Note zu meiner Abhandlung „Untersuchungen über die natürlichen Gleichungen krummer Flächen“.*)

Von

SIEGFRIED HELLER in Kiel.

Bezeichnet man die Bogenelemente der Krümmungskurven mit ds_1 und ds_2 , so können die Differentialquotienten der Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 nach ds_1 und ds_2 auf einer Fläche, die nicht zur Klasse der W -Flächen gehört, als Funktionen von R_1 und R_2 dargestellt werden; diese Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1}{\partial s_1} &= \Phi_1(R_1, R_2), & \frac{\partial R_1}{\partial s_2} &= \Psi_1(R_1, R_2), \\ \frac{\partial R_2}{\partial s_1} &= \Phi_2(R_1, R_2), & \frac{\partial R_2}{\partial s_2} &= \Psi_2(R_1, R_2)\end{aligned}$$

nennt Scheffers die natürlichen Gleichungen der Fläche**).

Unter Zugrundelegung von $u = R_1$ und $v = R_2$ als krummlinigen Koordinaten der Fläche wurden in § 3 der oben genannten Arbeit die Bedingungen aufgestellt, unter denen wirklich eine Fläche zu gegebenen Funktionen Φ_1 , Φ_2 , Ψ_1 und Ψ_2 existiert.

Von den drei Bedingungsgleichungen läßt sich die mittlere (18) auf S. 570 ganz erheblich vereinfachen, wenn man die erste und dritte Bedingungsgleichung (17) und (19) je einmal nach u und einmal nach v differenziert und die sich ergebenden Ausdrücke für

$$\binom{1}{1uu} + \binom{2}{1uv}, \quad \binom{1}{1uv} + \binom{2}{1vv}, \quad \binom{1}{2uu} + \binom{2}{2uv} \quad \text{und} \quad \binom{1}{2uv} + \binom{2}{2vv}$$

in jene Gleichung einführt, welche nach einigen Umformungen schließlich die einfache Gestalt annimmt

*) Math. Ann. 58, S. 565 f.

**) Scheffers, Theorie der Flächen, S. 353.

$$u^2(\Phi_1\Phi_{2u} + \Phi_2\Phi_{2v}) - v^2(\Psi_1\Psi_{1u} + \Psi_2\Psi_{1v}) + \frac{2(u^2\Phi_2^2 + v^2\Psi_1^2)}{u-v} \\ - \frac{uv(\Phi_1\Phi_2 + \Psi_1\Psi_2)}{u-v} + u - v = 0.$$

Diese neue Form der mittleren Gleichung ist deshalb bemerkenswert, weil in ihr nicht mehr die zweiten Ableitungen, sondern nur noch die ersten Ableitungen der Invarianten Φ_1 , Φ_2 , Ψ_1 und Ψ_2 nach u und v auftreten.

Die drei Bedingungsgleichungen für Φ_1 , Φ_2 , Ψ_1 und Ψ_2 habe ich seinerzeit dadurch gewonnen, daß ich nach Einführung der Parameter $u = R_1$ und $v = R_2$ aus den natürlichen Gleichungen der Fläche die Fundamentalgrößen E , F , G , L , M , N berechnete und diese samt ihren Ableitungen in die drei bekannten Fundamentalgleichungen der Flächentheorie eintrug. Weit schneller gelangt man aber zum Ziel, wenn man auf der Fläche als Koordinatenlinien die Krümmungskurven zugrunde legt und berücksichtigt, daß bei dieser Annahme die geodätische Torsion T der Koordinatenlinien gleich Null wird. Aus den Gleichungen von Codazzi*) erhält man für die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien

$$G_1 = \frac{R_2\Psi_1}{R_1(R_2 - R_1)} \quad \text{und} \quad G_2 = \frac{-R_1\Phi_2}{R_2(R_2 - R_1)}.$$

Setzt man diese Werte in die Gaußsche Gleichung**)

$$\frac{\partial G_1}{\partial s_2} + \frac{\partial G_2}{\partial s_1} + G_1^2 + G_2^2 = -\frac{1}{R_1 R_2}$$

ein, so ergibt sich die der zweiten Bedingungsgleichung äquivalente Formel

$$R_1^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial s_1} - R_2^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial s_2} + \frac{2(R_1^2\Phi_2^2 + R_2^2\Psi_1^2)}{R_1 - R_2} - \frac{R_1 R_2 (\Phi_1\Phi_2 + \Psi_1\Psi_2)}{R_1 - R_2} + R_1 - R_2 = 0.$$

Die beiden andern Gleichungen findet man, wenn man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der Funktionen R_1 und R_2 aufsucht, deren Differentialquotienten

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} = \Phi_1, \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_2} = \Psi_1, \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_1} = \Phi_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_2} = \Psi_2$$

gegeben sind. Man erhält so, da ja die Krümmungslinien ein Orthogonalsystem bilden, die Gleichungen***)

*) s. Cesàro, *Natürliche Geometrie*, S. 202.

**) A. a. O.

***) Cesàro, *Natürliche Geometrie*, S. 199.

und

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial s_2 \partial s_1} = G_2 \frac{\partial R_1}{\partial s_2} - G_1 \frac{\partial R_1}{\partial s_1}$$

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial s_2 \partial s_1} = G_2 \frac{\partial R_2}{\partial s_2} - G_1 \frac{\partial R_2}{\partial s_1}.$$

Werden die oben gefundenen Werte von G_1 und G_2 eingesetzt, so gehen daraus die der ersten und dritten Bedingungsgleichung äquivalenten Formeln

$$R_1 R_2 (R_1 - R_2) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial s_1} \right) = \Psi_1 (R_1^2 \Phi_2 + R_2^2 \Phi_1)$$

und

$$R_1 R_2 (R_1 - R_2) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial s_2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial s_1} \right) = \Phi_2 (R_1^2 \Psi_2 + R_2^2 \Psi_1)$$

hervor.

Die hier gefundenen drei Gleichungen gehen in die früher aufgestellten über, wenn man sich auf der Fläche statt der Krümmungslinien wieder die durch $u = R_1$ und $v = R_2$ definierten Parameterkurven eingeführt denkt. Da ganz allgemein der Differentialquotient einer Funktion f nach dem Bogenelement ds in der Richtung (k) durch

$$\frac{df}{ds} = \frac{f_u + f_v k}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}$$

gegeben ist, und in unserm Falle die Fortschreitungsrichtungen längs der Krümmungslinien

$$k_1 = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{\Psi_2}{\Psi_1}$$

sowie die Wurzel ausdrücke

$$\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2} = \frac{1}{\Phi_1} \quad \text{und} \quad \sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2} = \frac{1}{\Psi_1}$$

bekannt sind*), so ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \Phi_1 f_u + \Phi_2 f_v \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial s_2} = \Psi_1 f_u + \Psi_2 f_v.$$

Dadurch erhält man aber, wenn man gleichzeitig $R_1 = u$ und $R_2 = v$ setzt, aus den soeben abgeleiteten Bedingungsgleichungen wieder die früheren:

$$uv(u-v)(\Psi_1 \Phi_{1u} + \Psi_2 \Phi_{1v} - \Phi_1 \Psi_{1u} - \Phi_2 \Psi_{1v}) = \Psi_1 (u^2 \Phi_2 + v^2 \Phi_1),$$

$$u^2(\Phi_1 \Phi_{2u} + \Phi_2 \Phi_{2v}) - v^2(\Psi_1 \Psi_{1u} + \Psi_2 \Psi_{1v}) + \frac{2(u^2 \Phi_2^2 + v^2 \Psi_1^2)}{u-v} - \frac{uv(\Phi_1 \Phi_2 + \Psi_1 \Psi_2)}{u-v} + u-v = 0,$$

$$uv(u-v)(\Psi_1 \Phi_{2u} + \Psi_2 \Phi_{2v} - \Phi_1 \Psi_{2u} - \Phi_2 \Psi_{2v}) = \Phi_2 (u^2 \Psi_2 + v^2 \Psi_1).$$

*) Math. Ann. 58, S. 567, (5) und S. 566, (1) und (2).

Diese Art der Ableitung bestätigt also nicht nur die Richtigkeit der seinerzeit gefundenen Fundamentalgleichungen, sondern gibt auch Auskunft über die analytische Bedeutung der ersten und dritten Gleichung in unserm besondern Falle: diese Gleichungen sind nämlich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein von Funktionen R_1 und R_2 mit vorgegebenen Differentialquotienten

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} = \Phi_1, \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_2} = \Psi_1, \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_1} = \Phi_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_2} = \Psi_2.$$

Kiel, im Dezember 1910.