem Pole des Seilpolygons, und mit $2n + s$ Stäben,

nämlich den n Seilstrahlen, den n Seiten des Kräftepolygons und den s Seiten des eigentlichen Kräfteplanes. Es ist nun zuerst leicht zu sehen, dass *der erweiterte Kräfteplan ein stabiles Fachwerk ist*, d. h. durch seine Gliederung, die Richtungen seiner Stäbe und die Endpunkte eines Stabes vollkommen bestimmt ist. Wählen wir in der That etwa CK_0 als diesen Stab, so ist zunächst das ganze Kräftepolygon durch die Richtungen seiner Seiten und der Seilstrahlen bestimmt; von diesen $2n$ Stäben ist sogar der eine überzählig, d. h. seine Richtung durch diejenige der übrigen mitbestimmt (vergl. S. 159). Würden nun hiernach die Punkte Q_a nicht durch die Richtungen der s weiteren Stäbe bestimmt sein, sondern würde noch ein zweites System von Eckpunkten Q'_a existiren, das dieselben Bedingungen erfüllt, und denken wir uns diese neuen s Stäbe als Spannungen in den entsprechenden s Stäben des Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ wirkend, so werden die resultirenden äusseren Kräfte mit den gegebenen identisch sein, weil die Gliederung des erweiterten Kräfteplans die Lösung des Spannungsproblems in Evidenz setzt. Unser ursprüngliches Spannungsproblem hätte also mehr als eine Lösung. Weiterhin ist es nicht schwer zu sehen, dass *der erweiterte Kräfteplan ein stabiles Fachwerk mit zwei überzähligen Stäben ist**). Lassen wir nämlich etwa den Seilstrahl CK_{n-1} und die Kräftepolygonseite $K_{n-1}K_0$ fort und nehmen an, der erweiterte Kräfteplan würde dadurch instabil, so würde durch analoge Schlüsse wie eben folgen, dass einer zweiten hierdurch bedingten Spannungsvertheilung entsprechend in den Knotenpunkten $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$ die gegebenen äusseren Kräfte resultiren müssten, während die Kraft in P_{n-1} wenigstens die gegebene Richtung haben müsste; dann müssten aber auch die Kräfte in P_{n-1} und P_n die gegebenen sein (vergl. S. 159 u.), sodass unser Spannungsproblem wieder mehr als eine Lösung hätte. Nun beweist man in analoger Weise, dass der erweiterte Kräfteplan bei Fortlassung jedes weiteren Stabes instabil wird, indem wir von unserer Grundvoraussetzung auf S. 167 Gebrauch machen. Darnach können wir nämlich entsprechend der Aenderung der Richtung jedes Stabes von $\mathfrak{F}_k$ oder jeder Angriffslinie in $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ oder jeder Seilpolygonseite $S_n S_1, S_1 S_2, \dots, S_{n-2} S_{n-1}$ einen Kräfteplan finden, und die Aenderung jeder dieser Richtungen für sich ist ja möglich (vergl. S. 158 u. 159). Lassen wir also CK_{n-1} und $K_{n-1}K_0$ fort, so kann die Richtung jedes andern Stabes des erweiterten Kräfteplanes ohne Aenderung der übrigen verändert werden, *der erweiterte Kräfteplan ist also nach Fortlassung der Stäbe CK_{n-1} und $K_{n-1}K_0$ ein einfaches, stabiles Fachwerk*, es muss folglich die Gleichung bestehen: $2(n+k)-5=2(n+p+1)-3$ oder:

$$p = k - 2.$$

*) Vergl. S. 159 o.

Um hieraus weitere Schlüsse zu ziehen, schicken wir einige Definitionen und Hilfssätze voraus. Unter einem *einfachen Polygone* verstehen wir ein geschlossenes Polygon, das zwar überschlagen sein kann, von dem aber keine zwei Ecken zusammenfallen. Wir sprechen ferner von einer *vollständigen Zerlegung eines Fachwerks in p einfache Polygone*, wenn die Stäbe so als die Seiten von p einfachen Polygonen angeordnet werden können, dass jeder Stab die gemeinsame Seite von zwei und nur zwei Polygonen ist. Eine solche vollständige Zerlegung eines Fachwerks wollen wir *zusammenhängend* nennen, wenn man dadurch, dass man von einem Polygone ausgehend an dieses ein zweites ansetzt das mit dem ersten eine oder mehrere Seiten gemein hat, an diese ebenso ein drittes u. s. f., schliesslich zu allen Polygonen der Zerlegung kommen kann. Dann können wir folgenden Hilfssatz beweisen, bei dem, wie wir ausdrücklich bemerken wollen, keinerlei Voraussetzung über Stabilität oder Einfachheit des Fachwerks gemacht wird. Der Satz lautet:

12. *Hat man eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung eines Fachwerks mit k Knotenpunkten und s Stäben in p einfache Polygone, so ist stets $p \leq s - k + 2$.**

Seien nämlich die Polygone in eine Reihenfolge

$$(Q_1), (Q_2), \dots, (Q_a), \dots, (Q_p)$$

ihrer Ansetzung gebracht, und bezeichne q_a die bei der Ansetzung von (Q_a) nöthige Anzahl verschiedener Reihen aufeinander folgender neuer Stäbe und t_a die Anzahl der zwei neuen Stäben gemeinsamen Ecken, welche nach schon vorhandenen Ecken fallen, so vermehrt sich offenbar die Zahl $s - k$ bei Ansetzung von (Q_a) um $q_a + t_a$. Denn bei Ansetzung jeder Reihe aufeinander folgender neuer Stäbe wird ein Stab mehr angesetzt als Ecken, falls diese alle neu sind; die Zahl 1

*) Man vergl. hiermit die Behauptung von Grübler auf S. 4 der o. a. Schrift: „dass die Anzahl v der von den Stäben gebildeten Polygone, falls jeder Stab nur zweien derselben angehören soll, nur die beiden Werthe $s - (k - 1)$ und $s - (k - 1) + 1$ haben kann,“ welcher die Zerlegung des mehrfach benutzten Fachwerks mit sechs Knotenpunkten (Fig. 1) in die drei Sechsecke $P_1 P_2 P_3 P_6 P_5 P_4 (P_1)$, $P_2 P_3 P_4 P_1 P_6 P_5 (P_2)$ und $P_3 P_4 P_5 P_2 P_1 P_6 (P_3)$ offenbar widerspricht. (Diese Zerlegung hat mir Friedrich Schilling mitgetheilt). Es wird hiernach überflüssig sein, die Unzulänglichkeit des Grübler'schen Beweises darzuthun, die eben in der ganzen Methode liegt. Die analytische Beweisführung kann hier überhaupt nur auf solche Fachwerke angewendet werden, für welche die Richtungen der Stäbe unabhängig von einander sind, während die betreffenden Sätze rein topologischer Natur sind und nur von den Zahlen s und k abhängen. Es mag schliesslich noch bemerkt werden, dass die obigen scharfen Begriffsbestimmungen bei Grübler ganz fehlen. Ohne diese lässt sich aber nichts beweisen. So kann man z. B., wenn der Zusammenhang der Zerlegung aufgegeben wird, auch Fachwerke construiren, für die es eine vollständige Zerlegung in mehr als $s - k + 2$ Polygone giebt.

vermehrt sich also jedesmal noch um die Zahl der zwei neuen Stäben gemeinsamen Ecken, welche in alte Ecken fallen; hierbei sind $q_a = t_a = 0$ zu setzen, falls das Polygon aus lauter schon vorhandenen Stäben besteht. Es ist hiernach die Vermehrung von $s - k$ um $q_a + t_a - 1$ grösser als die von p . Hiernach ist sicher:

$$p = s - k + 1 - \sum_{a=2}^p (q_a + t_a - 1).$$

Es wird also darauf ankommen, zu beweisen, dass diese letzte Summe nicht dadurch, dass öfters der Fall $q_a = t_a = 0$ eintritt, < -1 werden kann.

Nun wird doch vor Beendigung unseres Ansatzungsprocesses immer eine Reihe von Stäben nur in einem Polygone vorkommen, diese Stäbe werden jedesmal ein oder mehrere einfache Polygone bilden, welche wir *Randpolygone* nennen wollen. Denn durchlaufen wir die Reihe der Polygone, die sich um den Endpunkt eines Randstabes an das diesen enthaltende Polygon mit durch den Endpunkt gehenden Stäben ansetzen, so finden wir, dass durch jeden Endpunkt eines Randstabes mindestens noch ein zweiter Randstab gehen muss. Am Anfange unseres Processes ist ja 1 die Anzahl dieser einfachen Randpolygone. Sei nun nach Ansetzung von (Q_2) die Anzahl der einfachen Randpolygone r , und durchlaufen wir (Q_2) in irgend einem Sinne, so werden wir offenbar von einem Randpolygone zu einem anderen nur gelangen können durch eine Reihe auf einander folgender Stäbe von (Q_2) , die zugleich (Q_1) angehören, oder bei Ueberschreitung eines Eckpunktes von (Q_1) , in dem zwei neue Stäbe von (Q_2) zusammenstossen. Da nun keins der einfachen Randpolygone aus Stäben von (Q_1) , das selbst einfach ist, allein bestehen kann, so ist sicher $r \leq q_2 + t_2$; denn man braucht ja auf einem jener Verbindungswege nicht in ein noch nicht passirtes Polygon zu kommen. Durch Ansetzung des Polygons (Q_2) kann sich also die Anzahl der Randpolygone um höchstens $q_2 + t_2 - 1$ vermehren. Ganz ebenso ergibt sich, dass die Anzahl der Randpolygone, die nach Ansetzung von (Q_a) an (Q_a) anstossen, höchstens $q_a + t_a$ sein kann. Sind daher diese Randpolygone aus q alten entstanden — und aus *einem* alten müssen sie mindestens entstanden sein — so hat sich bei Ansetzung von (Q_a) die Zahl der einfachen Randpolygone um höchstens $q_a + t_a - q$ vermehrt. Da sich für den Fall $q_a = t_a = 0$ die Zahl der einfachen Randpolygone um 1 vermindert, so können wir jedenfalls sagen, dass die Zahl der einfachen Randpolygone vor Ansetzung von (Q_p) höchstens gleich

$$1 + \sum_{a=2}^{p-1} (q_a + t_a - 1)$$

sein kann. Da aber diese Zahl thatsächlich 1 ist, so folgt in der That, dass

$$\sum_{a=2}^p (q_a + t_a - 1)$$

nicht kleiner als -1 werden darf; unser Satz ist folglich bewiesen.

Aus unserem Satze ergibt sich unmittelbar der folgende:

13. *Eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung eines Fachwerks mit k Knotenpunkten und $2k - 3$ Stäben kann höchstens $k - 1$ einfache Polygone enthalten.*

Ehe wir hiervon weitere Anwendungen machen, bemerken wir, dass wir dem erweiterten Kräfteplane $\mathfrak{K}$ entsprechend auch ein *erweitertes Fachwerk* $\mathfrak{F}$ haben werden, das durch Erweiterung des Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ um die Ecken und Seiten des Seilpolygons und den Stäben $S_a P_a$ entsteht, die in die Angriffslinien der äusseren Kräfte fallen. Da die Seiten des Seilpolygons noch parallel mit sich selbst verschoben werden können, so ist das erweiterte Fachwerk $\mathfrak{F}$ ein instabiles Fachwerk mit $k + n$ Knotenpunkten und $2(k + n) - 3$ Stäben.

Für den erweiterten Kräfteplan haben wir offenbar der Definition gemäss eine vollständige Zerlegung in $k + n$ Polygone. Von diesen sind die n Dreiecke, welche den Ecken des Seilpolygons entsprechen, sicher einfach, und es fragt sich, ob dasselbe auch von den k Polygonen gilt, welche den Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_k$ entsprechen. Das würde sicher der Fall sein, wenn unsere Zerlegung zusammenhängend wäre. Denn zerfielen dann jene k Polygone in $k + k'$ einfache, so müsste nach Satz 12 sein:

$$n + k + k' \leq 2(k + n) - 3 - (k + n - 1) + 2 = k + n,$$

es müsste also $k' = 0$, also jedes Polygon einfach sein. Wäre aber unsre Zerlegung nicht zusammenhängend, zerlegte sie vielmehr den erweiterten Kräfteplan $\mathfrak{K}$ in i Theile $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_i$, für welche je eine zusammenhängende vollständige Zerlegung vorläge, und hätte jeder dieser Theile π_a einfache Polygone, s_a Stäbe und α_a Knotenpunkte, so wäre entweder höchstens für einen Theil $s_a - 2 = 2\alpha_a - 3$ oder für zwei Theile $s_a - 1 = 2\alpha_a - 3$, für alle andern Theile aber sicher $s_a \leq 2\alpha_a - 3$, da sonst $\mathfrak{K}$ mehr als zwei überzählige Stäbe enthielte. Es folgt daher durch Addition:

$$s_1 + s_2 + \dots + s_i - 2 = 2(k + n) - 5 \leq 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i) - 3i,$$

also:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i \geq k + n - 1 + \frac{3}{2}(i - 1).$$

Den i Theilen von $\mathfrak{K}$ entsprechend müsste aber auch das erweiterte Fachwerk $\mathfrak{F}$ in i Theile mit je s_a Stäben und mit je höchstens α_a

Knotenpunkten zerfallen, insofern zwei Polygonen desselben Theiles derselbe Knotenpunkt im Fachwerk entsprechen könnte. Es ist also, da $\mathfrak{F}$ nicht aus Theilen nicht-einfacher Gliederung bestehen kann, jedenfalls: $s_a \leq 2\pi_a - 3$. Daraus folgt:

$$2(k+n) - 3 \leq 2(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_i) - 3i$$

oder:

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_i \geq k + n + \frac{3}{2}(i-1).$$

Nun gilt aber für jeden Theil $\mathfrak{R}_a$ die Ungleichung:

$$\pi_a \leq s_a - \pi_a + 2,$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_i &\leq 2(k+n) - 3 - (k+n-1 + \frac{3}{2}(i-1)) + 2i \\ &\leq k+n + \frac{1}{2}(i-1), \end{aligned}$$

welche beide Ungleichungen offenbar nur für $i=1$ und unter Annahme des Gleichheitszeichens mit einander verträglich sind. Hiermit ist also bewiesen, dass *der erweiterte Kräfteplan den $k+n$ Knotenpunkten des erweiterten Fachwerks entsprechend in $k+n$ einfache Polygone zerlegt sein muss*. Es mag hervorgehoben werden, dass dies Resultat natürlich auf unserer Grundvoraussetzung beruht, dass die Existenz des Kräfteplanes nicht von den Richtungen seiner Seiten abhängt.

Nun ist weiter klar, dass *in jedem Eckpunkte Q_a des Kräfteplanes mehr als zwei Stäbe zusammenlaufen müssen*; denn sonst könnte man die Richtung eines solcher zwei Stäbe abändern, ohne dass sich die Richtungen der übrigen Stäbe des erweiterten Kräfteplanes ändern, dieser könnte also nicht zwei überzählige Stäbe haben, es müsste denn in dem entsprechenden Stabe des Fachwerks bei jeder zulässigen Annahme der äusseren Kräfte keine Spannung herrschen, die Richtung des Stabes im Kräfteplane also an sich unbestimmt werden. Es wird deshalb gut sein, diese Möglichkeit überhaupt einmal ins Auge zu fassen.

Soll in einem oder mehreren Stäben des Fachwerkes bei allen möglichen Richtungen der Stäbe des erweiterten Fachwerks keine Spannung herrschen, so werden die übrigen s' Stäbe von $\mathfrak{F}_k$ ein Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ mit k' Knotenpunkten bilden; denn ein gespannter Stab darf bei beliebiger Richtung keinen Endpunkt haben, in dem sonst lauter spannungslose Stäbe zusammenstossen, da auch die in dem Endpunkte etwa angreifende Kraft beliebig ist. Existirt nun für $\mathfrak{F}_k$ ein Kräfteplan, so ist er zugleich ein Kräfteplan für $\mathfrak{F}_k$, von dessen Erweiterung man genau in derselben Weise wie oben zeigt, dass er ein stabiles Fachwerk mit zwei überzähligen Stäben ist, für das eine vollständige Zerlegung in mindestens $n+k'$ einfache Polygone vorliegt. Zerfielen diese Zerlegung

wieder in i zusammenhängende, denen Theile des erweiterten Kräfteplanes mit je s'_α Stäben, κ'_α Knotenpunkten und π'_α einfachen Polygonen entsprechen, so beweist man in analoger Weise wie oben, dass:

$$\kappa'_1 + \kappa'_2 + \dots + \kappa'_i \geq \frac{s' + 2n + 1}{2} + \frac{3}{2}(i - 1),$$

$$\pi'_1 + \pi'_2 + \dots + \pi'_i \geq \frac{s' + 2n + 3}{2} + \frac{3}{2}(i - 1)$$

und

$$\pi'_1 + \pi'_2 + \dots + \pi'_i \leq \frac{s' + 2n + 3}{2} + \frac{1}{2}(i - 1),$$

sodass $i = 1$ und $k' \leq \frac{s' + 3}{2}$ sein muss. Da nun wegen der Einfachheit des Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ nicht $s' > 2k' - 3$ sein darf, so ist $s' = 2k' - 3$; aus demselben Grunde hat daher $\mathfrak{F}_k$ die Gliederung eines einfachen stabilen Fachwerks, ist also wegen der Veränderlichkeit der Richtungen seiner Stäbe selbst stabil. Der von uns angenommene Fall erlaubt demnach das Problem dahin zu vereinfachen, dass statt $\mathfrak{F}_k$ das einfache stabile Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ zu behandeln ist. *Wir werden also annehmen können, dass die Stäbe des Kräfteplanes sämmtlich von Null verschieden sind*, also durch jeden seiner Eckpunkte Q_α mindestens drei Stäbe laufen.

Nun sieht man auch leicht, dass niemals zwei Polygone des Kräfteplanes mehr als eine Seite gemein haben dürfen, weil sonst durch die ihnen entsprechenden Knotenpunkte des Fachwerks mindestens ein Paar paralleler Stäbe laufen müsste, was man durch Veränderung der Richtung eines Stabes immer vermeiden kann. Durchlaufen wir daher die in einem Eckpunkte Q_α des Kräfteplanes zusammenstossenden Polygone in der Reihenfolge ihrer Ansetzung an die Stäbe durch Q_α , so finden wir, dass jedem Punkte Q_α ein oder mehrere einfache Polygone im Fachwerke entsprechen*). Da dasselbe vom Pole C , dem ja das Seilpolygon entspricht, und den Eckpunkten des Kräftepolygons gilt, so folgt aus der Existenz eines Kräfteplanes eine vollständige Zerlegung des erweiterten Fachwerks $\mathfrak{F}$ in mindestens $k + n - 1$ einfache Polygone. Durch Wiederholung der mehrfach angewendeten Schlüsse findet man dann wieder, dass diese Zerlegung zusammenhängend sein muss, also jedem der $k + n - 1$ Knotenpunkte des erweiterten Kräfteplanes gerade ein einfaches Polygon des erweiterten Fachwerks entsprechen muss; *zwischen beiden Figuren besteht also vollkommene Reciprocität.*

*) S. Petersen, a. a. O. S. 156. Was die weiteren Sätze von Petersen betrifft, so halten wir dieselben theils für praktisch unbrauchbar zur Entscheidung über die Existenz eines Kräfteplanes, theils haben wir uns nach den kurzen Andeutungen, die von ihren Beweisen gegeben sind, nicht überzeugen können, dass Petersen wirklich im Besitze strenger Beweise dieser Sätze gewesen ist. Einige Sätze verlieren z. B. ihre Gültigkeit, wenn man den Zusammenhang der Zerlegung aufgibt, während ein diesbezüglicher Vorbehalt nirgends gemacht wurde.

Unter den $n + k - 1$ einfachen Polygonen des erweiterten Fachwerks interessieren uns hauptsächlich diejenigen $k - 2$, welche dem Fachwerke $\mathfrak{F}_k$ selbst ganz und gar angehören. Diese Polygone bilden offenbar keine vollständige Zerlegung von $\mathfrak{F}_k$, es kommen vielmehr eine Reihe von Stäben nur in je einem Polygone vor. Diese sogenannten *Randstäbe* gehören nach Satz 13 offenbar einem einfachen *Randpolygone* an, das die Zerlegung von $\mathfrak{F}_k$ vervollständigt. Hiernach hängt die Existenz eines Kräfteplanes für ein einfaches, stabiles Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ nothwendig ab von der Möglichkeit, eine vollständige und folglich auch zusammenhängende Zerlegung von $\mathfrak{F}_k$ in $k - 1$ einfache Polygone zu finden.

Um diese nothwendige Bedingung für die Existenz eines Kräfteplanes auch als hinreichend nachzuweisen, müssen wir die Beziehung je zweier dieser Polygone zu einander studiren. Bei diesen Betrachtungen sind natürlich nur die Gliederung und nicht die Richtungen der Stäbe wesentlich, sodass man die letzteren z. B. alle als von einander verschieden annehmen kann. Ueberhaupt können wir zunächst von einem Fachwerk mit k Knotenpunkten und s Stäben ausgehen, für das eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $p = s - k + 2$ einfache Polygone vorliegt.

Da bemerken wir denn zuerst, dass die um einen Punkt P_a von $\mathfrak{F}_k$ gelagerten Polygone niemals mehr als einen zusammenhängenden Cyklus bilden dürfen. Sonst könnte man nämlich ein Fachwerk mit ebenso viel Stäben, aber mindestens einem Knotenpunkte mehr construiren, für das dem Satze 12 zuwider eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $s - k + 2$ einfache Polygone existirte; man braucht dazu nur die Endpunkte der einem zweiten Cyklus angehörigen Stäbe durch P_a mit irgend einem anderen Punkte der Ebene zu verbinden.

Aus dieser Bemerkung folgt sofort, dass durch einen Knotenpunkt, in welchem zwei gemeinsame Seiten zweier Polygone der Zerlegung zusammenstossen, kein weiterer Stab laufen darf; denn sonst gehörte diesem Knotenpunkte mehr als ein Cyklus zu.

Nehmen wir nun an, ein Polygon $(Q) = P_1 P_2 \dots P_i$ der Zerlegung habe mit dem Vierecke $P_1 P_2 P_a P_{a+1}$ die beiden Seiten $P_1 P_2$ und $P_a P_{a+1}$ und nur diese gemein. Dann würden doch nach Fortlassung dieser beiden Seiten aus (Q) und dem Vierecke zwei neue einfache Polygone $P_1 P_{a+1} P_{a+2} \dots P_i$ und $P_2 P_3 \dots P_a$ entstehen, und wir hätten für ein Fachwerk mit k Knotenpunkten und $s - 2$ Stäben eine vollständige Zerlegung in $s - k + 2$ einfache Polygone. Dann kann nach Satz 12 diese Zerlegung sicher nicht zusammenhängend sein. Da aber der Zusammenhang des Cyklus in keinem Knotenpunkte aufgehoben ist — in P_1, P_2, P_a, P_{a+1} wird ja nur ein Stab fortgelassen, aber die anstossenden Stäbe werden je durch ein neues Polygon ver-

bunden —, so muss das neue Fachwerk nothwendig aus zwei Fachwerken, denen je eins der obigen beiden Polygone angehört, bestehen, und diese beiden Fachwerke dürfen keinen Knotenpunkt gemein haben. Da diese beiden Theile folglich im ursprünglichen Fachwerke nur durch die beiden Stäbe $P_1 P_2$ und $P_a P_{a+1}$ zusammenhängen können, so ist es für ein stabiles Fachwerk ausgeschlossen, dass irgend ein Polygon der Zerlegung mit einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten und nur diese gemein habe.

Auf diesen Fall können wir aber jeden andern Fall, in dem zwei Polygone der Zerlegung zwei nicht zusammenstossende Seiten gemein haben, durch Einziehung gewisser idealer Stäbe zurückführen. Diese *idealen Stäbe* werden gezogen von einem Eckpunkte eines Polygons nach einem idealen Knotenpunkte, der auf einer Seite des Polygons liegt. Da die Seite hierdurch in zwei Stäbe zerfällt, so treten beim Einziehen eines solchen idealen Stabes zwei neue Stäbe, ein neuer Knotenpunkt und ein neues Polygon hinzu, während im Uebrigen das Fachwerk stabil und einfach und seine Zerlegung in eine Anzahl einfacher Polygone, die um eins geringer ist als die Anzahl der Knotenpunkte, vollständig und zusammenhängend bleibt. Das Object der Untersuchung behält also alle seine charakteristischen Eigenschaften bei.

Nehmen wir nun an, ein Polygon (Q) hätte mit einem Polygone (Q') ausser dem Stabe $P_1 P_2$ noch einen nicht daran stossenden Stab $P_a P_{a+1}$ gemein, so ziehen wir die beiden idealen Stäbe $P_1 P'_{a+1}$ und $P_a P'_2$ ein, wo P'_{a+1} auf $P_a P_{a+1}$ und P'_2 auf $P_1 P_2$ liegen möge. Wir hätten also ein Fachwerk mit einer Zerlegung, in welcher ein Viereck mit einem andern Polygone zwei gegenüberliegende Seiten und nur diese gemein hätte. Da wir das für ein stabiles Fachwerk als unmöglich nachgewiesen haben, so erhalten wir den folgenden Satz:

14. *Je zwei Polygone einer vollständigen und zusammenhängenden Zerlegung eines einfachen, stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ in $k - 1$ einfache Polygone können höchstens zwei Stäbe gemein haben; diese müssen dann in einem Knotenpunkte zusammenstossen, durch welchen kein weiterer Stab des Fachwerks läuft.*

Nunmehr gehen wir von einem bestimmten einfachen und stabilen Fachwerke aus, für das eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $k - 1$ einfache Polygone gefunden sei. Von diesen Polygonen zeichnen wir eins als das *Randpolygon* aus, das dann mit jedem der $k - 2$ übrigen Polygone in der durch den Satz bezeichneten Beziehung steht. Die Fortlassung dieses Randpolygons kann dann den Zusammenhang der übrigen nicht aufheben; denn jedem zusammenhängenden Complexe dieser Polygone müsste ja mindestens ein einfaches Randpolygon zugehören (vergl. S. 170).

Was nun die äusseren Kräfte betrifft, so ist klar, dass sie *nur in den Eckpunkten dieses Randpolygons angreifen dürfen*; denn jedem inneren Stabe müsste im Kräfteplane ein Stab entsprechen, welcher keinen Eckpunkt des Kräftepolygons enthält, also auch einem inneren Knotenpunkte ein Polygon, das keine Seite mit dem Kräftepolygone gemein hat. Wir können desshalb zuerst alle inneren Knotenpunkte mit nur zwei Stäben fortlassen, da je zwei solche Stäbe spannungslos sein werden. Hierbei gehen je ein Knotenpunkt und je zwei Stäbe verloren, sodass das neue Fachwerk einfach und stabil bleibt, es gehen daher auch die beiden Polygone, welchen die beiden Stäbe gemeinsam sind, nach Satz 13 jedesmal in ein einfaches Polygon über. Das neue Fachwerk behält also alle charakteristischen Eigenschaften, nur können jetzt, wenn wir das Randpolygon ausnehmen, je zwei der anderen Polygone, die wir *eigentliche Polygone* der Zerlegung nennen wollen, nur einen Stab gemein haben.

Die in den Randknotenpunkten angreifenden äusseren Kräfte ordnen wir nunmehr nach der Aufeinanderfolge ihrer Angriffspunkte im Randpolygone zu einem geschlossenen Kräftepolygone $K_0 K_1 \dots K_{n-1} K_0$. Dann können wir den simplen Process der Zerlegung so lange vornehmen, als zweiständige Randknotenpunkte vorhanden sind. Jedem solchen Knotenpunkte entsprechend wird ein Polygon abgetrennt, dessen entsprechender Punkt im Kräfteplane ein Eckpunkt des Kräftepolygons für das durch Fortlassung des Knotenpunktes entstehende Fachwerk ist (vergl. S. 167). Es ist nach Analogie früherer Beweise leicht zu erkennen, dass auch dies Fachwerk alle charakteristischen Eigenschaften behält.

Sind nun einmal am neuen Rande des Fachwerks $\mathfrak{F}_x$ keine zweiständigen Knotenpunkte mehr vorhanden, so *muss mindestens ein Randstab $P_a P_{a+1}$ durch eine solche Diagonale eines der eigentlichen Polygone der Zerlegung ersetzt werden können, dass das neue Fachwerk auch stabil ist*. Ist nämlich $\mathfrak{F}_x$ eins der Fachwerke, das sich von $\mathfrak{F}_k$ nur in der Richtung des $P_a P_{a+1}$ entsprechenden Stabes, aber in dieser wirklich unterscheidet, so wird das durch Fortlassung von $P_a P_{a+1}$ und Einfügung einer gewissen Diagonale entstehende Fachwerk stabil sein oder nicht, je nachdem die dieser Diagonale in $\mathfrak{F}_k$ entsprechende Diagonale eine andere Richtung hat oder nicht. Nun sind aber zwei entsprechende Polygone ähnlich und ähnlich gelegen, wenn alle entsprechendsn Seiten und Diagonalen je dieselbe Richtung haben; denn der Fall, dass alle Seiten und folglich auch alle Diagonalen eines Polygons gleiche Richtung haben, ist ausgeschlossen, weil das Fachwerk sonst einen Stab enthielte, dessen Richtung durch diejenigen der übrigen bestimmt wäre. Weiter ist klar, dass jeder Complex zusammenhängender Polygone von $\mathfrak{F}_x$, denen in $\mathfrak{F}_x$ ähnliche und

ähnlich gelegene Polygone entsprechen, ein Fachwerk bildet, dem in $\mathfrak{F}'_k$ ein ähnliches und ähnlich gelegenes Fachwerk entspricht.

Würde es nun unmöglich sein für den Stab $P_a P_{a+1}$ eine solche Diagonale eines der eigentlichen Polygone so einzufügen, dass das neue Fachwerk wieder stabil ist, so entspricht sicher, von dem $P_a P_{a+1}$ enthaltenden Polygone (Q_b) abgesehen, jedem Polygone von $\mathfrak{F}_k$ ein ihm ähnliches und ähnlich gelegenes in $\mathfrak{F}'_k$; was (Q_b) selbst betrifft, so könnte es ein Dreieck sein oder z. B. ein Viereck, von dem zwei der drei andern Seiten gleiche Richtung haben, sodass hier im Allgemeinen nicht auf seine Aehnlichkeit zu (Q_b) geschlossen werden darf. In der That müssen wir vielmehr schliessen, dass die Fortlassung von (Q_b) den Zusammenhang unserer Zerlegung aufhebt, weil sonst auch $\mathfrak{F}_k$ zu $\mathfrak{F}'_k$ ähnlich und ähnlich gelegen wäre gegen die Voraussetzung. Da aber unsere zusammenhängende Zerlegung durch Fortlassung von (Q_b) in höchstens zwei zusammenhängende Complexe von Polygonen zerfallen kann, so besteht $\mathfrak{F}_k$ nach Fortlassung von $P_a P_{a+1}$ aus zwei Theilfachwerken, denen zwei ähnliche und ähnlich gelegene Fachwerke in $\mathfrak{F}'_k$ entsprechen müssen. Diese beiden Theilfachwerke dürfen folglich, da $\mathfrak{F}_k$ zu $\mathfrak{F}'_k$ nicht ähnlich und ähnlich gelegen ist, nur einen Knotenpunkt gemein haben, der offenbar ein am Rande gelegener Eckpunkt von (Q_b) ist, weil nur in einem solchen der Zusammenhang der um ihn gelagerten Polygone durch (Q_b) aufgehoben werden kann; die beiden Theilfachwerke sind daher beide stabil. *Falls es also unmöglich ist, für den einzigen Randstab $P_a P_{a+1}$ des Polygons (Q_b) eine solche Diagonale in eines der eigentlichen Polygone der Zerlegung einzufügen, dass wieder ein stabiles Fachwerk entsteht, so besteht das Fachwerk aus zwei stabilen Theilen, die durch einen Eckpunkt von (Q_b) und den Stab $P_a P_{a+1}$ mit einander verbunden sind.*

Nunmehr ist es leicht zu sehen, dass nach Fortlassung aller zweiständigen Knotenpunkte nicht für alle Randstäbe diese Unmöglichkeit vorliegen kann. Dann würde nämlich jedes der beiden Theilfachwerke, deren Rand ja einerseits aus Stäben des trennenden Polygons und andererseits aus auf einander folgenden alten Randstäben besteht, wieder in zwei Theile zerfallen, von denen einer dieselbe Art der Berandung besitzt, dieser wieder u. s. f., sodass wir schliesslich auf ein stabiles Polygon, also ein Dreieck kommen müssten; da dieses aber mit dem zuletzt fortgelassenen Polygone nur eine Seite gemein haben kann, so enthielte es zwei alte Randstäbe, die nach unserem Satze nur in einem zweiständigen Knotenpunkte zusammenstossen können. Sind also wirklich alle zweiständigen Knotenpunkte fortgelassen, so muss irgend ein Randstab $P_a P_{a+1}$ existiren, der durch eine solche Diagonale eines eigentlichen Polygons ersetzt werden kann, dass das dadurch entstehende Fachwerk stabil bleibt. Hierbei tritt entweder an Stelle von

(Q_b) eins der Polygone, in welche (Q_b) durch die Diagonale zerlegt wird, oder ein anderes Polygon wird in zwei zerlegt. Wir haben also wieder ein Fachwerk mit den mehrfach bezeichneten charakteristischen Eigenschaften.

Soll aber bei dieser Veränderung des gegebenen Fachwerks das Spannungsproblem nicht verändert werden, so werden wir in P_a und P_{a+1} die Kräfte $s_{a+1,a}$ und $s_{a,a+1}$ anbringen müssen. Sind diese Kräfte durch $K_a Q_b$ resp. $Q_b K_{a+1}$ dargestellt, so wirken in P_a und P_{a+1} die durch die Seiten $K_{a-1} Q_b$ und $Q_b K_{a+1}$ des neuen Kräftepolygons dargestellten Kräfte, wobei in der Diagonale natürlich die Spannung Null resultirt. Die Bestimmung von Q_b kann hierbei nach Satz 11 geschehen. Man hat also nur für das Kräftepolygon $K_a K_{a+1} \dots K_0 K_1 \dots K_{a-1} K_a$ und die den Seiten desselben parallelen Angriffslinien durch $P'_{a+1} \dots P'_{a-1} P'_a$ den Pol Q_b auf einer Parallelen durch K_a zu $P_a P_{a+1}$ eines solchen Seilpolygons zu finden, dass die erste Seite durch P'_{a+1} und die letzte durch P'_a geht.

Indem man so fortfährt, also entweder den zuletzt beschriebenen Process wiederholt oder eine Kraft nach zwei Stäben eines zweiständigen Knotenpunktes zerlegt, wird man schliesslich auf ein Dreieck kommen, das Seilpolygon für die drei in seinen Ecken angreifenden Kräfte sein muss, der zugehörige Pol vervollständigt also den Kräfteplan. In der Ueberbestimmtheit dieses letzten Punktes kommt wieder die Thatsache zum Ausdruck, dass der erweiterte Kräfteplan ein stabiles Fachwerk mit zwei überzähligen Stäben ist, als welche man eine Seite des Kräftepolygons und einen dieser letzten drei Stäbe, welche den Seiten des Dreiecks entsprechen, betrachten kann. Bei diesem Verfahren werden die Punkte des Kräfteplanes, die Theilen eines der ursprünglichen Polygone entsprechen, von selbst zusammenfallen. Wir können das Resultat unserer Betrachtungen in den folgenden Satz zusammenfassen:

15. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die in einem einfachen, stabilen Fachwerke $\mathfrak{F}_k$ unter dem Einflusse äusserer Kräfte entstehenden Spannungen sich zu einem Kräfteplane ordnen lassen, ist die, dass erstens für $\mathfrak{F}_k$ eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $k - 1$ einfache Polygone existire, und dass zweitens die äusseren Kräfte nur in den Eckpunkten eines solchen Polygons angreifen. Der durch Hinzufügung der Seilstrahlen erweiterte Kräfteplan ist dann ein stabiles Fachwerk mit zwei überzähligen Stäben.*

Wir haben bei dem Beweise für die Existenz eines Kräfteplanes einen Weg eingeschlagen, der auch praktisch zur wirklichen Herstellung des Kräfteplanes in den meisten Fällen der geeignetste zu sein scheint und deutlich die Vortheile erkennen lässt, welche die Möglichkeit der Anordnung der Spannkkräfte zu einem Kräfteplane bei ihrer Bestimmung gewährt. Man nimmt zuerst den simplen Process der Zerlegung

je einer Kraft nach je zwei Componenten durch Ziehen von je zwei Parallelen so lange vor, als zweiständige Randknotenpunkte vorhanden sind, wobei natürlich immer neue Knotenpunkte an den Rand treten können. Sind alle zweiständigen Randknotenpunkte erschöpft, so construirt man ein Fachwerk $\mathfrak{F}'_k$, das mit dem vorhandenen die Gliederung und die Richtungen aller Stäbe ausgenommen diejenige eines Randstabes $P_a P_{a+1}$ gemein hat, und bestimme mit Hülfe eines Seilpolygons den Punkt Q_b des Kräfteplanes, der dem $P_a P_{a+1}$ enthaltenden Polygone (Q_b) entspricht.

Die Construction von $\mathfrak{F}'_k$ kann im Anschlusse an die Zerlegung des Fachwerks geschehen, da ja hiernach das Fachwerk aus einem Dreiecke durch Ansetzung neuer Polygone so gebildet werden kann, dass jedes neue Polygon entweder mit zwei neuen Seiten, die in einer neuen Ecke zusammenstossen, oder mit einer neuen Seite angesetzt wird, in welchem Falle zugleich eine zwei alten Polygonen gemeinsame Seite oder Diagonale fortgelassen wird. Soll eine solche neue Seite $P_a P_{a+1}$ eine gegebene Richtung erhalten, so wird man zuerst zwei verschiedenen Richtungen des fortzulassenden Stabes entsprechend je zwei Lagen der Punkte P_a und P_{a+1} nämlich P'_a, P''_a und P'_{a+1}, P''_{a+1} bestimmen; werden dann die Geraden durch P'_a und P''_a in der gegebenen Richtung von irgend zwei parallelen Geraden durch P'_{a+1} und P''_{a+1} in R' resp. R'' geschnitten, so schneidet $R' R''$ die Gerade $P'_{a+1} P''_{a+1}$ in dem gesuchten Punkte P_{a+1} , woraus sich auch P_a auf $P'_a P''_a$ ergibt.

Es braucht aber $P_a P_{a+1}$ keineswegs, wie wir es beim Beweise grösserer Uebersichtlichkeit wegen als erreichbar nachwiesen, stets durch eine Diagonale eines der Polygone ersetzbar sein. Ist das nicht der Fall, besteht also nach dem Obigen das Fachwerk aus zwei stabilen Fachwerken, die durch $P_a P_{a+1}$ und einen Eckpunkt P_c von (Q_b) mit einander verbunden sind, so bestimmt man Q_b sogar einfacher nach dem Culmann'schen Verfahren und kann dann für die beiden Theilfachwerke mit den geschlossenen Kräftepolygonen $Q_b K_{a+1} K_{a+2} \dots K_c Q_b$ und $Q_b K_{c+1} K_{c+2} \dots K_{a-1} Q_b$ jedes für sich in derselben Weise behandeln.

Man kann schliesslich, wenn die Existenz eines Kräfteplanes einmal nachgewiesen ist, das Problem seiner Construction auch direct auf die in § 2 gegebene Lösung der Fundamentalaufgabe zurückführen, ein einfaches Fachwerk zu construiren, von dem die Gliederung und die Richtungen der Stäbe gegeben sind, indem man eine Seite des Kräftepolygons und eine Stabkraft als überzählig fortlässt. Die Gliederung wird man sich zuerst nach der gegebenen Zerlegung des Fachwerks schematisch darstellen und alsdann vom Kräftepolygon ausgehend Anfangs ebenso verfahren wie oben, während man für den

Punkt Q_b zunächst zwei willkürliche Lagen Q_b' und Q_b'' auf der Parallelen durch K_a zu $P_a P_{a+1}$ annehmen wird; die wirkliche Lage von Q_b findet man dann in der Bedingung, dass zwei aus ihr folgende Punkte Q_b und Q_c in einer Geraden gegebener Richtung liegen müssen. Dieser Weg zur Construction des Kräfteplanes kommt auf die sogenannte *méthode de fausse position* von Saviotti*) hinaus; nur war es bisher nicht gelungen zu beweisen, dass er in jedem Falle zum Ziele führen muss. Welche von den beiden hier entwickelten Methoden zur Herstellung eines Kräfteplanes die kürzere ist, lässt sich bei der Mannigfaltigkeit der Fachwerke natürlich allgemein nicht entscheiden. Die erste Methode hat immerhin den Vortheil, dass sie unmittelbar an den Existenzbeweis des Kräfteplanes anknüpft und einen neuen Beweis für die Lösbarkeit des Spannungsproblems in diesem besonderen Falle liefert.

§ 5.

Herstellung vollständiger Zerlegungen durch schlichte Zerlegung des vom Fachwerke überdeckten Theiles der Ebene.

Das in Satz 15 ausgesprochene Resultat unserer Untersuchungen über Kräftepläne würde erst dann seine volle Bedeutung erhalten, wenn es uns gelänge, für jede Form des Spannungsproblems eine entsprechende vollständige Zerlegung zu finden. Diese Aufgabe ist allerdings nur unter gewissen Modificationen lösbar, die indessen die praktische Brauchbarkeit der darauf begründeten Lösung des Spannungsproblems nicht beeinträchtigen. Es ist nämlich leicht, eine solche Eigenschaft einer vollständigen Zerlegung eines einfachen, stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ in $k - 1$ einfache Polygone anzugeben, dass ihr Fehlen bei gewissen Fachwerken unmittelbar einleuchtend ist. Ist n die Anzahl der Ecken des Randpolygons, der Punkte also, in denen äussere Kräfte angreifen dürfen, enthält ferner unsere vollständige Zerlegung n_3 Dreiecke, n_4 Vierecke, $\dots$, n_i i -Ecke, so ist:

$$1. \quad n_3 + n_4 + \dots + n_i = k - 2$$

und

$$2. \quad n + 3n_3 + 4n_4 + \dots + in_i = 4k - 6.$$

Hieraus folgt:

$$n - 2 + n_5 + 2n_6 + \dots + (i-4)n_i = n_3;$$

diese Formel können wir in dem folgenden Satze aussprechen:

*) Vgl. die Anm. auf S. 144. Auch bei Petersen a. a. O. S. 165 findet sich eine in dieser Richtung liegende Andeutung. Wie weit aber Petersen von der Erkenntniss der Natur des allgemeinen Problems entfernt war, geht aus seiner Behauptung auf S. 163 hervor, dass die hier zu lösende Constructionsaufgabe „sich nicht immer mittels Zirkel und Lineal lösen lasse“.

16. Ist n die Anzahl der Ecken des Randpolygons einer vollständigen Zerlegung eines einfachen, stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ in übrigens $k - 2$ einfache Polygone, so giebt es unter diesen mindestens $n - 2$ Dreiecke*).

Nun haben wir in dem mehrfach von uns behandelten Fachwerke mit 6 Knotenpunkten ein solches kennen gelernt, welches gar keine Dreiecke enthält (s. Fig. 1), es giebt folglich sicher einfache, stabile Fachwerke, für welche die gewünschte Zerlegung nicht möglich ist. Die hiernach nothwendigen Modificationen unserer Forderung, dass ein Kräfteplan existire, werden sich durch einige weitere Folgerungen aus den obigen Gleichungen von selbst ergeben. Multiplicirt man nämlich die erste Gleichung mit 3 und subtrahirt sie von der zweiten so folgt:

$$3. \quad n_4 + 2n_5 + \dots + (i-3)n_i = k - n.$$

Hiernach erhalten wir den Satz:

17. Liegt eine vollständige Zerlegung eines einfachen stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ in ein Randpolygon und $k - 2$ weitere Polygone vor, so ist die Anzahl der inneren oder nicht am Rande gelegenen Knotenpunkte des Fachwerks gleich der Summe aus der Anzahl der Vierecke, der doppelten Anzahl der Fünfecke, der dreifachen Anzahl der Sechsecke u. s. f., die unter den $k - 2$ Polygonen vorkommen.

Besteht also eine Zerlegung vom Randpolygone abgesehen aus lauter Dreiecken, so liegen alle Knotenpunkte des Fachwerks auf dem Randpolygone, und es ist leicht zu sehen, dass man ein Fachwerk derselben Gliederung finden kann, für welches die Dreiecke die Ebene schlicht überdecken; denn betrachten wir irgend ein convexes Polygon mit k Ecken als das Randpolygon, so erhalten wir nach dem Früheren der Reihe nach alle Dreiecke durch Einziehen von Diagonalen, die zwei durch einen Eckpunkt getrennte Ecken des jedesmaligen hierbei immer convex bleibenden Randpolygons verbinden. Hierbei werden sich also niemals zwei Stäbe des Fachwerks überschneiden.

Haben wir umgekehrt ein einfaches, stabiles Fachwerk $\mathfrak{F}_k$, von dem sich niemals zwei Stäbe überschneiden, so zerlegt dasselbe offenbar den von ihm überdeckten Theil der Ebene in lauter einfache Polygone, und jeder Randstab gehört einem, jeder innere Stab zwei solchen Polygonen an. Da auch der Rand wegen der Stabilität des Fachwerks ein einfaches Polygon sein muss, so haben wir hier jedenfalls eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung des Fach-

*) Es ist dies der richtige von Grübler a. a. O. S. 5 aufgestellte Satz, während z. B. der folgende Satz auf derselben Seite nach unserer Anmerkung auf S. 169 wieder falsch ist.

werks in einfache Polygone. Dass die Anzahl dieser Polygone $k - 1$ ist, können wir folgendermassen erkennen. Wir können offenbar jedes Viereck durch eine, jedes Fünfeck durch zwei, . . . , jedes i -Eck durch $i - 3$ Diagonalen in Dreiecke zerlegen, wodurch wir ein aus lauter Dreiecken bestehendes Fachwerk mit $n_4 + 2n_5 + \dots + (i - 3)n_i$ überzähligen Stäben erhalten werden. Dieses Fachwerk kann man sich daher aus einem Dreiecke dadurch entstanden denken, dass man neue Dreiecke entweder mit zwei neuen Seiten und einer neuen Ecke oder mit einer neuen Seite ansetzt. So lange nur Ansetzungen erster Art vorkommen, tritt offenbar niemals ein Knotenpunkt ins Innere, bei einer Ansetzung der zweiten Art wird aber gerade der der neuen Seite gegenüberliegende Eckpunkt des Dreiecks vom Rande getrennt. Da nun jede solche neue Seite überzählig ist, so ist die Anzahl der inneren Knotenpunkte gleich der Anzahl der überzähligen Stäbe, es gilt also die Gleichung 3.; aus ihr folgt unter Hinzuziehung von 2. auch die Gleichung 1., die zu beweisen war. Wir erhalten daher den Satz:

18. *Wenn sich von den Stäben eines einfachen, stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ niemals zwei überkreuzen, so liefert die dadurch bedingte schlichte Eintheilung des vom Fachwerke überdeckten Theiles der Ebene unter Hinzunahme des Randpolygons zugleich eine vollständige Zerlegung des Fachwerks in $k - 1$ einfache Polygone*).*

Dieser Satz gewinnt dadurch eine besondere Bedeutung, dass er sich auch umkehren lässt und zwar in folgender allgemeinerer Form:

19. *Gelingt es, für ein Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ mit k Knotenpunkten und s Stäben eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in*

$$p = s - k + 2$$

einfache Polygone zu finden, so kann man auf mehrfache Weise ein dem gegebenen Fachwerke gleich gegliedertes construiren, von dem sich niemals zwei Stäbe überschneiden; die schlichte Zerlegung des von diesem Fachwerke überdeckten Theiles der Ebene entspricht dann unter Hinzunahme des Randpolygons der Zerlegung des gegebenen Fachwerkes.

Wir erinnern da zuerst an unsre auf eine eben solche Zerlegung bezüglichen Betrachtungen auf S. 174 und 175. Auf Grund derselben können wir nämlich zeigen, dass jedes Polygon $P_1 P_2 \dots P_i$ der Zerlegung mit mehr als drei Ecken mindestens eine Diagonale besitzen muss, die nicht zugleich ein Stab des Fachwerks ist. Sei nämlich $P_a P_b$ eine Diagonale, die zugleich Stab ist und $P_b P_c$ die auf $P_a P_b$ folgende Seite eines $P_a P_b$ enthaltenden Polygons der Zerlegung, so

*) Vergl. Petersen a. a. O. S. 161. Was die Umkehrung des Satzes, also Satz 19 betrifft, so finden sich auch darauf hieselnde Bemerkungen bei Petersen; wir können derselben aber keinerlei Beweiskraft zuerkennen.

schneiden wir von diesem zunächst durch Einführung des idealen Knotenpunktes P'_c auf $P_b P_c$ das Dreieck $P_a P_b P'_c$ ab, wodurch die Zahl der Knotenpunkte und Polygone um je eins und die Zahl der Stäbe um zwei vermehrt wird, sodass die Bedingungen des Satzes erhalten bleiben. Falls dann $P_b P_c$ zuerst keine Seite des ersten Polygons ist und in dem zu P_a gehörigen Cyklus bei der Reihenfolge von $P_{a-1} P_a$ nach $P_a P_{a+1}$ etwa $P_a P'_c$ auf $P_a P_b$ folgt und nicht umgekehrt, so ersetzen wir die beiden Polygone $P_1 P_2 \dots P_i$ und $P_a P_b P'_c$ durch $P_a P_b P_{b+1} \dots P_{a-1}$ und $P_a P_{a+1} \dots P_{b-1} P_b P'_c$, sodass für unser Fachwerk jedenfalls wieder eine vollständige Zerlegung in $p + 1 = s + 2 - (k + 1) + 2$ einfache Polygone vorliegt; bei umgekehrter Reihenfolge wären $P_a P_b P_{b-1} \dots P_{a+1}$ und $P_a P_{a-1} \dots P_{b+1} P_b P'_c$ die beiden Polygone. Diese Zerlegung kann aber nicht zusammenhängend sein, weil wir jetzt in P_a zwei Cyklen erhalten, und zwar müssen gerade die beiden Polygone verschiedenen Complexen angehören. Nun können aber verschiedene Complexe ausser P_a und P_b keinen Knotenpunkt gemein haben, weil in keinem andern Knotenpunkte der Cyklus durch obige Veränderung getheilt wird, es wird folglich durch unsere Zerlegung das Fachwerk in zwei Fachwerke zerlegt, welche nur die Knotenpunkte P_a und P_b gemein haben. Gehören den beiden Fachwerken die Zahlen k_1, s_1, p_1 und k_2, s_2, p_2 zu, so muss ja sein $k_1 + k_2 = k + 1 + 2$, $s_1 + s_2 = s + 2$, $p_1 + p_2 = p + 1$, es ist folglich nach Satz 12 auch $p_1 = s_1 - k_1 + 2$ und $p_2 = s_2 - k_2 + 2$. Ausserdem aber sehen wir, dass keine der Diagonalen, welche einen der Punkte $P_a P_b P_{b+1} \dots P_{a-1}$ mit einem der Punkte $P_a P_{a+1} \dots P_{b-1} P_b$ verbindet, ein Stab des gegebenen Fachwerks sein kann. Eine entsprechende Theilung des Fachwerks erhalten wir in dem Falle, dass zweitens P_c etwa nach P_{b-1} fällt, wenn wir den Stab $P_b P'_c$ fortlassen und die beiden oben genannten Polygone durch $P_a P_{a+1} \dots P_{b-1} P'_c$ und $P_a P_b P_{b+1} \dots P_{a-1}$ ersetzen; die beiden Theile haben dann nur den Knotenpunkt P_a gemeinsam. Unse Behauptung ist folglich bewiesen, und wir werden nun den idealen Hilfsknotenpunkt P'_c , der unsern Beweis nur übersichtlicher machen sollte, wieder fortlassen können. Durch Einziehung einer Diagonale, welche nicht zugleich Stab des Fachwerks ist, in ein Polygon der Zerlegung werden die Anzahlen der Stäbe und Polygone um je eins vermehrt, sodass die Bedingungen unseres Satzes erhalten bleiben.

Wir werden also, indem wir immer neue Diagonalen dieser Art einziehen, unser Fachwerk in ein solches verwandeln können, welches, etwa von einem Polygone abgesehen, das wir als Randpolygon auszeichnen, aus lauter Dreiecken besteht. Wir brauchen desshalb unseren Satz nur für ein Fachwerk mit k Knotenpunkten und s Stäben zu beweisen, für das eine vollständige Zerlegung in $s - k + 1$ Dreiecke

und ein Randpolygon vorliegt, das beliebig viel Ecken haben kann. Wir wissen ja, dass dann ein Dreieck mit dem Randpolygone nur dann zwei Seiten gemein haben kann, wenn diese in einem zweiständigen Knotenpunkte zusammenstossen. Ferner können wir in derselben Weise wie oben beweisen, dass, wenn die Seite $P_a P_b$ des Dreiecks $P_a P_b P_c$ Diagonale des Randpolygons $P_1 P_2 \dots P_a P_{a+1} \dots P_b P_{b+1} \dots P_i$ ist, die sich beiderseits an $P_a P_b$ ansetzenden Theile des Fachwerks ausser P_a und P_b keinen Knotenpunkt gemeinsam haben, und dass diese Theile die Eigenschaften des gegebenen Fachwerks behalten.

Hiernach können wir unsern Satz folgendermassen beweisen. Wir wählen als Randpolygon irgend ein convexes Polygon mit der entsprechenden Anzahl von Ecken; ein solches wird ja durch jede Diagonale wieder in zwei convexe Polygone zerlegt. Nun ziehen wir zuerst alle Diagonalen, welche den Stäben des gegebenen Fachwerks entsprechend die Dreiecke mit zweiständigen Randknotenpunkten abtrennen, und wiederholen das für die neu entstehenden Randpolygone so oft, als das möglich ist. Dann theilen wir weiter das Fachwerk durch Dreiecksseiten, welche Diagonalen anderer Art sind, in je zwei Fachwerke derselben Art; das ist erlaubt, weil nach dem Obigen niemals ein Stab von einem Punkte des einen Theiles in einen Punkt des andern Theiles laufen darf. Sind auch solche Abtheilungen nicht mehr möglich, so fassen wir die Dreiecke ins Auge, die um einen Randknotenpunkt des neuen Fachwerks gelagert sind. Dann brauchen wir die andern Eckpunkte dieser Dreiecke nur auf einem nach aussen convexen Curvenzuge von P_{a-1} nach P_{a+1} ihrer Reihenfolge im Cyklus entsprechend anzunehmen, um wieder ein convexes Polygon zu erhalten. Es ist klar, dass wir durch Wiederholung dieser drei Arten von Abtrennungen schliesslich immer auf ein Dreieck kommen müssen, wir werden also zu einem Fachwerk kommen, dass aus lauter schlicht neben einander gelagerten Dreiecken besteht. Lassen wir dann die Dreiecksseiten fort, welche den in die ursprünglichen Polygone eingezogenen Diagonalen entsprechen, so haben wir unsern Satz 19 bewiesen. Hierbei konnten wir natürlich jedes der ursprünglichen Polygone als Randpolygon wählen.

Im Besitze unseres Satzes werden wir auf folgende Regel geführt, um zu entscheiden, ob ein gegebenes Spannungsproblem durch einen Kräfteplan lösbar sei oder nicht. Wir werden zuerst versuchen, ein einfaches Polygon zu finden, dessen Ecken alle Knotenpunkte des Fachwerks umfassen, in denen äussere Kräfte angreifen, das wir also als das Randpolygon betrachten werden. Dann werden wir ein dem gegebenen Fachwerke gleich gegliedertes schematisch hinzuzuzeichnen versuchen, dessen convexer Rand jenem Randpolygone entspricht und dessen Stäbe sich niemals überschneiden. Dann und nur dann, wenn

diese Aufgabe lösbar ist, werden die Spannungen durch einen Kräfteplan gefunden werden können. Man sieht, dass es sich leicht entscheiden lassen wird, ob Ueberschneidungspunkte gewisser Stäbe zu vermeiden sind oder nicht.

In letzterem Falle kann man aber jeden Punkt J_a , in dem sich zwei Stäbe des Fachwerkes überschneiden, als einen sogenannten *idealen Knotenpunkt**) mit vier Stäben ansehen und zwar als einen idealen insofern, als die vier Stäbe nicht um J_a drehbar an einander befestigt sind. Thatsächlich ist das aber für das Spannungsproblem nicht von Belang, so lange die vier Stäbe ihre zweimal zwei gleichen Richtungen beibehalten, und in J_a keine äussere Kraft angreift; denn dann kann in J_a Gleichgewicht nur zu Stande kommen, wenn in den beiden Theilen jedes der beiden durchschnittenen Stäbe gleiche Spannungen herrschen, was sich auch darin ausspricht, dass dem Punkte J_a im Kräfteplane ein Parallelogramm entsprechen muss. Zugleich sieht man, dass sich die Anzahl der Knotenpunkte je um 1 und die der Stäbe je um 2 vermehrt, sodass das neue Fachwerk nicht nur stabil, sondern auch einfach bleibt. Dieses neue Fachwerk wird nun allerdings einen Kräfteplan liefern, in dem einigen Stäben des ursprünglichen Fachwerkes mehrere gleiche Stäbe des Kräfteplanes entsprechen, aber diese geringe Vermehrung der Linien wird vollständig dadurch aufgewogen, dass wir ein allgemeines Princip haben, um das Spannungsproblem für jedes einfache und stabile Fachwerk in übersichtlicher Weise mit Hilfe eines Kräfteplanes zu lösen.

Dies ist allerdings insofern noch nicht vollständig dargethan als es keineswegs immer möglich ist, ein einfaches Polygon**) zu finden, das alle Angriffspunkte der äusseren Kräfte enthält; das erhellt aus dem einfachen Beispiele Fig. 7, wenn in allen sechs Knotenpunkten dieses Fachwerkes äussere Kräfte angreifen sollen. Da bietet sich aber der einfache Ausweg dar, dass wir von dem erweiterten Fachwerke ausgehen und das Seilpolygon, das irgend einer Reihenfolge der äusseren Kräfte entspricht, als das Randpolygon betrachten. Wir werden also in ein diesem Seilpolygone entsprechendes convexes Polygon die Knotenpunkte eines dem gegebenen Fachwerke gleich gegliederten Fachwerkes so einzuzichnen suchen, dass die Stäbe und die Angriffslinien der äusseren Kräfte sich möglichst selten überschneiden. Wenn wir dann die diesen Schnittpunkten im gegebenen Fachwerke entsprechenden Schnittpunkte

Fig. 7.

*) S. I. c. Appendice par Saviotti p. 63.

**) Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung der sogenannten Hamilton'schen Rundreise-Aufgabe; man vergl. Schubert, Zwölf Geduldspiele, S. 143, Berlin 1895.

als ideale Knotenpunkte einführen, so müssen wir nur darauf achten, dass, falls ein idealer Knotenpunkt J_a in die Verlängerung des Stabes $P_b P_c$ fällt, dieser Stab als durch die beiden Stäbe $J_a P_b$ und $J_a P_c$ ersetzt zu denken ist. Die schlichte Zerlegung des schematischen Fachwerks giebt dann eine vollständige Zerlegung des um einige ideale Knotenpunkte und Stäbe erweiterten ursprünglichen Fachwerks in so viel einfache Polygone, als zur Construction eines Kräfteplanes nothwendig und hinreichend sind.

Was die in die Angriffslinien der äusseren Kräfte fallenden idealen Knotenpunkte und Stäbe betrifft, so können wir dieselben wie alle idealen Knotenpunkte auch unmittelbar am gegebenen Fachwerke einführen. Wir führen nämlich zuerst alle Ueberschneidungspunkte von Stäben als ideale Knotenpunkte ein. Fällt dann ein Angriffspunkt P_a einer äusseren Kraft k_a ins Innere des vom Fachwerke überdeckten Theiles der Ebene, so betrachten wir die Schnittpunkte der einen Hälfte g_a der Angriffslinie von k_a mit den Stäben des Fachwerks als ideale Knotenpunkte, die im Inneren verlaufenden Theile von g_a zwischen P_a und diesen Knotenpunkten als ideale Stäbe und denken uns die Kraft k_a als in dem am Rande gelegenen idealen Knotenpunkte angreifend. Jeder der obigen Schnittpunkte vermehrt in der That die Anzahl der Knotenpunkte um je eins und die Anzahl der Stäbe um je zwei, und auch das Spannungsproblem wird durch unsre Festsetzungen nicht geändert. In dem Randpunkte kann nämlich das Gleichgewicht nur dadurch zu Stande kommen, dass erstens die äussere Kraft der Spannung das Gleichgewicht hält, die in dem auf g_a liegenden Stabe wirkt, und zweitens die Spannungen in dem durchschnittenen Stabe sich das Gleichgewicht halten. Analoges gilt der Reihe nach für die benachbarten idealen Knotenpunkte, sodass die in P_a zusammenlaufenden Spannungen in den wirklichen Stäben einer Spannung in dem idealen Stabe das Gleichgewicht halten, welche der gegebenen äusseren Kraft gleich ist.

Wenn auch die letzte Methode zur Herstellung einer geeigneten vollständigen Zerlegung für die Praxis wohl meist die bessere sein wird, weil sie am gegebenen Fachwerk selbst operirt, so dürfen wir doch das bei der ersten Methode zur Geltung kommende Princip, die Zerlegung mit Hülfe eines gleich gegliederten schematischen Fachwerks zu finden, schon deshalb nicht ausser Acht lassen, weil wir sonst Schwierigkeiten finden würden, falls *sich in einem idealen Knotenpunkte mehr als zwei Stäbe überschneiden, oder ein Stab $P_a P_b$ über einen Knotenpunkt P_c läuft, oder die eine Seite der Angriffslinie einer im Inneren angreifenden Kraft noch durch wirkliche oder ideale Knotenpunkte läuft*. Denn in allen diesen Fällen enthielte das gegebene Fachwerk bei unmittelbar an das gegebene Fachwerk anknüpfender

Einführung der idealen Knotenpunkte oder Stäbe überzählige Stäbe und das Spannungsproblem würde unbestimmt, insofern in solchen Punkten auch auf andere Weise Gleichgewicht zu Stande kommen könnte, als es dem ursprünglichen Spannungsprobleme entspricht. Bestimmen wir hingegen die Zerlegung mit Hülfe eines gleich gegliederten schematischen Fachwerks, das von dem gegebenen beliebig wenig abweicht, so verschwinden alle Schwierigkeiten. Hierbei haben wir z. B. einen Punkt J , in dem sich die drei Stäbe P_1P_4 , P_2P_5 und P_3P_6 schneiden (s. Fig. 8) als die Grenze eines Dreiecks $(Q) = J_1J_2J_3$

Fig. 8.

nach dem Schema des eingezeichneten Fachwerks zu betrachten, das sich von dem gegebenen nur in der Richtung des Stabes P_3P_4 unterscheidet. Wir können es zugleich benutzen, um mit Hülfe eines

Seilpolygons den Punkt Q_4 und daraus nach dem simplen Prozesse der Zerlegung alle weiteren Punkte des Kräfteplanes zu finden. Man sieht nun, wie durch Einführung des dem Punktdreiecke entsprechenden Punktes Q in den Kräfteplan in Evidenz gesetzt wird, dass die gegenüberliegenden parallelen Seiten des Sechsecks $Q_1 Q_2 \dots Q_6$ auch einander gleich sind, was z. B. für das Kräftepolygon, dessen gegenüberliegende Seiten wir ebenfalls parallel zu den Diagonalen des Fachwerks angenommen haben, nicht gilt. Nach Analogie dieses Beispiels können alle übrigen hier in Betracht kommenden Fälle behandelt werden.

Wir können daher das Resultat aussprechen:

20. Für jedes einfache, stabile Fachwerk lässt sich jedes Spannungsproblem mit Hilfe eines Kräfteplanes lösen, wenn das Fachwerk zuvor durch Einführung gewisser idealer Stäbe und Knotenpunkte erweitert ist.

Fig. 9.

Ein lehrreiches und zugleich einfaches Beispiel liefert uns das aus zwei Dreiecken und den drei je zwei Ecken derselben verbindenden Stäben

bestehende Fachwerk. Wirken hier nur in zweimal zwei entsprechenden Ecken äussere Kräfte, so kann ein Kräfteplan ohne Einführung idealer Knotenpunkte oder Stäbe construirt werden, wie das besonders aus der schematischen Figur einleuchtend ist (s. Fig. 9). Das ist jedoch nach Satz 16 nicht möglich, wenn in allen 6 Ecken äussere Kräfte angreifen sollen. Dann wird man je nach Bequemlichkeit entweder die zwei Schnittpunkte eines Verbindungsstabes mit zwei entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke als ideale Knotenpunkte einführen, oder nur einen solchen Schnittpunkt und den Schnittpunkt einer Kraft mit einem Stabe (s. Fig. 10) oder zwei Schnittpunkte der letzten Art. Die Construction des Kräfteplanes geschah in beiden Fällen nach dem auf S. 179—180 geschilderten Verfahren, obwohl man hier natürlich nach dem Culmann'schen Verfahren schneller zum Ziele gekommen wäre.

Um den praktischen Vorthail, den ein von der schlichten Zerlegung des Fachwerkes aus construirter Kräfteplan bietet, ganz zu verstehen, müssen wir auch auf die in unseren Figuren angewendete *Bezeichnung* mit ein paar Worten eingehen. Man wird nämlich zuerst in jedes Polygon des Fachwerks den Buchstaben (Q_b) setzen, welcher dem entsprechenden Punkte Q_b des Kräfteplanes zukommt, ebenso an die Aussenseite jedes Randstabes $P_a P_{a+1}$ den Buchstaben (K_a) als dem gemeinsamen Eckpunkte K_a der beiden Seiten des Kräftepolygons entsprechend, welche die in P_a und P_{a+1} angreifenden Kräfte darstellen*). Dann ist im Kräfteplane unmittelbar die Strecke abzulesen, welche die in einem Stabe herrschende Spannung darstellt. Was den Sinn dieser Spannung betrifft, so gehört zunächst jedem Randknotenpunkte P_a ein Drehungssinn zu, welcher dem Sinne entgegengesetzt ist, in welchem das Randpolygon dem Kräftepolygone entsprechend zu durchlaufen ist. Hiernach erhält man den Sinn einer von P_a ausgehenden Spannkraft, wenn man ihre Endpunkte in der Reihenfolge verbindet, welche die entsprechenden Polygone des Fachwerks jenem Drehungssinne entsprechend haben. Derselbe Drehungssinn gehört dann auch den inneren Knotenpunkten mit derselben Bedeutung zu, wie aus der Betrachtung der beiden an jeden inneren Stab anstossenden Polygone in Rücksicht auf die beiden Endpunkte des Stabes hervorgeht. Hiernach ist ausserordentlich leicht zu entscheiden, ob in einem Stabe Druck oder Zug herrscht.

---

*) Man vergl. hierzu eine Bemerkung von Maxwell, Scientific papers ed. Niven, Vol. II, p. 492, wo M. diese Art der Bezeichnung Bow zuschreibt. Der Verf. ist hierauf durch die Güte des Herrn A. Föppl hingewiesen worden.

Fig. 10.

§ 6.

Verknüpfung der reciproken Figuren, des Fachwerks und des zugehörigen Kräfteplanes, durch ein Nullsystem.

Die reciproke Beziehung, welche zwischen den Figuren des Fachwerks und denen eines zugehörigen Kräfteplanes besteht, lässt sich nach Cremona *) als Ausfluss derjenigen reciproken Beziehung des Raumes ansehen, die durch ein sogenanntes Nullsystem definirt wird. Bekanntlich kann man ein beliebiges System von Kräften im Raume, falls dieselben keine Einzelresultante oder ein resultirendes Kräftepaar besitzen, auf mannigfaltige Weise auf in zu einander windschiefen Angriffslinien wirkende Kräfte reduciren. Die eine dieser Angriffslinien kann beliebig angenommen werden, dann sind dadurch die conjugirte der Lage und beide der Grösse und dem Sinne nach vollständig bestimmt. Beschreibt die eine Angriffslinie ein Strahlenbündel um einen festen Nullpunkt, so beschreibt die conjugirte Angriffslinie ein ebenes Geradenfeld in der den Nullpunkt enthaltenden Nullebene und umgekehrt. Die durch den Nullpunkt gehenden und in der Nullebene liegenden Geraden heissen Nulllinien, weil das gegebene Kräftesystem in Beziehung auf sie als Axen das Drehungsmoment Null hat; diese Nulllinien sind sich selbst conjugirt, und es kann desshalb in sie niemals die Angriffslinie eines das Kräftesystem ersetzenden Paares verlegt werden. Die beiden in conjugirten Angriffslinien wirkenden Kräfte haben in denselben Angriffspunkt verlegt stets dieselbe Resultante, welche der Axe des Nullsystems parallel ist und durch den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene geht; hieraus geht hervor, dass conjugirte Geraden in der Richtung dieser Axe stets durch parallele Ebenen projecirt werden. Haben wir daher zwei in Beziehung auf ein Nullsystem reciproke Polyeder, sodass also den durch einen Eckpunkt laufenden Kanten des einen die ein ebenes Polygon begrenzenden Kanten des andern conjugirt sind, so werden die Eckpunkte und Kanten dieser beiden Polyeder in der Richtung der Axe des Nullsystems auf irgend eine Ebene in die Knotenpunkte und Stäbe zweier Fachwerke projecirt, welche in derselben Beziehung zu einander stehen wie die in § 4 betrachteten Figuren des erweiterten Fachwerks und des erweiterten Kräfteplans. Da entsteht also die Frage, ob man umgekehrt diese beiden Figuren stets als solche Projectionen zweier in Beziehung auf ein Nullsystem reciproker Polyeder wird auffassen können. Es ist leicht, diese Frage zu bejahen.

---

*) Vergl. die in der Einleitung S. 143 citirte Schrift, wo man sich auch über das Nullsystem informiren kann. Man vergl. auch die auf S. 144 ang. Schrift des Verfassers.

Nehmen wir etwa an, dass die Axe des im Uebrigen beliebigen Nullsystems senkrecht zur Zeichenebene der als gegeben gedachten Figuren des erweiterten Fachwerks und des erweiterten Kräfteplanes stehe, so sind jedenfalls die Richtungen von je zwei conjugirten Geraden $\bar{g}$ und $\bar{k}$ bekannt, deren Projectionen je zwei reciproke Geraden g und k obiger Figuren sind, durch die unendlich fernen Nullpunkte nämlich der in k resp. g auf der Zeichenebene senkrechten Ebenen. Wird daher etwa über einem Punkte P_a des Fachwerks der Raumpunkt $\bar{P}_a$ in einer Senkrechten zur Zeichenebene, aber sonst ganz beliebig angenommen, so wären damit jedenfalls beide Polyeder bestimmt, falls die Construction nicht zu Widersprüchen führt. Sind aber $P_{a_1}, P_{a_2}, \dots, P_{a_i}$ die Eckpunkte eines Polygons (Q_a), dem im Kräfteplane der Punkt Q_a entspricht, so ist leicht zu sehen, dass die aus $\bar{P}_{a_1}$ der Reihe nach abgeleiteten Punkte $\bar{P}_{a_2}, \dots, \bar{P}_{a_i}$ in einer Ebene liegen, und dass die Gerade durch $\bar{P}_{a_i}$ und den Nullpunkt der zu $P_{a_i}P_{a_1}$ parallelen Verticalebene durch Q_a wieder durch $\bar{P}_{a_1}$ läuft. Denn schneidet die conjugirte Gerade zu $\bar{P}_{a_1}\bar{P}_{a_2}$ die Verticale durch Q_a in $\bar{Q}_a$, so ist die Nullebene von $\bar{Q}_a$ diese Ebene, weil sie die Nullpunkte aller Verticalebenen durch Q_a enthalten muss. Construirt man also die zu den Knotenpunkten des Fachwerks gehörigen Raumpunkte von dem Punkte $\bar{P}_a$ aus so, dass man jedesmal innerhalb eines Polygons der Zerlegung bleibt, so ist klar, dass unsre Construction zu keinem Widerspruche führen kann; wegen der Richtungen der Kanten dieses Polyeders ist dann die Projection des reciproken Polyeders der gegebene erweiterte Kräfteplan. Wir erhalten also das Resultat:

21. *Die aus einem einfachen, stabilen Fachwerke, den Angriffslinien der äusseren Kräfte und einem zugehörigen Seilpolygone bestehende Figur einerseits und ein entsprechender Kräfteplan andererseits lassen sich stets als Parallelprojectionen zweier in Beziehung auf ein Nullsystem reciproker Polyeder auffassen, wenn die Projectionsrichtung die Axe des Nullsystems ist.*

Wir haben hier eine Construction der beiden Polyeder entwickelt, welche auf der Kenntniss des Kräfteplanes beruht. Es wird aber nicht ohne Interesse sein, zu sehen, wie sich die zur Herstellung des Kräfteplanes dienenden Constructionen für eine directe Construction des ersten Polyeders verwerthen lassen. Wir können etwa zuerst den Raumpunkt $\bar{C}$ über dem Pole C des Seilpolygons annehmen, dessen Nullebene ($\bar{C}$) schneidet dann auf den Verticalen durch die Ecken des Seilpolygons die Ecken $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ des Raumpolygons aus, dessen Projection das Seilpolygon ist; die den Seiten dieses Polygons conjugirten Geraden schneiden weiter auf den Verticalen durch die

Ecken des Kräftepolygons die Ecken $\bar{K}_0, \bar{K}_1, \dots, \bar{K}_{n-1}$ des Raumpolygons aus, dessen Projection das Kräftepolygon ist, und die den Seiten dieses Polygons conjugirten Geraden endlich auf den Verticalen durch die Randknotenpunkte des Fachwerks die Raumpunkte $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$, deren Projectionen diese Randknotenpunkte sind. Ist dann P_a ein zweistabiger Knotenpunkt des Randes, so kennt man sofort die Ebene $\bar{P}_{a-1} \bar{P}_a \bar{P}_{a+1}$ des Polygons $(\bar{Q}_b)$, dessen Projection das P_a enthaltende Polygon (Q_b) ist. Da also dieser Fall keine Schwierigkeiten macht, so nehmen wir an, (Q_b) enthalte nur den Randstab $P_a P_{a+1}$, und construiren das mit dem gegebenen Fachwerke $\mathfrak{F}_k$ gleich gegliederte Fachwerk $\mathfrak{F}'_k$, das sich von jenem nur in der Richtung von $P'_a P'_{a+1}$ unterscheidet. Nun wissen wir, dass die den Seiten des Kräftepolygons $K_0 K_1 \dots K_{a-1} Q_b K_{a+1} \dots K_{n-1} K_0$ gleichen und gleich gerichteten Kräfte sowohl in den Angriffspunkten $P_1 P_2 \dots P_n$ als auch in den Angriffspunkten $P'_1 P'_2 \dots P'_n$ angebracht im Gleichgewichte sind. Da sich weiter das dem Pole C zu diesem Kräftepolygone für das erste Fachwerk zugehörige Seilpolygon nur in den Ecken S_a und S_{a+1} von dem obigen zu unterscheiden braucht und stets $\bar{P}_c \bar{P}_{c+1}$ durch den unendlich fernen Nullpunkt der zu $P_c P_{c+1}$ parallelen Verticalebene durch K_c läuft, so erhalten wir für dies zweite Kräftepolygon, wenn wir von demselben Punkte $\bar{C}$ ausgehen, jedenfalls dasselbe dem Randpolygon entsprechende Raumpolygon. Aus dem letzten Grunde ergibt sich auch für das dem Randpolygone von $\mathfrak{F}'_k$ entsprechende Raumpolygon, das von $\bar{P}'_a \bar{P}'_{a+1}$ abgesehen stets $\bar{P}'_c \bar{P}'_{c+1} \parallel \bar{P}_c \bar{P}_{c+1}$. Da endlich die einander parallelen Nullebenen von $\bar{Q}_b$ und $\bar{Q}'_b$ durch $\bar{P}_a \bar{P}_{a+1}$ resp. $\bar{P}'_a \bar{P}'_{a+1}$ gehen müssen, so ist die Ebene von $(\bar{Q}_b)$ durch $\bar{P}_a \bar{P}_{a+1}$ und die Richtung von $\bar{P}'_a \bar{P}'_{a+1}$ bestimmt. Hiernach erhalten wir folgende Regel zur Construction der durch $\bar{P}_a \bar{P}_{a+1}$ gehenden Ebene von $(\bar{Q}_b)$: Man ziehe durch einen über P'_{a+1} beliebig angenommenen Punkt $\bar{P}'_{a+1}$ die Parallele zu $\bar{P}_{a+1} \bar{P}_{a+2}$, bis sie die Verticale durch P'_{a+2} in $\bar{P}'_{a+2}$ schneidet, durch $\bar{P}'_{a+2}$ die Parallele zu $\bar{P}_{a+2} \bar{P}_{a+3}$, bis sie die Verticale durch P'_{a+3} in $\bar{P}'_{a+3}$ schneidet, u. s. f. bis man den Punkt $\bar{P}'_a$ über P'_a erhält; alsdann ist die Ebene von $(\bar{Q}_b)$ parallel zu $\bar{P}'_a \bar{P}'_{a+1}$. Auf diesem Wege wird man also, sobald einmal das dem Randpolygone entsprechende Raumpolygon, das natürlich sowohl vom Kräftepolygone als vom Nullsysteme abhängt, gefunden ist, das Polyeder, dessen Projection das gegebene Fachwerk ist, durch blosses Ziehen von Parallelen in zwei Tafeln construiren können; die Projection des reciproken Polyeders giebt dann den Kräfteplan. Ist dieser nicht seiner Lage nach gegeben, so können wir etwa die Punkte $\bar{P}_1, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ auf ihren Verticalen

willkürlich annehmen, damit ist die Ebene $(\overline{C})$, folglich alle übrigen Punkte $\overline{S}_n$ bekannt, dann liegt $\overline{P}_2$ in der Ebene $\overline{P}_1\overline{S}_1\overline{S}_2$, $\overline{P}_3$ in der Ebene $\overline{P}_2\overline{S}_2\overline{S}_3$ u. s. f. Damit nun aber auch $\overline{P}_1$ in der Ebene $\overline{P}_n\overline{S}_n\overline{S}_1$ liege, muss eben S_n , nachdem $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ auf ihren Angriffslinien willkürlich (vergl. S. 168) angenommen sind, die Seilpolygonbedingung befriedigen, die hier folgendermassen zum Ausdruck kommt. Da sich die Ebenen $\overline{P}_1\overline{P}_n\overline{S}_1$ und $\overline{P}_{n-1}\overline{P}_n\overline{S}_{n-2}$ in der Verticalebene über der Angriffslinie durch P_n schneiden müssen, so ist diese Schnittgerade als Verbindungslinie der Schnittpunkte dieser Verticalebene mit $\overline{P}_1\overline{S}_1$ und $\overline{P}_{n-1}\overline{S}_{n-1}$ gegeben, sie bestimmt $\overline{S}_n$ in der Ebene $(\overline{C})$ und damit auch S_n . Den ∞^4 verschiedenen Polyedern entsprechen natürlich nur ∞^3 sich durch Grösse und Lage unterscheidende Kräftepläne, da den Polyedern, die durch Parallelverschiebung aus einander entstehen, derselbe Kräfteplan entspricht. Halten wir $(\overline{C})$ fest und bewegen $\overline{P}_1$ auf seiner Verticalen, so behalten ja die Seilstrahlen ihre Lage bei, sodass der Kräfteplan bei fester Lage ähnliche Transformationen erleidet; geeignete Veränderungen von $(\overline{C})$ liefern dann auch die Parallelverschiebungen des Kräfteplanes.

Da unser Polyeder $k + n$ Ecken, $k + n - 1$ Flächen und $2(k + n) - 3$ Kanten besitzt, so ist es offenbar ein gewöhnliches Euler'sches Polyeder. Es werden aber auch Polyeder höherer Art*) reciproke Figuren ergeben, die für gewisse Fachwerke die Lösung des Spannungsproblems in Evidenz setzen, diese Fachwerke können aber nicht stabil und zugleich einfach sein, wir haben deshalb keine Veranlassung auf diese Frage hier einzugehen.

Aachen, im März 1896.

---

*) Man vergl. z. B. Möbius, ges. Werke, II, S. 551, Leipzig 1886.