GENERALIZZAZIONE DI ALCUNI TEOREMI
INTORNO ALLE FUNZIONI SFERICHE
CONTENUTI IN UNA NOTA DEL PROF. PACI (*).

Da una lettera del prof. **Gegenbauer** al prof. **Paci**.

Adunanza dell'11 dicembre 1898.

.....
Per le funzioni $C_\lambda^v(\cos x)$ definite mediante l'equazione

$$(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)^{-v} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_\lambda^v(\cos x) \alpha^\lambda$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{1}{v} C_n^v(\cos x) \right]_{v=0} &= \frac{2}{n} \cos nx \quad \text{per } n > 0 \\ &= 1 \quad \text{per } n = 0 \end{aligned} \right\}$$

sussistono, come io ho fatto vedere nei *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der K. Akademie der Wissenschaften in Wien* (**), le relazioni:

(*) « Esposizione di due nuovi metodi per determinare l'espressione della densità in ogni punto di uno strato ellissoidico equipotenziale » (Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. VII, 2° sem. 1898, pp. 131-138).

(**) « Ueber einige bestimmte Integrale » (Band 70, S. 433-443).

$$\int_0^\pi C_\lambda^\nu(\cos x) C_\mu^\nu(\cos x) \sin^{2\nu} x dx$$

$$= \frac{2^{2\nu-1} \Pi(\mu + 2\nu - 1)}{(\mu + \nu) \Pi(\mu)} \left\{ \frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)} \right\}^2 \delta_{\lambda,\mu}$$

$$(\delta_{\lambda,\mu} = 0 \text{ se } \lambda \neq \mu; \quad \delta_{\lambda,\lambda} = 1)$$

$$C_n^\nu(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \chi)$$

$$= \frac{\Pi(2\nu-2)}{[\Pi(\nu-1)]^2} \sum_{\rho=0}^{n-1} \frac{4^\rho \Pi(n-\rho) [\Pi(n+\rho-1)]^2 (2\nu+2\rho-1)}{\Pi(2\nu+n+\rho-1)} \times$$

$$\times \sin^\rho \varphi \sin^\rho \psi C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(\cos \varphi) C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(\cos \psi) C_\rho^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos \chi).$$

Dalla prima di esse consegue, che il coefficiente a_λ di $C_\lambda^\nu(\cos \varphi)$ nello sviluppo della funzione $f(\cos \varphi)$ per le funzioni $C_\mu^\nu(\cos \varphi)$ è uguale a

$$\frac{(\lambda + \nu) \Pi(\lambda)}{2^{2\nu-1} \Pi(\lambda + 2\nu - 1)} \left\{ \frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right\}^2 \int_0^\pi f(\cos \varphi) C_\lambda^\nu(\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi.$$

Lo stesso è evidentemente nullo, se il grado di $f(x)$ è inferiore a λ .

Se ora si moltiplica la seconda delle relazioni addotte per

$$f(\cos \chi) \sin^{2\nu-1} \chi \sin^{2(\nu+\mu)} \varphi d\chi d\varphi$$

e si integra rispetto a χ e φ da 0 fino a π , si ottiene l'equazione

$$\int_0^\pi \int_0^\pi C_n^\nu(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \chi) f(\cos \chi) \sin^{2\nu-1} \chi \sin^{2(\nu+\mu)} \varphi d\chi d\varphi$$

$$= \frac{2^{2\nu-1} \Pi(2\nu-2)}{[\Pi(\nu-1)]^2} \sum_{\rho=0}^{n-1} \frac{4^\rho \Pi(n-\rho) \Pi(\rho+2\nu-2) [\Pi(\nu+\rho-1)]^2}{\Pi(\rho) \Pi(2\nu+n+\rho-1)} a_\rho \sin^\rho \psi C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(\cos \psi) \times$$

$$\times \int_0^\pi \sin^{2\mu-\rho} \varphi C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(\cos \varphi) \sin^{2(\nu+\rho)} \varphi d\varphi.$$

Se ora $f(x)$ è una funzione pari intera di grado 2τ , ed è

$$n > 2\mu \geq 2\tau,$$

le quantità a_ρ sono differenti da zero solamente per $\rho = 0, 2, 4, \dots, 2\tau$. Ma ora, poichè per questi valori di ρ si annullano gl'integrali sotto il segno sommatorio, così si ottiene l'equazione

$$\int_0^\pi \int_0^\pi C_n^{\nu}(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\chi) f(\cos\chi) \sin^{2\nu-1}\chi \sin^{2(\nu+\mu)}\varphi d\chi d\varphi = 0.$$

La stessa, a motivo della relazione

$$C_n^{\frac{1}{2}}(x) = P_n(x),$$

è una generalizzazione dei suoi notevoli teoremi.

Vienna, 16 novembre 1898.

L. GEGENBAUER.