Über das in der kinematischen Geometrie auftretende Nullsystem.

Von

EUGEN MEYER in Charlottenburg.

Wird ein räumliches System durch eine Bewegungstransformation, die nicht eine Translation oder eine Rotation um eine Achse ist, in sich übergeführt, so ist, wenn dadurch der Punkt A nach A' kommt, der Mittelpunkt der Verschiebungssehne AA' der durch ihn gehenden Normalenebene von AA' nach Chasles bekanntlich in einem linearen Nullsystem zugeordnet. Vom Standpunkt der Kinematik läßt dieser Satz nichts zu wünschen übrig, von demjenigen der projektiven Geometrie aber betrachtet, ist die Frage nach seiner Tragweite offen geblieben.

Da jede der genannten Transformationen sich durch eine Schraubebewegung um eine bestimmte Grade, die Hauptachse des Nullsystems, bewirken läßt, so gehört sie zu denjenigen besonderen Kollineationen, für die zwei reelle Eckpunkte des Haupttetraeders zusammenfallen. Es läßt sich daher jener kinematische Satz in folgender von metrischen Begriffen freien Fassung aussprechen:

Es sei K eine eigentliche Kollineation, die die unendlich ferne Ebene ε_∞ und in ihr den imaginären Kugelkreis in sich überführt und außerdem einen einzigen reellen Punkt dieser Ebene, aber keinen im Endlichen gelegenen Punkt ungeändert läßt. Sie führe den beliebigen Punkt A in A' über, AA' schneide ε_∞ in A_∞ ; A_1 werde von A_∞ durch A und A' harmonisch getrennt und a sei die Polare von A_∞ in bezug auf jenen Kugelkreis. Dann sind A_1 und die Ebene $(A_1 a)$ in einem linearen Nullsystem einander zugeordnet.

Nun läßt dieser Satz offenbar eine Verallgemeinerung insofern zu, als für ε_∞ eine beliebige im Endlichen gelegene Ebene ε und an Stelle des imaginären Kugelkreises ein beliebiger in ε liegender, nicht zerfallender Kegelschnitt $k^{(2)}$ eingeführt werden kann. Aber neben dieser einen Beschränkung, die sich auf „das Absolute“ bezieht, enthält der Satz noch folgende anderen:

1) die Punktgruppe $(AA'A_1A_\infty)$ soll zu jeder aus einem beliebigen anderen Punkt P sich ergebenden nicht nur projektiv, sondern diese Gruppen sollen harmonisch sein,

2) die Kollineation K gehört zu denjenigen, für die von den vier sich selbst entsprechenden Punkten zwei zusammenfallen,

3) von den drei sich selbst entsprechenden Punkten der Kollineation K in der Ebene ε_∞ liegen zwei auf $\mathfrak{f}^{(2)}$ und ihre Verbindungslinien mit dem dritten sind Tangenten von $\mathfrak{f}^{(2)}$; in diesen dritten Punkt sind zwei Ecken des Haupttetraeders von K zusammengefallen,*)

4) die Kollineation K gehört zu denjenigen, die den Kegelschnitt $\mathfrak{f}^{(2)}$ in sich überführen, für welchen A_∞ und A konjugiert sind.

Für die eigentlichen Kollineationen, die hier allein in Betracht kommen, ist die Bedingung 3) in 4) enthalten.

Zweck der nachfolgenden Überlegungen ist der Nachweis, daß von diesen Beschränkungen für das Auftreten eines linearen Nullsystems die zweite und dritte tatsächlich notwendig sind, die vierte jedoch nicht erfüllt zu sein braucht; daß ferner das Doppelverhältnis $(AA'A_1A_\infty)$ einen durch K und $\mathfrak{f}^{(2)}$ eindeutig bestimmten Wert haben muß, der gleich (-1) ist, wenn der Bedingung 4) genügt wird.

Wir nehmen das Ergebnis unserer Überlegungen voraus:

Es sei eine Kollineation K gegeben, die vier, aber nicht mehr als vier verschiedene, nicht in derselben Ebene liegende Punkte, von denen zwei imaginär sein können, also auch eine reelle Ebene ε in sich überführt, ferner in dieser ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{f}^{(2)}$ und außerdem eine konstante Zahl $k \geq 1$. Man stellt eine Nullkorrelation in folgender Weise her. Zwei in K entsprechende Punkte A und A' werden verbunden, zu ihrem Schnittpunkt mit der Ebene ε , $A_{1\varepsilon}$, die Polare in bezug auf $\mathfrak{f}^{(2)}$, a , konstruiert, A_1 auf AA' so bestimmt, daß $(A_{1\varepsilon}A_1AA') = k$ ist, und dann dem als Element eines Raumsystems Σ betrachteten Punkt A_1 die Ebene (A_1a) als Element des Raumsystems Σ_1 zugeordnet. Die so erhaltene Nullkorrelation N ist ein-eindeutig und quadratisch; einem Punkte, einer Punktreihe 1. O., einem Punktfelde von Σ entspricht im allgemeinen eine Ebene, ein Ebenenbüschel 2. O., ein Ebenenbündel 2. O. in Σ_1 ; einer Ebene, einem Ebenenbüschel 1. O. (einer Geraden), einem Ebenenbündel 1. O. (einem Punkte) von Σ_1 entspricht im allgemeinen ein Punkt, eine Punktreihe 2. O., eine Fläche 2. O. in Σ . Dafür, daß die Korrelation linear wird, ist notwendig und hinreichend, daß in der Ebene ε des Haupttetraeders von K zwei seiner Ecken in einen Punkt T zusammenfallen, daß $\mathfrak{f}^{(2)}$ die Verbindungslinien von T mit den beiden andern in ε sich selbst entsprechenden Punkten T_1 und T_2

*) Vgl. Klein, Nicht-Euklidische Geometrie II, Göttingen 1893, S. 200 f.

in T_1 und T_2 berührt, und schließlich, daß k einen einzigen durch K und $\mathfrak{k}^{(2)}$ bestimmten Wert erhält. Dieser wird gleich -1 , wenn die Kollineation K $\mathfrak{k}^{(2)}$ in sich überführt.

Das allgemeine räumliche Nullsystem 2. Grades ist zuerst von Herrn A. Ameseder*) behandelt worden. Das hier vorkommende scheint mir ein neues Beispiel für die allgemeinen Erörterungen jener Arbeit zu bieten. Im folgenden habe ich die Eigenschaften dieses Nullsystems, ohne auf jenen Aufsatz mich zu stützen, aus seiner Entstehungsweise zu entwickeln gesucht. In bezug auf die genauere Betrachtung der Singularitäten des Systems (vgl. unten Nr. 3) darf ich aber wohl auf Herrn Ameseders allgemeine Untersuchungen verweisen.

Im folgenden wird in Nr. 1 gezeigt, daß die Nullkorrelation N eindeutig ist, in Nr. 2 ihr quadratischer Charakter aufgezeigt und schließlich in Nr. 3 der singuläre Kegelschnitt des Nullsystems nachgewiesen, und untersucht, wann das Nullsystem linear wird.

1.

Es sei zunächst K eine Kollineation, die nicht alle Punkte einer geraden Punktreihe, aber mindestens eine reelle Ebene ε in sich überführt; dann liegt in dieser mindestens ein sich selbst entsprechender reeller Punkt T und eine sich selbst entsprechende reelle Gerade t ; außerdem ist noch ein reeller sich selbst entsprechender Punkt E vorhanden. Wir nehmen an, daß T nicht mit t und E nicht mit ε inzident ist. Ein Element, das einem andern, A , in K entspricht, soll stets durch denselben Buchstaben, unter Beifügung eines Strichs bezeichnet werden (A'). Dann beweisen wir zunächst:

Für jeden beliebigen Punkt A_1 gibt es immer ein und im allgemeinen ein einziges reelles Paar von Punkten AA' von der Beschaffenheit, daß A_1 auf AA' liegt, und daß, wenn AA' eine Ebene ε , die von K in sich übergeführt wird, in $A_{1\varepsilon}$ trifft, die Punktgruppe $A_{1\varepsilon}A_1AA'$ ein vorgeschriebenes Doppelverhältnis $k \geq 1$ hat (zu einem beliebig gegebenen Punktquadrupel einer Geraden projektiv ist).

In der Tat, die durch A_1 gehenden Strahlen des von K erzeugten tetraedralen Komplexes bilden einen Kegel 2. Grades $\mathfrak{K}^{(2)}$. Er wird durch K in einen andern Kegel $\mathfrak{K}^{(2)'}$ transformiert, dessen Spitze A_1' auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen muß, da A_1A_1' ein Komplexstrahl ist. Die beiden Kegel schneiden sich außer in A_1A_1' noch in einer durch A_1 und A_1' gehenden kubischen Raumkurve $\mathfrak{k}^{(3)'}$, die als Ordnungskurve des Komplexes sämtliche Hauptpunkte enthält.**)

Sie werde durch die zu K inverse Kollineation K^{-1}

*) Journal f. Mathem. Bd. 97, S. 62 ff.

**) Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. III, S. 8. S. 3.

in $\mathfrak{f}^{(3)}$ übergeführt. Da $\mathfrak{f}^{(3)'}$ auf $\mathfrak{R}^{(2)'}$ liegt, so liegt $\mathfrak{f}^{(3)}$ auf $\mathfrak{R}^{(2)}$ und zwar gehören je zwei entsprechende Punkte der beiden Raumkurven demselben Strahl des Kegels $\mathfrak{R}^{(2)}$ an. $\mathfrak{f}^{(3)}$ geht durch A_1 und durch die Hauptpunkte des Komplexes. Nun werde $\mathfrak{f}^{(3)}$ in $\overline{\mathfrak{f}}^{(3)}$ transformiert durch eine perspektive Kollineation (Homologie), für die A_1 Zentrum und ε Ebene der Homologie sind, und für die das konstante Doppelverhältnis $(P, A_1, PP') = k$ ist, wenn PP' beliebige entsprechende Punkte dieser Kollineation und P_* der Schnittpunkt von PP' mit ε ist. $\overline{\mathfrak{f}}^{(3)}$ liegt auf $\mathfrak{R}^{(2)}$ und geht durch A_1 und durch die drei in ε liegenden Hauptpunkte des Komplexes, hat also mit $\mathfrak{f}^{(3)'}$ außer diesen 4 Punkten im allgemeinen und höchstens noch einen fünften Punkt A' gemeinsam.*) Dieser Punkt A' muß reell sein, da die 4 Punkte, die $\overline{\mathfrak{f}}^{(3)}$ und $\mathfrak{f}^{(3)'}$ außer A_1 gemeinsam haben, nur paarweise imaginär sein können, von den drei in ε liegenden Hauptpunkten aber entweder keiner oder zwei imaginär sind. Er kann auch nicht mit einem der vier andern zusammenfallen, da sonst sich $\overline{\mathfrak{f}}^{(3)}$ und $\mathfrak{f}^{(3)'}$ und mithin auch $\mathfrak{f}^{(3)}$ und $\mathfrak{f}^{(3)'}$ in einem dieser Punkte berühren müßten, und dies ist unmöglich, weil sonst eine Kante des Haupttetraeders Tangente einer Ordnungskurve des Komplexes sein müßte.

Damit ist bewiesen, daß es ein und nur ein Punktepaar von der verlangten Eigenschaft gibt.

Es sei nun in der Ebene ε ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{f}^{(2)}$ gegeben, und a sei die Polare von $A_{1\varepsilon}$; dann soll dem Punkte A_1 des räumlichen Systems Σ die Ebene $(A_1 a)$ des Systems Σ_1 zugeordnet werden. Aus dem bewiesenen Satze ergibt sich, daß diese Verwandtschaft — wir bezeichnen sie mit N — eindeutig ist. Nur dem Punkte E ist jede Ebene des Bündels E , und allen Punkten der Ebene ε ist die Ebene ε zugeordnet.

Die vorstehende Ableitung verliert aber ihre Gültigkeit, wenn der Punkt A_1 auf einer Fläche β des Haupttetraeders liegt.

Wir nehmen zunächst an, A_1 läge nicht auf einer Kante des Tetraeders. Dann zerfällt der Kegel $\mathfrak{R}^{(2)}$ in zwei Strahlenbüschel, von denen das eine in β , das andere in einer Ebene η liegt, die durch die Gegenecke B von β geht. Zwei Punkte AA' , die für A_1 den im Satze gestellten Anforderungen genügen, müssen nun auf einem Komplexstrahl liegen.

Auf einem Strahl des *letztenannten* Büschels aber werden solche Punktepaare AA' im allgemeinen nicht vorkommen. Bringt man nämlich die Ebene η mit η' zum Schnitt und sucht zur Schnittgeraden $g' \equiv (\eta\eta')$ die ihr durch K^{-1} zugeordnete g auf, so schneiden g und g' jeden der von A_1 ausgehenden in η liegenden Komplexstrahlen in zwei in K zugeordneten Punkten A und A' . Es sind offenbar die einzigen derartigen Punkte-

*) Reye, Geom. der Lage 3. Aufl. II, 138.

paare auf den Komplexstrahlen. g und g' müssen sich in B schneiden. Bezeichnet man nun die Schnittlinie $(\eta\varepsilon)$ mit $g_{1\varepsilon}$ und A_1B mit g_1 , so wird im allgemeinen das Doppelverhältnis $(g_{1\varepsilon}, g_1, gg')$ nicht gleich k sein und daher auch für kein Punktpaar AA' ($A_{1\varepsilon}, A_1, AA'$) = k sein können.

In dem *andern*, in β liegenden Büschel wird es dagegen stets ein und nur ein solches Punktpaar geben. Denn das Strahlenbüschel mit dem Scheitel A_1 erzeugt mit dem ihm durch K zugeordneten Büschel einen Kegelschnitt $\mathfrak{f}^{(2)'}$, der durch K^{-1} in einen andern $\mathfrak{f}^{(2)}$ projektiv übergeführt wird. Sie gehen beide durch A_1 und schneiden die Gerade $(\beta\varepsilon)$ in denselben (reellen oder konjugiert-imaginären) Punkten. $\mathfrak{f}^{(2)}$ werde, wie vorher die Raumkurve $\mathfrak{f}^{(3)}$, in $\mathfrak{f}^{(2)}$ transformiert durch eine perspektive Kollineation, für die A_1 Zentrum und $(\beta\varepsilon)$ Achse der Kollineation ist, und für die das konstante Doppelverhältnis $(P_\varepsilon, A_1, PP') = k$ ist, wenn PP' wieder beliebige entsprechende Punkte dieser Kollineation sind und P_ε der Schnittpunkt von PP' mit $(\beta\varepsilon)$ ist. Nun hat $\mathfrak{f}^{(2)}$ mit $\mathfrak{f}^{(2)'}$ den Punkt A_1 und ihre beiden Schnittpunkte mit $(\beta\varepsilon)$ gemeinsam, also gehört noch ein vierter Punkt A beiden an, der reell sein muß, weil imaginäre Schnittpunkte nur paarweise auftreten können. Es gibt also in der Tat ein und nur ein Punktpaar AA' von der verlangten Eigenschaft.

Betrachten wir nunmehr den vorher ausgeschlossenen Fall. Ist zunächst A_1 ein Punkt einer Kante des Haupttetraeders, in welcher sich die Flächen γ und δ schneiden mögen, jedoch nicht eine Tetraederecke, so liegt A_1' gleichfalls auf dieser Kante, und die beiden durch K einander zugeordneten, in derselben Fläche, etwa γ , liegenden Strahlenbüschel A_1 und A_1' erzeugen eine Gerade g' , die von der ihr in K^{-1} entsprechenden g in der δ gegenüberliegenden Tetraederecke D geschnitten wird. Dann aber ist das Doppelverhältnis der 4 Geraden $(DA_{1\varepsilon}, DA_1, g, g')$, (wo $A_{1\varepsilon}$ wieder den Schnittpunkt von AA' mit ε bedeutet) wieder im allgemeinen von k verschieden, also wird im allgemeinen auf einem der von A_1 ausgehenden in γ liegenden Komplexstrahlen ein Punktpaar AA' mit der verlangten Eigenschaft nicht vorhanden sein. Das gleiche gilt für das in δ liegende Strahlenbüschel. Dagegen wird auf A_1A_1' stets ein einziges solches Paar auffindbar sein. Denn, sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ die beiden durch K einander zugeordneten projektiven Punktreihen auf der Tetraederkante als Träger, so führen wir wieder eine Projektivität ein, für die A_1 und $A_{1\varepsilon}$ Doppelpunkte sind, und für die das Doppelverhältnis $(A_{1\varepsilon}, A_1, PP') = k$ ist, wenn P und P' beliebige entsprechende Punkte dieser Projektivität bedeuten. Führt die letztere $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ über, so haben die beiden projektiven Reihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ in $A_{1\varepsilon}$ ein reelles Doppelement, also im allgemeinen noch ein zweites reelles Doppelement A' , das zusammen mit A wieder ein Punktpaar bildet, für das $(A_{1\varepsilon}, A_1, AA') = k$ ist.

Ist schließlich A_1 eine Tetraederecke, so fallen A und A' mit ihr zusammen.

Damit ist der am Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz für alle Fälle bewiesen.

Fragen wir weiter, *wieviele Punkte von Σ durch die Verwandtschaft N jeder Ebene von Σ_1 zugeordnet werden*. Sei α eine Ebene von Σ_1 , a ihre Schnittlinie mit ε , $A_{1\varepsilon}$ der Pol von a in bezug auf $\mathfrak{f}^{(2)}$. Der Ebene α können jedenfalls nur solche Punkte entsprechen, die auf einem Strahle des von $A_{1\varepsilon}$ ausgehenden, nicht in ε liegenden Komplexstrahlenbüschels 1. O. liegen. Bringt man nun wieder die Ebene ϑ des Büschels mit ϑ' zum Schnitt und sucht zur Schnittgeraden $g' \equiv (\vartheta\vartheta')$ die ihr durch K^{-1} zugeordnete g auf, verbindet den Punkt $E \equiv (gg')$ mit $A_{1\varepsilon}$ und bestimmt eine durch E gehende in ϑ liegende Gerade g_1 so, daß das Doppelverhältnis $(EA_{1\varepsilon}g_1gg') = k$ ist, so ist offenbar der Punkt $(g_1\alpha)$ der einzige, der durch N der Ebene α zugeordnet ist.

Die Verwandtschaft ist also ein-eindeutig.

Es gibt freilich noch in der Ebene ε eine singuläre Punktreihe 2. O. und im Bündel E ein singuläres Ebenenbüschel 2. O. von der Eigenschaft, daß jedem Punkte der ersteren die Ebenen je eines Büschels 1. O. und allen Ebenen des letzteren die Punkte je einer geraden Punktreihe zugeordnet werden müssen. In bezug auf diese sei auf die Untersuchungen von Herrn Ameseder verwiesen.

2.

Wir zeigen nunmehr, daß im allgemeinen *jeder Geraden in Σ durch N ein Ebenenbüschel 2. O. in Σ_1 zugewiesen wird*. Es sei l eine beliebige Gerade, jedoch *kein Komplexstrahl* des durch K erzeugten tetraedralen Komplexes. Dann bestimmt die Punktreihe auf l mit der auf l' eine Regelschar. Trifft l die Ebene ε in C , so liegt C' gleichfalls in ε und CC' ist ein Strahl der Regelschar. Also muß ε auch eine Leitlinie der Schar enthalten, sie sei $l_{1\varepsilon}$. Ferner sei l_1 diejenige Leitlinie, die so liegt, daß jeder Strahl der Regelschar von den Leitlinien $l_{1\varepsilon}, l_1, l, l'$ in Punkten geschnitten wird, deren Doppelverhältnis k ist. Die Polaren der Punktreihe $l_{1\varepsilon}$ in bezug auf $\mathfrak{f}^{(2)}$ bilden ein zu ihr und damit auch zur Punktreihe l_1 projektives Strahlenbüschel. Verbindet man nun jeden Strahl dieses Büschels mit dem ihm entsprechenden Punkt von l_1 , so erhält man im allgemeinen ein Ebenenbüschel 2. O.

Ist aber l ein Komplexstrahl, der nicht durch eine Ecke des Haupttetraeders geht oder in ε liegt, so bestimmt die Punktreihe von l mit der von l' ein Strahlenbüschel 2. O., und da der von diesem umhüllte Kegel-

schnitt als Komplexkurve sämtliche Hauptebenen berührt, so muß auch die Schnittlinie $l_{1\epsilon}$ der Ebene $(\mathcal{U})$ und ϵ zu dem Strahlenbüschel gehören. Ist nun wieder l_1 derjenige Strahl des Büschels, der so liegt, daß jeder andere Büschelstrahl von $l_{1\epsilon}, l_1, l, l'$ in Punkten geschnitten wird, deren Doppelverhältnis k ist, so ist auch jetzt wieder vermittels des Strahlenbüschels die Punktreihe $l_{1\epsilon}$ auf l_1 projektiv bezogen, und man erkennt, daß die Verwandtschaft N auch in diesem Falle den Punkten von l_1 ein Ebenenbüschel 2. O. zuordnet.

Geht l durch einen der in ϵ liegenden Hauptpunkte, etwa T , so erhalten wir statt des soeben erwähnten Strahlenbüschels 2. O. ein solches 1. O. Ist $l_{1\epsilon}$ der Schnitt von $(\mathcal{U}')$ mit ϵ , und ist l_1 durch jenen Hauptpunkt T in der Ebene $(\mathcal{U}')$ so gezogen, daß $(l_{1\epsilon}, l_1 \mathcal{U}') = k$ ist, so erkennt man, daß auch der Geraden l_1 im allgemeinen ein Ebenenbüschel 2. O. entspricht.

Geht endlich l durch E , so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte von l und l' in einem Punkte $A_{1\epsilon}$ von ϵ , und wenn man l_1 wieder so bestimmt, daß $(E\mathcal{U}_{1\epsilon}, l_1 \mathcal{U}') = k$ ist, so erkennt man, daß der Punktreihe l_1 ein Ebenenbüschel 1. O. durch die Verwandtschaft N zugeordnet ist, dessen Träger die Polare von $A_{1\epsilon}$ ist.*)

Jedem ebenen Felde von Σ entspricht in N ein Ebenenbündel 2. O. von Σ_1 .

Ist nämlich η ein ebenes Feld, das durch keinen Hauptpunkt geht, so bestimmt es mit η' ein kubisches Ebenenbüschel, dessen Ebenen entsprechende Geraden von η und η' verbinden. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Felder bilden eine Kongruenz 1. Klasse und 3. Ordnung, die Achsenkongruenz des Ebenenbüschels**), und dieses selbst ist ein Ordnungsebenenbüschel des durch K bestimmten Komplexes.***) Zu diesem Büschel gehört auch ϵ als Hauptebene des Komplexes. Für jeden Punkt A von η bestimmen wir nun, wenn AA' die Ebene ϵ in $A_{1\epsilon}$ trifft, denjenigen Punkt A_1 , für welchen $(A_{1\epsilon}, A_1 AA') = k$ ist. Die Punkte A_1 liegen sämtlich in derselben Ebene η_1 , da die Achsen von den Ebenen des Büschels in projektiven Punktreihen geschnitten werden. Es ist somit das Feld η_1 kollinear auf ϵ bezogen, wenn man jedem Punkte A_1 den Punkt $A_{1\epsilon}$ entsprechen läßt, und es ist reziprok auf ϵ bezogen, wenn man jedem Punkte A_1 die Gerade a , die Polare von $A_{1\epsilon}$ in bezug auf $\mathbb{F}^{(2)}$, zuordnet. Die Ebenen $(A_1 a)$ bilden somit als Erzeugnisse zweier reziproken Felder ein Ebenenbündel 2. O.

*) Vgl. hierzu Ameseder a. a. O. Nr. 22.

**) Reye, G. d. L. II, 202.

***) Reye, a. a. O. III, S. 2.

Enthält die Ebene η einen der Hauptpunkte, so zerfällt das kubische Ebenenbüschel, den sie mit η' bestimmt, in ein Ebenenbüschel 2. O. mit jenem Hauptpunkt als Scheitel und ein Ebenenbüschel 1. O. Die Achsenkongruenz wird von erster Klasse und zweiter Ordnung.*) Wenn aber η eine Tetraederkante enthält, so zerfällt das kubische Ebenenbüschel in drei Ebenenbüschel von 1. O. und die Achsenkongruenz wird linear.**)

Da auch in diesen beiden Fällen die Achsen der Kongruenz von den Ebenen der Büschel in projektiven Punktreihen geschnitten werden, so bleiben die obigen Schlüsse auch hier in Kraft, und auch diesen Ebenen entspricht in N ein Ebenenbündel 2. O.

Ausgeschlossen sind allein, wie aus dem Vorhergehenden sich ergibt, die Hauptebenen der Kollineation.

Einer Geraden von Σ_1 als Träger eines Ebenenbüschels 1. O. ist durch N eine Punktreihe 2. O. zugeordnet. Das Ebenenbüschel schneidet nämlich ε in einem Strahlenbüschel 1. O., welchem in dem polaren Felde ε mit der Ordnungskurve $f^{(2)}$ eine Punktreihe h entspricht. *Wir schließen zunächst den Fall aus, daß h einen sich selbst entsprechenden Punkt von ε enthält.*

T war der sich selbst entsprechende reelle Punkt der Ebene ε für K , t die sich selbst entsprechende reelle Gerade derselben Ebene. Dann gibt es zwei projektive Strahlenbüschel, von denen das eine den Scheitel T hat und in der Ebene ε liegt, das andere den Scheitel E hat und in der Ebene (Et) liegt, von der Beschaffenheit, daß alle Geraden, die zwei homologe Strahlen der beiden Büschel treffen, den tetraedralen Komplex bilden.***) Beziehen wir nun die Punkte $A_{1\epsilon}$ der Reihe h perspektiv auf die Strahlen des Büschels T , so vermittelt die Projektivität zwischen den Büscheln E und T auch eine Projektivität zwischen der Punktreihe h und dem Büschel E . Die letzteren beiden Elementargebilde aber erzeugen ein Ebenenbüschel 2. O., dessen Ebenen diejenigen von den Punkten von h ausgehenden Komplexstrahlenbüschel enthalten, die nicht in ε liegen. Zu diesem Ebenenbüschel gehören auch die Ebene $(Eh) \equiv \xi$ und die drei in E sich schneidenden Hauptebenen des Komplexes. Bezeichnet man nun den Punkt (hh') mit $P'_{1\epsilon}$ und die zu $P'_{1\epsilon}$ und $P_{1\epsilon}$ gehörigen Ebenen des Büschels mit ξ' und ξ , so läßt sich das Ebenenbüschel 2. O. auch als Erzeugnis der beiden in ξ' bzw. ξ liegenden konzentrischen, vermöge K projektiven Strahlenbüschel g' und g mit dem Scheitel E auffassen. Denn das auf die letztere Weise entstandene Ebenenbüschel hat mit dem erstgenannten die durch E gehenden Hauptebenen und außer-

*) Reye, G. d. L. II, 191.

**) Reye, a. a. O. II, 180.

***) Reye, a. a. O. III, S. 7.

dem ξ und ξ' gemeinsam. Alle mit h inzidenten Strahlen des Komplexes treffen also je ein Paar entsprechender Strahlen der Büschel g und g' .

Nun werden aber je zwei Ebenen des Büschels 2. O. von allen andern in projektiven Strahlenbüscheln geschnitten. Bestimmen wir nun die Ebene ξ_1 so, daß das Doppelverhältnis des Strahlenquadrupels, das eine beliebige andere Ebene des Büschels bzw. aus $\xi\xi_1\xi\xi'$ ausschneidet, gleich k ist, so schneidet das Ebenenbüschel aus ξ_1 ein Strahlenbüschel 1. O. $E(g_1)$ aus, das zu ihm perspektiv, also zur Punktreihe h und mithin zu dem ursprünglich in Σ_1 gegebenen Ebenenbüschel 1. O. projektiv ist. Der einer Ebene des Büschels von Σ_1 durch N in Σ zugeordnete Punkt ist ihr Schnittpunkt mit dem entsprechenden Strahle des letztgenannten Büschels 1. O. und diese Schnittpunkte bilden also eine Punktreihe 2. O.

Für den Fall, daß h durch eine in ε liegende Ecke des Haupttetraeders, etwa T , geht, werden diese Schlüsse hinfällig.

Nehmen wir zunächst an, h falle nicht mit einer Kante des Tetraeders zusammen. Ist dann $\bar{h}$ derjenige Strahl des Büschels E , der in der oben erwähnten Projektivität zwischen den Büscheln E und T dem Strahle h entspricht, so enthält das Ebenenbüschel 1. O. mit der Achse $\bar{h}$ alle Ebenen derjenigen von den Punkten von h ausgehenden Komplexstrahlenbüschel, die nicht in ε liegen. Die beiden projektiven Ebenenbüschel $\bar{h}$ und $\bar{h}'$ erzeugen, da sie die Ebene (Et) entsprechend gemein haben, ein Strahlenbüschel 1. O. von Strahlen g' mit dem Scheitel E . Dieses Strahlenbüschel enthält den Strahl ET als Schnittlinie der Ebene $(T\bar{h})$ und der ihr entsprechenden. Das diesem Strahlenbüschel in K^{-1} entsprechende Büschel von Strahlen g hat daher mit ihm den Strahl ET entsprechend gemein, und dieser ist daher die Schnittlinie der Ebenen ι und ι' der beiden Büschel g und g' . Legen wir nun durch ET die Ebene ι_1 so, daß

$$(Eh, \iota_1 \iota \iota') = k$$

ist, so schneidet das Ebenenbüschel $\bar{h}$ aus ι_1 ein Strahlenbüschel 1. O. $E(g_1)$ aus, das mit dem zu ihm projektiven in Σ_1 gegebenen Ebenenbüschel 1. O. wieder eine Punktreihe 2. O. erzeugt. Diese Punktreihe aber besteht aus den Nullpunkten der Ebenen jenes in Σ_1 gegebenen Büschels.

Fällt aber h mit einer Tetraederkante, etwa t , zusammen, so schließen wir folgendermaßen. P und P' seien zwei verschiedene, in K entsprechende Punkte von t , so erzeugen die in (Et) liegenden, vermöge K projektiven Strahlenbüschel P und P' eine Punktreihe 1. O. g' , die E enthält. Nun ist, wenn man dem Punkte P die Gerade g' zuordnet, die Punktreihe $t(P)$ zu dem Strahlenbüschel $E(g')$ projektiv. Denn sind Q und Q' zwei beliebige verschiedene nicht auf einer Tetraederkante liegende,

in K entsprechende Punkte der Ebene (Et) , so erzeugen die beiden in (Et) liegenden projektiven Strahlenbüschel Q und Q' eine Punktreihe 2. O., die Q , Q' und E enthält. Ein Punkt dieser Reihe ist der Schnitt R' von QP und $Q'P'$, und ER' ist der Träger der zu P gehörigen Punktreihe g' . Nun ist das Strahlenbüschel $g' \equiv E(R')$ zu jener Punktreihe 2. O. perspektiv, diese aber auch zum Strahlenbüschel $Q(R')$, und dieses Büschel zur Punktreihe P , also ist das Büschel g' zur Punktreihe P projektiv. Bestimmt man nun wieder in (Et) eine durch E gehende Gerade g_1 so, daß $(EP, g_1gg') = k$ ist, so bilden die g_1 , wie wir sofort zeigen werden, ein zur Punktreihe P projektives Strahlenbüschel, und dieses erzeugt wieder mit dem in Σ_1 gegebenen Ebenenbüschel 1. O. die Punktreihe 2. O. der Nullpunkte dieser Ebenen.

Daß aber das Strahlenbüschel $E(g_1)$ zur Punktreihe $t(P)$ projektiv ist, zeigen wir folgendermaßen. Die Strahlenbüschel g und g' erzeugen auf t zwei zu $t(P)$ projektive Punktreihen $t(\mathfrak{P})$ und $t(\mathfrak{P}')$. Diese Projektivitäten haben dieselben Doppelpunkte, oder, was dasselbe ist,*) die zwischen $t(P)$ und $t(\mathfrak{P})$ einerseits und zwischen $t(P)$ und $t(\mathfrak{P}')$ anderseits bestehende Projektivität hat dieselbe „Doppelinvolution“, oder auch, was gleichfalls auf dasselbe hinauskommt, sie sind vertauschbar.**) Wären nun diese beiden Projektivitäten invers, so könnten wir uns auf einen zuerst von Herrn Pasch**) gefundenen und bewiesenen Satz berufen; daß dieser Satz aber auch für zwei beliebige vertauschbare Projektivitäten gilt, geht unmittelbar aus der Ableitung hervor, die Herrn Segre***) für den Satz von Herrn Pasch gegeben hat. Dieser allgemeinere Satz läßt sich wie folgt aussprechen:

Wird einem veränderlichen Punkte X einer Geraden durch eine Projektivität ein Punkt Y und diesem durch eine mit der ersteren vertauschbare Projektivität ein anderer Punkt Z zugeordnet, und ein weiterer Punkt R so bestimmt, daß das Quadrupel $(XYZR)$ einem festen Gebilde projektiv ist, so besteht auch zwischen der Reihe R und der Reihe Y eine mit jeder der gegebenen vertauschbare Projektivität.

Einem Ebenenbündel von Σ_1 schließlich entspricht in Σ eine Fläche 2. O. Denn das Ebenenbündel schneidet aus ε ein Strahlenfeld aus, dem durch die polare Korrelation ein Punktfeld in ε zugeordnet ist. Zu jedem Punkte des letzteren aber gehört eine Ebene $\mathfrak{D}$, welche die nicht in ε liegenden durch den Punkt gehenden Komplexstrahlen enthält, in ihr (vgl.

*) Vgl. Segre, Journal f. Math. Bd. 100, S. 321 f.

**) Journal f. Math. Bd. 91, S. 349, auch: Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 134.

***) a. a. O. § 7 S. 323, vgl. auch H. Wiener, Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden, Darmstadt 1885.

S. 247) ein Geradenpaar gg' und eine Gerade g_1 des Bündels E ; einer Punktreihe des Feldes ist, wie bewiesen, ein Strahlenbüschel 1. O. von Geraden g_1 zugeordnet. Also steht das Strahlenbündel E in kollinearer Verwandtschaft zu dem Punktfeld ε und somit in linear-reziproker Verwandtschaft zu dem in Σ_1 gegebenen Ebenenbündel. Die beiden Bündel aber erzeugen die besagte Fläche 2. O.

3.

Den durch E gehenden Geraden von Σ entsprechen, wie wir sahen (vgl. S. 248), in Σ_1 Ebenenbüschel 1. O. Fragen wir nun, ob dasselbe noch für andere Geraden der Fall ist.

Zu zwei entsprechenden Punkten C und C' von ε gehört (vgl. Nr. 2 Absatz 1) ein bestimmter Punkt $C_{1\varepsilon}$ (der Schnittpunkt von CC' mit $l_{1\varepsilon}$), der als Schnittpunkt von CC' mit ε anzusprechen ist, d. h. bei reellem Haupttetraeder der Punkt, der zusammen mit den Punkten X, Y, Z , in denen CC' die Seiten T_1T_2, T_2T, TT_1 des in ε liegenden Hauptdreiecks TT_1T_2 schneidet, das für den Reyeschen Komplex charakteristische Doppelverhältnis $(C_{1\varepsilon}XYZ) = \lambda$ bestimmt. Ist nun C_1 der Schnitt von l_1 und CC' , also $(C_{1\varepsilon}C_1CC') = k$, so gehört zu jedem Punkte $C_{1\varepsilon}$ offenbar eine einzige Gerade, für die das genannte Doppelverhältnis $(C_{1\varepsilon}XYZ)$ gleich λ ist, auf ihr liegt ein einziges Punktepaar CC' und also auch nur ein Punkt C_1 , für den $(C_{1\varepsilon}C_1CC') = k$ ist.

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß jedem Punkte C_1 ein einziger Punkt $C_{1\varepsilon}$ zugehört. Das Strahlenbüschel C_1 in ε erzeugt nämlich mit dem Büschel C_1' einen Kegelschnitt $m^{(2)'}$, der durch K^{-1} in $m^{(2)}$ transformiert wird. Beide Kegelschnitte gehen durch T, T_1, T_2 und durch C_1 . Das Büschel C_1 schneidet $t \equiv T_1T_2$ in einer zu ihm perspektiven Punktreihe $t(P)$, die projektiv ist zu dem Strahlenbüschel $T(s)$, wenn man jedem Punkte P den Strahl s zuordnet, für welchen $(TP, TT_2, TT_1, s) = \lambda$ ist. Diese beiden Strahlenbüschel C_1 und T schneiden sich wieder in einem Kegelschnitt $n^{(2)}$, der gleichfalls durch T, T_1, T_2, C_1 geht. Jeder durch C_1 gehende Strahl schneidet $m^{(2)}, m^{(2)'}, n^{(2)}$ bzw. in den Punkten $C, C', C_{1\varepsilon}$. Unter diesen Strahlen gibt es aber nur einen, für den $(C_{1\varepsilon}C_1CC') = k$ ist. Denn alle durch C_1 gehenden Geraden $C_1(u)$ werden von den Kegelschnitten des durch C_1, T, T_1, T_2 bestimmten Büschels in projektiven Punktreihen geschnitten.*) Nehmen wir eine bestimmte Gerade u_1 heraus, so werden auf ihr den Schnittpunkten aller andern Geraden mit $m^{(2)}, m^{(2)'}, n^{(2)}$ immer dieselben drei Punkte $C, C', C_{1\varepsilon}$, dem Punkte C_1 der übrigen Geraden aber nacheinander alle anderen Punkte von u_1 entsprechen. Das Doppelverhältnis $(C_{1\varepsilon}C_1CC')$,

*) Steiner-Schröter-Sturm, Theorie der Kegelschnitte 3. Aufl., S. 228.

das die drei Punkte, in denen $m^{(2)}$, $m^{(2)'}$ und $n^{(2)}$ die Strahlen des Büschels $C_1(u)$ schneidet, zusammen mit C_1 bilden, durchläuft also alle Werte, aber jeden nur einmal.

Ferner muß wegen der Konstanz der beiden Doppelverhältnisse $(C_{1\epsilon}XYZ)$ und $(C_{1\epsilon}C_1CC')$ einer geraden Punktreihe $g(C)$ auch je eine gerade Punktreihe $g_{1\epsilon}(C_{1\epsilon})$ und $g_1(C_1)$ entsprechen; denn $g(C)$ und $g'(C')$ erzeugen ein Strahlenbüschel 2. O., dem auch die Seiten des Hauptdreiecks in ϵ angehören.

Das aus den Punkten C_1 gebildete Feld steht also in Kollineation zu dem aus den Punkten $C_{1\epsilon}$ gebildeten Punktfeld und also in Korrelation zu dem aus den Polaren von $C_{1\epsilon}$ gebildeten Strahlenfeld. Da nun (vgl. Nr. 2, Abs. 1) das Ebenenbüschel 2. O. von Σ_1 zu einem solchen von 1. O. wird, wenn die Polare von $C_{1\epsilon}$ l_1 schneidet, so ist ersichtlich, daß der Geraden l_1 ein Ebenenbüschel 1. O. entspricht, wenn C_1 , also auch l_1 , mit der Punktkernkurve dieser Korrelation inzident ist.

Herr Ameseder hat gezeigt,*) daß dieser Kegelschnitt mit dem oben (S. 247) genannten identisch ist. Er nennt solche Geraden l_1 „Ordnungslinien“ des Nullsystems.

Unmöglich aber ist es, daß jeder Geraden der Ebene ϵ in N ein Ebenenbüschel 1. O. entspricht, falls nicht von den vier Ecken des Haupttetraeders von K zwei zusammenfallen.

Es müßte nämlich sonst, wenn man auf irgend einer in ϵ liegenden Geraden die beiden in K entsprechenden Punkte CC' , außerdem $C_{1\epsilon}$ so bestimmt, daß $(C_{1\epsilon}XYZ) = \lambda$ ist, der auf dieser Geraden liegenden in bezug auf $f^{(2)}$ konjugierte Punkt von $C_{1\epsilon}$, er sei $\bar{C}_{1\epsilon}$, mit C_1 zusammenfallen, d. h. $(C_{1\epsilon}\bar{C}_{1\epsilon}CC')$ konstant und gleich k sein. Das ist aber schon für die Geraden nicht möglich, die durch einen und denselben nicht mit T_1 und T_2 zusammenfallenden Punkt X von t gehen. Denn für die Geraden dieses Strahlenbüschels X liegt sowohl die Reihe der Punkte C als auch die der Punkte C' und $C_{1\epsilon}$ auf je einer durch T gehenden Geraden, die wir bezw. c , c' , $c_{1\epsilon}$ nennen, und wenn nun das Doppelverhältnis $(C_{1\epsilon}\bar{C}_{1\epsilon}CC')$ konstant sein soll, so müssen auch die Punkte $\bar{C}_{1\epsilon}$ eine durch T gehende gerade Punktreihe $\bar{c}_{1\epsilon}$ bilden. Die letztere muß auch durch den auf t liegenden Pol des Trägers der Punktreihe $\bar{C}_{1\epsilon}$ hindurchgehen, denn dieser Pol ist der Punkt $\bar{C}_{1\epsilon}$ der Geraden t . Daraus aber würde folgen, daß alle Punkte von $c_{1\epsilon}$ in bezug auf $f^{(1)}$ dieselbe Polare, nämlich $\bar{c}_{1\epsilon}$, hätten, und das ist unmöglich, so lange $f^{(2)}$ nicht zerfällt.

Nur wenn $C_{1\epsilon}$ stets auf einer der Seiten des Dreiecks TT_1T_2 bleibt, also stets mit einem der Punkte X , Y , Z zusammenfällt, könnte die Kon-

*) a. a. O. § 35.

stanz von $(C_{1\varepsilon} \bar{C}_{1\varepsilon} CC')$ noch möglich sein. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn $\lambda = 1$ ist, d. h. wenn K zu denjenigen Kollineationen gehört, für die zwei Tetraederecken, also auch zwei Tetraederflächen zusammenfallen. Die Regelschar nämlich, von der oben (Nr. 2, Abs. 1) die Rede war, liegt auf einer Fläche 2. O., die die Flächen des Haupttetraeders von K berührt. *) Die durch jede Kante des Tetraeders an die Regelfläche gelegten Tangentialebenen sind also die beiden in der betr. Kante, etwa t , sich schneidenden Tetraederflächen. Fallen sie beide in eine einzige, ε , zusammen, so geht durch sie nur eine Tangentialebene, die Kante t muß also eine Tangente der Regelfläche sein, der Berührungspunkt dieser Tangentialebene, d. i., wie die frühere Untersuchung zeigt, $C_{1\varepsilon}$, muß also dann stets auf t liegen.

Nur der Fall, daß $f^{(2)}$ in dieser Ebene ε liegt, kann noch in Betracht kommen. Dann aber bilden die Punkte CC' für das Büschel von Geraden mit dem Scheitel $C_{1\varepsilon}$ wieder zwei durch T gehende gerade Punktreihen cc' , und die Konstanz von $(C_{1\varepsilon} \bar{C}_{1\varepsilon} CC')$ fordert wieder, daß auch die Punkte $\bar{C}_{1\varepsilon}$ eine gerade durch T gehende Reihe $\bar{c}_{1\varepsilon}$ bilden. Nun ist $\bar{c}_{1\varepsilon}$ die Polare von $C_{1\varepsilon}$ und da dies für alle Punkte $C_{1\varepsilon}$ von t gilt, so muß t die Polare von T in bezug auf $f^{(2)}$ sein. Schneiden nun die Strahlen $c, c', \bar{c}_{1\varepsilon}$ die Gerade t bezw. in den Punkten $C^t, C'^t, \bar{C}_{1\varepsilon}^t$, so sind, wie wir früher (S. 251) bewiesen haben, die vier Punktreihen $C^t, C'^t, \bar{C}_{1\varepsilon}^t$ und $C_{1\varepsilon}$ unter sich projektiv und haben dieselben Doppelpunkte T_1 und T_2 . Daraus aber folgt, daß TT_1 und TT_2 die Polaren von T_1 bezw. T_2 sein müssen, d. h. daß $f^{(2)}$ durch T_1 und T_2 geht.

Dann aber hat das Doppelverhältnis $(C_{1\varepsilon} \bar{C}_{1\varepsilon} CC')$ tatsächlich für alle Punkte C denselben konstanten Wert. K führt nämlich $f^{(2)}$ in einen zweiten Kegelschnitt $k^{(2)'}$ über, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden bilden ein Strahlenbüschel, das von 2. O., nicht von 1. O. ist, **) weil K nicht perspektiv sein soll, und das den Kegelschnitt $l^{(2)}$ umhüllen möge. $f^{(2)}$, $f^{(2)'}$ und $l^{(2)}$ berühren sich doppelt in T_1 und T_2 . Zwei beliebige Tangenten von $l^{(2)}$ schneiden aber $f^{(2)}$ und $f^{(2)'}$ in projektiven Punktquadrupeln, und in den dadurch auf den Tangenten bestimmten Projektivitäten entsprechen sich auch deren Schnittpunkte mit der gemeinsamen Berührungssehne. ***) Sind die Schnittpunkte der einen Tangente mit $f^{(2)}$ die Punkte C und G und mit $f^{(2)'}$ die Punkte C' und H , diejenigen der andern mit $f^{(2)}$ die Punkte C^1 und G^1 und mit $f^{(2)'}$ die Punkte C_1' und H^1 , ihre Schnittpunkte mit t bezw. $C_{1\varepsilon}$ und $C_{1\varepsilon}^1$, so ist also:

$$CGC'HC_{1\varepsilon} \bar{\wedge} C^1G^1C_1'H^1C_{1\varepsilon}^1.$$

*) Reye, G. d. L. III, S. 5. Sturm, Liniengeometrie I, S. 335.

**) Reye, G. d. L. I, S. 137.

***) Vgl. Steiner-Schröter-Sturm, Kegelschnitte 3. Aufl. S. 337.

Aber es ist:

$$(CGC_{1\epsilon}\bar{C}_{1\epsilon}) = (C^1G^1C_{1\epsilon}^1\bar{C}_{1\epsilon}^1) = -1,$$

wenn $\bar{C}_{1\epsilon}^1$ der Schnittpunkt der zweiten Tangente mit der Polaren von $C_{1\epsilon}^1$ in bezug auf $\mathfrak{f}^{(2)}$ ist, also auch:

$$(C_{1\epsilon}\bar{C}_{1\epsilon}CC') = (C_{1\epsilon}^1\bar{C}_{1\epsilon}^1C^1C'^1).$$

Damit ist aber der Beweis vollkommen erbracht, da die Konstanz des Doppelverhältnisses für jedes Büschel von Geraden mit demselben Scheitel $C_{1\epsilon}$ nach dem früher Gesagten ohne weiteres ersichtlich ist.

Ist der Wert dieses Doppelverhältnisses gleich -1 , so führt $\mathbf{K} \mathfrak{f}^{(2)}$ in sich über, und umgekehrt.

Charlottenburg, Mai 1904.