ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 59.

1. *Über Sérienspektren nach dem Bohrschen Modell; von Franz Tank.*

Einleitung.

Es ist kaum zu bezweifeln, daß in den Bohrschen Ansätzen wesentliche Grundlagen der theoretischen Spektroskopie gefunden worden sind. Die glänzenden Erfolge der Untersuchungen von Bohr¹⁾, Sommerfeld²⁾, Debye³⁾, Epstein⁴⁾ u. a.⁵⁾, lassen kaum eine andere Auffassung zu. In schroffem Gegensatze stehen ihnen jedoch gegenüber all die Ergebnisse der Wellentheorie des Lichtes, die dem Physiker sozusagen Gewißheit geworden ist. Wie hier die Widersprüche zu lösen sind, und wie die Gegensätze sich ausgleichen lassen, wird eine der vornehmsten Aufgaben der weiteren Forschung sein; ob der gegenwärtige Stand unserer physikalischen Erkenntnisse dazu schon reif ist, läßt sich nicht mit Bestimmtheit bejahen.

Es erscheint aber von grundsätzlicher Wichtigkeit, die Bohrschen Ansätze bis in alle ihre Konsequenzen hinein zu verfolgen. Nur dadurch läßt sich ein Bild von ihrer Leistungsfähigkeit gewinnen, und es ist zu erwarten, daß man auf diesem Wege auch zu den Punkten gelange, wo neue Hypothesen einzusetzen haben. Ein solches Ziel setzt sich die vorliegende Arbeit. Unter vollkommener Beibehaltung der in der Quanten-

1) N. Bohr, Phil. Mag. **26.** p. 1, 476, 857. 1913; **27.** p. 506. 1914; **29.** p. 332. 1915. Ber. Kgl. Akad. Kopenhagen (8) IV. p. 1. 1918.

2) A. Sommerfeld, Münchener Ber. 1915. p. 425, 459; 1916. p. 131; Ann. d. Phys. **51.** 1916.

3) P. Debye, Münchener Ber. 1915. p. 1.

4) P. Epstein, Ann. d. Phys. **50.** p. 489, 815. 1916; **51.** p. 168. 1916.

5) Vgl. insbesondere die wertvolle, zusammenfassende Darstellung bei J. M. Burgers, Het Atoom-Model van Rutherford-Bohr, Haarlem 1918.

spektroskopie bis jetzt gebrauchten Ansätze und Vorstellungen wird versucht, den Bau der allgemeinen Serienterme darzustellen und zu deuten. Dabei wird der Ausgangspunkt möglichst allgemein gewählt (verallgemeinertes Atomfeld), so daß man durch schrittweises Spezialisieren von Schlüssen allgemeiner Natur zu solchen über die besonderen Eigenschaften einzelner Modelle gelangen kann. Es zeigt sich, daß man für Serien im optisch sichtbaren Gebiet anzunehmen hat, daß ein Elektron, das als „Serielektron“ bezeichnet wird, sich außerhalb der übrigen Elektronen des Atoms auf statischen Bahnen bewegt. Es gehört nicht mehr zum eigentlichen Atommodell, das von den „konstituierenden“ Elektronen gebildet wird, und ist auch nicht als Valenzelektron anzusehen; das Atom befindet sich bei der Serienmission in einem vom normalen abweichenden Zustand. Diese Anschauung führt in großer Allgemeinheit zu Serientermen vom Ritzschen Typus. Die allgemeine Anwendbarkeit der Ritzschen Serienformeln innerhalb des ganzen periodischen Systems wird dadurch verständlich. Ferner ergibt sich, daß die Vorstellung der komplanaren Elektronenbewegungen teilweise aufgegeben werden muß und räumliche Anordnungen an deren Platz zu treten haben; es wäre sonst z. B. das Auftreten negativer „ p “ in den Nennern der Hauptserienterme von He und Li kaum zu deuten. Die Durchführung spezieller Modellvorstellungen ergibt für die Hauptserienterme von Parhe, He und Li eine bemerkenswerte Anlehnung an die Erfahrung.

Für die Erklärung der Serienstruktur (Paare, Triplets) finden sich Anhaltspunkte, jedoch stellen sich hier der Durchführung der Theorie Schwierigkeiten entgegen. Ferner bleibt das Auftreten halber ganzer Zahlen im Nenner des Terms der zweiten Nebenserien, an dem man doch wohl festzuhalten hat, noch dunkel. Ebenso fällt auf die Entstehung der Bandenspektren kein Licht, so daß man den Ursprung der Bandenspektren wohl in ganz anders gearteten Atomfeldern oder überhaupt in anderen Vorgängen wird suchen müssen. Trotzdem ist es bemerkenswert, daß auf der bisherigen Basis der Quantenspektroskopie sich eine so allgemeine Darstellung der Serienspektren ergibt; es resultiert daraus unseres Erachtens eine wesentliche Stütze der Bohrschen Anschauungen. Ja, man hat es in der Hand, zu einem beliebig vorgeschriebenen Serienterm

ein entsprechendes Modell anzugeben, das mit jeder Genauigkeit den Term liefert; doch sind im Modell in den meisten Fällen dann ebensoviele Größen willkürlich festzulegen, als der Term empirische Konstante enthält. Es ist zu betonen, daß ein solches Verfahren nicht eindeutig und daher auch nicht überzeugend ist. Die Eindeutigkeit, eine der wichtigsten Forderungen der Modelltheorie, kann nur durch universelle Gesetze und Konstanten gesichert werden; darin liegt der wesentliche Fortschritt der auf Bohr fußenden Quantenspektroskopie.¹⁾ Die Erschließung und Bestätigung dieser universellen Gesetze und Konstanten des atomaren Elektronenaufbaues aus den empirisch bekannten Daten der Serien wäre als das ideale Ziel einer vollständigen Theorie der Serienspektren zu bezeichnen.

§ 1. Elektronenanordnungen und Atomfelder.

Die Theorie der allgemeinen Serienspektren hat vor allem schon Sommerfeld in Angriff genommen.²⁾ Er setzt voraus, daß die konstituierenden Elektronen sich auf einen Ring um den Kern bewegen und untersucht die statischen Bahnen des Serienelektrons in dieser Ringebene. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Wirkung der inneren Elektronen in größeren Entfernungen durch eine gleichmäßige Verteilung der Ladungen auf der Kreisbahn ersetzt werden kann, und daß man im Mittel von einem wechselseitigen Energieaustausch des äußeren Elektrons mit den Elektronen des Ringes absehen darf, erhält er die Terme der Hauptserien, der ersten Nebenserien und der Bergmannserien, und zwar in zweiter Näherung in Rydbergscher, in dritter Näherung in Ritzscher Form. Der Erfolg dieser Betrachtungen ist in der Tat viel versprechend, wenn sie auch noch nicht zu quantitativ durchgeführten Resultaten geführt haben. Auf jeden Fall ist dadurch der Entwicklung der Weg gedeutet, und Sommerfeld selbst hat die nächsten Schritte, die zu tun sind, hervorgehoben: Verallgemeinerung der Voraussetzungen durch einen allgemeinen Ansatz für das Atomfeld; ferner Ausdehnung der Betrachtungen auf den Raum.

Die vorliegende Arbeit schließt sich in manchem unmittelbar an die Sommerfeldsche Abhandlung an. Die Notwendigkeit,

1) Vgl. auch A. Sommerfeld, Münchener Ber. 1916. p. 131.

2) A. Sommerfeld, Münchener Ber. 1916. p. 131.

im Bohrschen Modell „von der Planimetrie zur Stereometrie des Modells“ (Sommerfeld) überzugehen, hat sich mehr und mehr erwiesen. Es sind vor allem Stabilitätsgründe, die dies erfordern. Schon Nicholson¹⁾ hat darauf hingewiesen, daß ein konzentrisches, ebenes System vielfach besetzter Elektronenringe für Störungen in der Ringebene nicht stabil sei.²⁾ Es hat dann Föppl³⁾ auf Grundlage des Bohrschen Stabilisierungsprinzips für einfachere Ringanordnungen Stabilitätsrechnungen durchgeführt und findet, daß für eine größere Zahl von Elektronen ein einzelner Ring nicht mehr stabil sein kann; er bemerkt, daß man die stabilen Konfigurationen in räumlichen Gruppierungen zu suchen habe. Auch Sommerfeld⁴⁾ kommt dazu, daß eine räumliche Lagerung verschiedener Elektronenringe stabiler sein müsse, als die komplanare. Es haben ferner die Untersuchungen von Reiche und Smekal⁵⁾ über den Ursprung der Röntgen- K_α -Linie gezeigt, daß die innersten Elektronenringe offenbar räumlich gegeneinander geneigt sind. Auch unsere Ergebnisse am He und Li-Spektrum werden diese Möglichkeit als unter Umständen notwendig erweisen.

Es erhebt sich daher als nächstes die Frage nach möglichst einfachen räumlichen Elektronenanordnungen bzw. nach speziellen Lösungen des n -Körperproblems. Als solche Lösungen kommen vor allem in Betracht Bewegungen der Elektronen auf parallelen Kreisbahnen mit gemeinsamer Achse, wobei sowohl in den Abmessungen der Bahnen, als in ihrer Besetzung mit Elektronen Symmetrie bezüglich der Äquatorebene durch den Kern und der Meridianebenen durch die Elektronen herrscht. Solche Lösungen sind zum Teil schon von Nicholson⁶⁾ angegeben worden. Aus Symmetriegründen geht die resultierende Kraft auf ein Elektron durch die Rotationsachse; durch passenden Abstand der Ringebenen voneinander wird bewirkt, daß diese Kraft auch senkrecht auf der Rotations-

1) J. W. Nicholson, *Phil. Mag.* **23**, p. 90, 541. 1914.

2) Gegen stark besetzte Elektronenringe spricht auch unsere Bemerkung p. 329 (falsches Vorzeichen vor π).

3) Ludwig Föppl, *Phys. Zeitschr.* p. 15, 707. 1914.

4) A. Sommerfeld, *Phys. Zeitschr.* p. 19, 297. 1918.

5) F. Reiche und A. Smekal, *Ann. d. Phys.* **57**, p. 124. 1918.

6) J. W. Nicholson, *Month. Not.* **74**, p. 434 u. 435. 1914; *Phil. Mag.* **27**, p. 560. 1914; **28**, p. 90. 1914.

achse steht. Sind nun noch die Bahnradien richtig gewählt, so können die verschiedenen Elektronenringe mit gemeinsamer, konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren; das ganze System bewegt sich in relativ starrer Konfiguration. Ändert man alle Abmessungen des Atoms im selben Verhältnis, so ändern sich auch alle Kräfte proportional zu einander und bleiben in ihren Richtungen erhalten. Die Gleichgewichtskonfiguration bleibt also möglich, wenn das Atom mit einer neuen, geeigneten Winkelgeschwindigkeit rotiert; d. h. die geschilderten Modelle behalten bei veränderter Winkelgeschwindigkeit geometrisch ähnliche Gestalt. Analog den höheren Anordnungen im Thomsonschen Modell, wie sie Föppl¹⁾ untersucht hat, wäre zu erwarten, daß durch die Stabilitätsbedingungen gewisse Anordnungstypen ausgeschieden werden, die in einer gewissen Abhängigkeit von der Zahl der Elektronen des Atoms stehen und zur Erklärung des periodischen Systems der Elemente herangezogen werden können.

In Wirklichkeit werden auch solche Modelle vielleicht zu speziell sein. Es wäre von großem Interesse, andere Klassen von Lösungen des n -Körperproblems im Raume zu finden, die im wesentlichen aus Symmetriebetrachtungen hervorgehen.

Vorläufig wollen wir keine besonderen Annahmen über das Modell machen und unseren Ausgangspunkt möglichst allgemein wählen. Dazu wenden wir uns zur Betrachtung der Atomfelder. Mit Sommerfeld denken wir uns die Ladungen der konstituierenden Elektronen auf deren Bahnen verteilt und lassen eine Rückwirkung des Serienelektrons auf letztere unberücksichtigt.²⁾ Dadurch büßen wir an Genauigkeit der Rechnung ein; doch haben wir Aussicht, zu brauchbaren Mittelwerten zu gelangen. Von magnetischen Kräften³⁾ und Berücksichtigung der Relativität sehen wir ab.

Das Atomfeld kommt zustande durch Überlagerung des rein Coulombschen Feldes des Atomkernes (Ladung E_0) und

1) L. Föppl, Diss. München 1912.

2) Über die Behandlung von Störungsproblemen im Zusammenhang mit der Quantentheorie vgl. J. M. Burgers „Het Atoom-Model van Rutherford-Bohr“, Kap. IV, Haarlem 1918.

3) Über den Einfluß des Magnetfeldes eines Ringes auf die Bewegungen eines Elektrons in der Ringebene vgl. auch A. Sommerfeld, Münch. Ber. 1916, p. 166; er ist gering.

des Feldes, das von den Elektronenladungen ausgeht. Das Potential für ein Elektron in einem Punkte des Atomfeldes läßt sich daher mit Hilfe von Kugelfunktionen wie folgt darstellen:

$$V = -\frac{e E_0}{r} + \sum_k \frac{e e_k}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho_k}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma_k) \\ + \sum_i \frac{e e_i'}{\varrho_i'} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho_i'}\right)^m P_m(\cos \gamma_i'),$$

oder:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} V = & -\frac{e(E_0 - \sum_k e_k)}{r} + \left\{ \sum_k \frac{e e_k}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_k}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma_k) \right. \\ & \left. + \sum_i \frac{e e_i'}{\varrho_i'} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho_i'}\right)^m P_m(\cos \gamma_i') \right\}. \end{aligned} \right.$$

Es ergibt sich ein Coulombsches Feld mit einer Reihe von Zusatzgliedern. Das positive Vorzeichen der Kernladung E_0 und das negative der auf die Bahnen verteilten Elektronenladungen e_k bzw. e_i' ist bereits berücksichtigt. Mit e ist die Ladung des betrachteten Elektrons bezeichnet, mit r seine Entfernung vom Kern; ϱ_k und ϱ_i' bedeuten die Entfernungen der Ladungen e_k bzw. e_i' vom Kern. P_n und P_m sind die n te bzw. m te Kugelfunktion mit dem Argument $\cos \gamma_k$ bzw. $\cos \gamma_i'$, γ_k und γ_i' die Winkel zwischen ϱ_k und r bzw. ϱ_i' und r . Die Zusatzglieder in der geschweiften Klammer zerfallen in zwei Gruppen, entsprechend ihrer Erzeugung durch außerhalb (k) oder innerhalb (i) des betrachteten Elektrons gelegene Ladungen.

Unter der Voraussetzung gewisser Symmetrien läßt sich das Bewegungsproblem nun quantentheoretisch behandeln. Im folgenden werden zwei Fälle durchgeführt. Im ersten Fall (§ 2) wird ein Feld mit axialer Symmetrie angenommen, herrührend von Ladungen, die sich innerhalb der Bahnen des betrachteten Elektrons befinden. Entsprechend dem Näherungsgrade (zweite Näherung), mit dem die Rechnung durchführbar ist, ergeben sich in sehr allgemeiner Weise Serienterme vom Rydbergschen Typus

$$(2) \quad S = \frac{N}{(n + a_s)^2}.$$

Im zweiten Fall (§ 3) wird ein Potentialfeld vorausgesetzt, das die quantentheoretische Behandlung des Problems in räumlichen Polarkoordinaten mit jeder Näherung gestattet. Man wird insbesondere auf Formeln vom Ritzschen Typus geführt (dritte Näherung)

$$(3) \quad S = \frac{N}{\left(n + a + \frac{\alpha}{n^2}\right)^2}$$

$$\text{bez. (4)} \quad S = \frac{N}{\left[n + a + \alpha(A - \nu)\right]^2}; \quad A - \nu = S$$

und erkennt deren allgemeine Bedeutung.

§ 2. Die Rydbergsche Form der Serienterme.

Wir setzen voraus, daß die Bahnen der konstituierenden Elektronen Symmetrie bezüglich einer Achse aufweisen, und daß sich das „Serienelektron“ auf statischen Bahnen außerhalb dieser Anordnung bewege. Wir zeigen, daß in genügender Entfernung vom Kern das Potentialfeld bis auf Glieder höherer als dritter Ordnung dasselbe ist, wie dasjenige eines Dipols von den Ladungen E' und E'' und der Breite $2c$ (Abstand der Ladungen). Das Bewegungsproblem des Serienelektrons reduziert sich dann auf die Untersuchung einer Bewegung unter dem Einfluß zweier fester anziehender Zentren, die mit Hilfe elliptischer Koordinaten sich streng durchführen läßt.¹⁾

Die bevorzugte Achse sei die Z -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Das System der Ladungen der konstituierenden Elektronen läßt sich unter den gemachten Voraussetzungen in ein System koachsialer und zur X - Y -Ebene paralleler Ringe zerlegen mit gewissen negativen Ladungen $E_1, E_2, \dots, E_s$. Das gesamte Potential ist die Summe der Potentiale dieser Ringe.

Fig. 1.

1) Vgl. z. B. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 29.

Für das Potential eines einzelnen Ringes vom Radius a , dem Abstand b von der X - Y -Ebene und der Ladung E_1 gilt

$$V_1 = \frac{e E_1}{2 \pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varrho},$$

wenn wir das Potential gleich auf die Ladung $-e$ des Elektrons beziehen. Es ist, wie aus der Fig. 1 ersichtlich, ϱ die Entfernung eines Bahnelementes vom Elektron, also in räumlichen Polarkoordinaten:

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 + b^2 - 2r(b \cos \Theta + a \sin \Theta \cos \varphi)$$

oder da

$$-\cos \varphi = 1 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\varrho^2 = r^2 \left\{ 1 + \frac{a^2 + b^2}{r^2} - \frac{2}{r} (a \sin \Theta - b \cos \Theta) - \frac{4 a \sin \Theta \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{r} \right\}$$

und daher

$$V_1 = \frac{e E}{2 \pi r} \cdot \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{a^2 + b^2}{r^2} + \frac{2}{r} (a \sin \Theta - b \cos \Theta)}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Rechterhand steht das bekannte vollständige Legendresche elliptische Integral erster Art F mit dem Modul

$$k^2 = \frac{4 a \sin \Theta}{r \left[1 + \frac{a^2 + b^2}{r^2} + \frac{2}{r} (a \sin \Theta - b \cos \Theta) \right]}.$$

Wir führen Reihenentwicklungen ein, indem a/r und b/r als klein gegen 1 betrachtet werden, und erhalten

$$V_1 = \frac{e E_1}{r} \left\{ 1 + \frac{b}{r} \cos \Theta - \frac{2 b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{1}{2 r^2} + \frac{2 b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{3}{2 r^2} \cos^2 \Theta + \dots \right\}.$$

Sind s Ringe vorhanden mit den Radien a_s , den Abständen von der X - Y -Ebene b_s und den negativen Ladungen E_s , und nehmen wir noch den Kern mit der positiven Ladung E_0 hinzu, so lautet der Ausdruck für das Potential des ganzen Systems

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{e E_0}{r} + \sum_s \frac{e E_s}{r} \left\{ 1 + \frac{b_s}{r} \cos \Theta - \frac{2 b_s^2 - a_s^2}{2} \cdot \frac{1}{2 r^2} \right. \\ \left. + \frac{2 b_s^3 - a_s^3}{2} \cdot \frac{3}{2 r^2} \cos^2 \Theta + \dots \right\} . \end{aligned} \right.$$

Hiermit vergleichen wir nun das Potential zweier positiver Ladungen E' und E'' , die sich auf der Z-Achse befinden in Abständen b' und b'' vom Koordinatenmittelpunkt (Kern). Dieses ist

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{e}{r} \left\{ (E' + E'') + \frac{E' b' + E'' b''}{r} \cos \Theta - \frac{E' b'^2 + E'' b''^2}{2 r^2} \dots \right. \\ \left. + \frac{3 (E' b'^2 + E'' b''^2)}{2 r^2} \cos^2 \Theta + \dots \right\} . \end{aligned} \right.$$

Über E' , E'' , b' , b'' läßt sich nun so verfügen, daß folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$(7) \quad E_0 - \sum_s E_s = E' + E'',$$

$$(8) \quad \sum_s E_s b_s = -(E' b' + E'' b''),$$

$$(9) \quad \sum_s E_s \frac{2 b_s^2 - a_s^2}{2} = -(E' b'^2 + E'' b''^2).$$

Damit ist die Behauptung erwiesen, daß bis auf Glieder höherer als dritter Ordnung das Feld unseres Atommodells als Feld zweier auf der Symmetrieachse liegender Ladungen betrachtet werden kann. Für Symmetrie zur X-Y-Ebene gilt insbesondere

$$\sum_s E_s b_s = 0,$$

also

$$b' = -b'' \quad \text{und} \quad E' = E'' = \frac{E}{2},$$

wenn mit E die „wirksame Kernladung“, d. h. der Überschuß der Kernladung über die Elektronenladungen, bezeichnet wird; ferner ist

$$(9') \quad b'^2 = b''^2 = -\frac{1}{E} \sum_s E_s \frac{2 b_s^2 - a_s^2}{2}.$$

Daß diese Quadrate unter Umständen negativ werden können, bedeutet keine Einschränkung.

Wir denken uns also das Atom reduziert auf zwei Ladungen E' und E'' im Abstand $b' - b'' = 2c$ und können nun in der angegebenen Näherung die Bewegungsgleichungen des

Serienelektrens aufstellen, wenn wir mit Jacobi elliptische Koordinaten einführen. Wir definieren als solche

Fig. 2.

$$\lambda = \frac{r' + r''}{2},$$

$$\mu = \frac{r' - r''}{2},$$

wo r' und r'' die Abstände des Elektrons von den Dipolladungen E' und E'' sind; dazu führen wir als dritte Koordinate das Azimut φ der durch Dipol und Elektron gehenden Meridianebene ein. Die wesentliche Aufgabe besteht nun in der Er-

mittlung der statischen Bahnen und der ihnen zukommenden Energiewerte, welche letztere bis auf den Faktor h die gesuchten Serienterme darstellen. Dazu haben wir die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung in den Koordinaten λ, μ, φ und deren Impulsen $p_\lambda, p_\mu, p_\varphi$ zu bilden.

Da unser vereinfachtes Bewegungsproblem zur Klasse der bedingt periodischen Bewegungen gehört, gestattet diese Differentialgleichung Separation der Variablen. Wir werden daher die Formulierung der Quantenbedingungen nach Epstein¹⁾ durchzuführen haben.

Wir erhalten in den Koordinaten λ, μ, φ für das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = \frac{(\lambda^2 - \mu^2) d\lambda^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{(\lambda^2 - \mu^2) d\mu^2}{c^2 - \mu^2} + \frac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2) d\varphi^2}{c^2},$$

und daraus für die lebendige Kraft

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \left\{ \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} \dot{\mu}^2 + \frac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2} \dot{\varphi}^2 \right\}.$$

Für die Impulse folgt:

$$p_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = m \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} \dot{\lambda},$$

$$p_\mu = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mu}} = m \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} \dot{\mu},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m \frac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2} \dot{\varphi}.$$

1) P. Epstein, Ann. d. Phys. 50. p. 489. 1916; 51. p. 168. 1916; Verhandl. d. Deutschen Phys. Ges. 19. p. 116. 1917.

Für das Potential ergibt sich

$$V = -\frac{e E'}{r'} - \frac{e E''}{r''} = -\frac{e E'}{\lambda + \mu} - \frac{e E''}{\lambda - \mu}.$$

Führt man in den Ausdruck der lebendigen Kraft die Impulse ein, und setzt in bekannter Weise

$$p_\lambda = \frac{\partial W}{\partial \lambda},$$

$$p_\mu = \frac{\partial W}{\partial \mu},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi},$$

so lautet die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left\{ \frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{c^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \\ & - \frac{e}{\lambda^2 - \mu^2} \{ E'(\lambda - \mu) + E''(\lambda + \mu) \} = H. \end{aligned} \right.$$

Mit H ist, wie ersichtlich, die Energiekonstante bezeichnet. Man überzeugt sich leicht, daß Separation der Variablen möglich ist und wird daher setzen

$$W = W_\lambda + W_\mu + W_\varphi,$$

wo $W_\lambda, W_\mu, W_\varphi$ nur je Funktionen von λ, μ, φ sind. Die Quantenbedingungen nach Epstein lauten nun

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} J_\lambda &= \int_0^{\frac{\partial W_\lambda}{\partial \lambda}} d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{d\lambda}{\lambda^2 - c^2}} \sqrt{(\lambda^2 - c^2)[2mH\lambda^2 + 2me(E' + E'')\lambda - A^2] - \lambda^2 B^2} = n_1 h, \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} J_\mu &= \int_0^{\frac{\partial W_\mu}{\partial \mu}} d\mu \\ &= \int_0^{\frac{d\mu}{c^2 - \mu^2}} \sqrt{(\mu^2 - c^2)[2mH\mu^2 + 2me(E' - E'')\mu - A^2] - \mu^2 B^2} = n_2 h, \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad J_\varphi = \int_0^{\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}} d\varphi = \int_0^B B d\varphi = n_3 h.$$

Die A und B sind Integrationskonstanten. Von diesen Integralen, den sogenannten Periodizitätsmoduln der Jacobischen Wirkungsfunction, sind die beiden ersten elliptische Integrale.

Ihre Darstellung durch bekannte elliptische Integrale stößt auf weitläufige rechnerische Schwierigkeiten. Uns daran erinnernd, daß c von der Größenordnung der Abmessung der Bahnen der konstituierenden Elektronen ist, und λ von der Größenordnung der Entfernung des Elektrons vom Kern, werden wir die Wurzeln nach Potenzen von c/λ entwickeln und gliedweise Integration vornehmen. Die Entwicklung können wir bei Gliedern von der Größenordnung c^2/λ^2 abbrechen, da nur soweit die Identität unseres Dipols mit dem Atommodell realisiert ist. Es ergibt sich

$$(14) \left\{ \begin{aligned} J_\lambda &= \int_0^{\frac{d\lambda}{\lambda}} \sqrt{2mH\lambda^2 + 2me(E' + E'')\lambda - (A^2 + B^2)} \\ &+ \frac{c^2}{2} \int_0^{\frac{d\lambda}{\lambda^3}} \sqrt{2mH\lambda^2 + 2me(E' + E'')\lambda - (A^2 + B^2)} \\ &- \frac{c^2}{2} \int_0^{\frac{d\lambda}{\lambda^3}} \frac{B^2}{\sqrt{2mH\lambda^2 + 2me(E' + E'')\lambda - (A^2 + B^2)}} + \dots \end{aligned} \right.$$

Diese Integrale wollen wir mit J_1 , J_2 und J_3 bezeichnen; wir werten sie mit Hilfe des Residuensatzes in der komplexen Zahlenebene aus.¹⁾ Es ist:

$$(15) \left\{ \begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\frac{d\lambda}{\lambda}} \sqrt{2mH\lambda^2 + 2me(E' + E'')\lambda - (A^2 + B^2)} \\ &= -2\pi i \left\{ -\sqrt{-(A^2 + B^2)} - \frac{me(E' + E'')}{\sqrt{2mH}} \right\} \\ &= -2\pi \sqrt{A^2 + B^2} + \frac{2\pi me(E' + E'')}{\sqrt{-2mH}}. \end{aligned} \right.$$

$$(16) \left\{ \begin{aligned} J_2 &= \frac{c^2}{2} \int_0^{\frac{d\lambda}{\lambda^3}} \sqrt{2mH\lambda^2 + 2me(E' + E'')\lambda - (A^2 + B^2)} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{c^2}{2} \sqrt{-(A^2 + B^2)} \left\{ -\frac{mH}{A^2 + B^2} - \frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 (E' + E'')^2}{(A^2 + B^2)^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(17) \left\{ \begin{aligned} J_3 &= -\frac{c^2}{2} \int_0^{\frac{d\lambda}{\lambda^3}} \frac{B^2}{\sqrt{2mH\lambda^2 + 2me(E' + E'')\lambda - (A^2 + B^2)}} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \frac{B^2}{\sqrt{-(A^2 + B^2)}} \left\{ -\frac{mH}{A^2 + B^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 e^2 (E' + E'')^2}{(A^2 + B^2)^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Um J_μ zu berechnen, setzen wir $\mu = c \cdot z$, und es gilt dann:

1) Vgl. z. B. A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. p. 17, 500. 1916.

$$(18) \left\{ \begin{aligned} J_{\mu} &= \int_0^1 \frac{d\kappa}{1-\kappa^2} \sqrt{A^2 - (A^2 + B^2)\kappa^2} \\ &\quad - m e (E' - E'') c \int_0^1 \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{A^2 - (A^2 + B^2)\kappa^2}} \\ &\quad - m H c^2 \int_0^1 \frac{\kappa^2 d\kappa}{\sqrt{A^2 - (A^2 + B^2)\kappa^2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} m^2 e^2 (E' - E'')^2 c^2 \int_0^1 \frac{\kappa^2 (1 - \kappa^2) d\kappa}{[A^2 - (A^2 + B^2)\kappa^2]^{3/2}} + \dots \end{aligned} \right.$$

Diese Integrale behandeln wir einzeln analog wie die obigen und erhalten

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \int_0^1 \frac{d\kappa}{1-\kappa^2} \sqrt{A^2 - (A^2 + B^2)\kappa^2} \\ &= -2\pi i \left\{ \sqrt{-(A^2 + B^2)} - \sqrt{-B^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(20) \quad \mathfrak{J}_2 = -m e (E' - E'') c \int_0^1 \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{A^2 - (A^2 + B^2)\kappa^2}} = 0.$$

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{J}_3 &= -m H c^2 \int_0^1 \frac{\kappa^2 d\kappa}{\sqrt{A^2 - (A^2 + B^2)\kappa^2}} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{c^2}{2} \cdot m H \cdot \frac{A^2}{(-A^2 - B^2)^{3/2}}. \end{aligned} \right.$$

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{J}_4 &= -\frac{1}{2} m^2 e^2 (E' - E'')^2 c^2 \int_0^1 \frac{\kappa^2 (1 - \kappa^2) d\kappa}{[A^2 - (A^2 + B^2)\kappa^2]^{3/2}} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2} m^2 e^2 (E' - E'')^2 c^2 \left\{ -\frac{1}{(-A^2 - B^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{A^2}{(-A^2 - B^2)^{5/2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Als erste Näherung ergibt sich unter Vernachlässigung der mit c^2 multiplizierten Glieder aus (18) und (19)

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{h}{2\pi} (n_2 + n_3); \quad A^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} [(n_2 + n_3)^2 - n_3^2],$$

und dies zusammen mit (11)

$$(23) \quad H = -\frac{2\pi^2 m e^2 (E' + E'')^2}{h^3 (n_1 + n_2 + n_3)^2}.$$

Dieser Energiekonstanten entspricht ein Serienterm

$$S = \frac{2\pi^2 m e^2 (E' + E'')^2}{h^3 (n_1 + n_2 + n_3)^2} = \frac{N}{(n_1 + n_2 + n_3)^2}.$$

Wie zu erwarten, sind wir in erster Näherung zu einem vollkommen wasserstoffähnlichen Term gelangt (Balmerische Formel), wie ja auch das System der elliptischen Koordinaten in Polarkoordinaten übergeht, wenn man die beiden Brennpunkte E' und E'' zusammenrücken läßt. Bei Berücksichtigung weiterer Näherungen ist der Serienterm zu schreiben

$$(24) \quad S = \frac{2\pi^2 m e^2 (E' + E'')^2}{h^3 (n_1 + n_2 + n_3 + \Delta n_1 + \Delta n_2)^3},$$

und man berechnet mit Hilfe der Gleichungen (14) bis (22) für die Korrektionsgrößen Δn_1 und Δn_2

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta n_1 = -\frac{1}{h} \left\{ \frac{c^2}{2} m H \frac{2\pi A^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} \right. \\ \left. + \frac{c^2}{2} \cdot 2\pi m^2 e^2 (E' + E'')^2 \cdot \frac{2B^2 - A^2}{2(A^2 + B^2)^{5/2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta n_2 = -\frac{1}{h} \left\{ -\frac{c^2}{2} m H \frac{2\pi A^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} \right. \\ \left. - \frac{c^2}{2} \cdot 2\pi m^2 e^2 (E' - E'')^2 \cdot \frac{2B^2 - A^2}{2(A^2 + B^2)^{5/2}} \right\}, \end{aligned} \right.$$

oder

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta n_1 = \frac{2\pi^2 c^2 m N}{h (n_1 + n_2 + n_3)^2} \cdot \frac{(n_2 + n_3)^2 - n_2^2}{(n_2 + n_3)^3} \\ + \frac{4\pi^4 c^2 m^2 e^2 (E' + E'')^2}{h^4} \cdot \frac{(n_2 + n_3)^2 - 3n_2^2}{(n_2 + n_3)^5} \end{aligned} \right.$$

und

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta n_2 = -\frac{2\pi^2 c^2 m N}{h (n_1 + n_2 + n_3)^2} \cdot \frac{(n_2 + n_3)^2 - n_2^2}{(n_2 + n_3)^3} \\ - \frac{4\pi^4 c^2 m^2 e^2 (E' - E'')^2}{h^4} \cdot \frac{(n_2 + n_3)^2 - 3n_2^2}{(n_2 + n_3)^5}. \end{aligned} \right.$$

Die gesamte Korrektur wird daher

$$(I) \quad \Delta n = \Delta n_1 + \Delta n_2 = \frac{16\pi^4 c^2 m^2 e^2 E' E''}{h^4 (n_2 + n_3)^3} \left(1 - \frac{3n_2^2}{(n_2 + n_3)^2} \right).$$

Damit ist das Ziel unserer Rechnung erreicht.

Entsprechen die Grundlagen, auf die wir unsere Ableitung stützen, einigermaßen der Wirklichkeit, so werden wir erwarten dürfen, daß unserer Formel (1) für eine erste Orientierung im Gebiete der nicht wasserstoffähnlichen Serienspektren eine recht allgemeine Anwendbarkeit zukommt. Setzen wir fest, daß n_2 und n_3 feste Werte behalten sollen, während n_1 die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchlaufen kann, so nimmt

der von uns hergeleitete Serienterm die Rydbergsche Form (2) an, wo nun

$$(29) \quad \Delta n = a$$

zu setzen ist. Die Terme der Hauptserien, der ersten Nebenserien und der Bergmannserien ergeben sich wie bei Sommerfeld¹⁾ durch geeignete Wahl der Quantenzahlen. Für die Halbzahligkeit der Termnenner der zweiten Nebenserien finden sich auch bei uns keine Anhaltspunkte. Doch ist gegenüber Sommerfeld vor allem der Fortschritt erzielt, daß — entsprechend der Ausdehnung der Betrachtung auf den Raum — drei voneinander unabhängige Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 auftreten; Sommerfelds zweite Näherung ist in unserer Formel als Spezialfall enthalten. Die Anpassung an die Erfahrung hat dadurch reichere Möglichkeiten. Insbesondere kann je nach der Wahl der Quantenzahlen oder je nach dem Vorzeichen von c^2 die Größe a im Rydbergschen Serienterm positiv oder negativ werden, während Sommerfeld ein negatives a noch nicht zu erklären vermag. Ein negatives Vorzeichen von c^2 , d. h. imaginäre Dipolbreite, ist durchaus möglich; wir hatten darauf schon hingewiesen.²⁾ Das System gestreckter Rotationsellipsoide, das die Flächen konstanter λ bilden, mit Brennpunkten im Abstand $2c$ auf der Z -Achse, ist dann übergegangen in ein System abgeplatteter Rotationsellipsoide. Im Meridianschnitt ergibt sich ein System konfokaler Kegelschnitte, deren Brennpunkte nicht mehr auf der Z -Achse liegen, sondern im Abstand $\pm c$ von der Z -Achse entfernt in der X - Y -Ebene. Der Größe c kommt die Bedeutung einer wichtigen, das Atom in seinem allgemeinen Aufbau (gestreckt, flach) charakterisierenden Konstanten zu. Für das Vorzeichen von a ergeben sich somit folgende Bedingungen:

Tabelle 1.
Vorzeichen von a .

Modell	c^2	$a > 0$	$a < 0$
flach	< 0	$n_2 + n_3 < \sqrt{3} n_1$	$n_2 + n_3 > \sqrt{3} n_1$
gestreckt	> 0	$n_2 + n_3 > \sqrt{3} n_1$	$n_2 + n_3 < \sqrt{3} n_1$

1) A. Sommerfeld, Münchener Ber. 1916. p. 160.

2) Vgl. p. 301.

Die geometrische Interpretation dieser Bedingungen ist leicht, wenn man sich vergegenwärtigt, daß n_3 die dem Winkel φ zugeordnete azimutale Quantenzahl ist und n_2 in erster Näherung diejenige des Polarwinkels Θ , da bis auf Glieder höherer Ordnung $\mu = c \cos \Theta$ ist. Ist das Modell wesentlich eben, so ergibt sich ein negatives Vorzeichen von a dann, wenn die Bahnen des Serienelektrons gegen die Modellebene genügend geneigt sind ($n_2 \gg n_3$); beim gestreckten Modell, das als solches ja schon räumlich zu denken ist, darf im Gegenteil die Neigung zur Äquatorebene nicht zu stark sein ($n_2 \ll n_3$). Entsprechend ist die Überlegung für positives Vorzeichen von a . Die Notwendigkeit räumlicher Betrachtungen und die Wahrscheinlichkeit räumlicher Modelle erhellt daraus genügend.

Daß unsere Formel I auch über die Struktur der Serien (Paare, Triplets) Auskunft gebe, dürfen wir in Anbetracht des immerhin ziemlich rohen Grades unserer Näherung kaum erwarten. Obwohl den Quantenzahlen n_2 und n_3 verschiedene Rollen zufallen, ist eine verschiedene Wahl von n_2 und n_3 bei konstant gehaltenem Werte von $n_2 + n_3$ nicht geeignet, das Auftreten von Paaren oder Triplets zu erklären; die entsprechenden Änderungen von Δn sind zu grob. Man wird die Erklärung der Serienstruktur in einer feineren Mitwirkung der konstituierenden Elektronen suchen müssen. Dagegen ergibt sich die Möglichkeit, daß unter Umständen komplizierte Seriensysteme auftreten können.

Das charakteristische Korrektionsglied von Ritz, a/n^2 bzw. $a(A - \nu)$ liefert Gleichung (I) noch nicht, obwohl die Gleichungen (27) und (28) es bereits enthalten. Man kann sich durch Rechnung überzeugen, daß eine weitere Näherung, die Glieder mit c^4 noch berücksichtigt, es enthält. Doch läßt sich, wie bereits bemerkt, ein axial-symmetrisches Modell nicht mehr allgemein durch einen Dipol bis auf Glieder dieser Ordnung ersetzen; damit entfällt der Wert der Durchführung einer weiteren Näherung. Daß die Glieder in Gleichung (27) und (28), die im Nenner ($n_1 + n_2 + n_3$) enthalten, sich im Ausdruck für Δn herausheben, ist nicht zufällig. Denn setzt man eine der Ladungen E' oder E'' gleich Null, so geht die Bewegung des Elektrons in eine reine Keplerbewegung über; Δn verschwindet und wir erhalten einen rein wasserstoffähnlichen

Serienterm. Wie Epstein¹⁾ gezeigt hat, muß die Behandlung der Keplerbewegung in jedem orthogonalen Koordinatensystem zu den Termen der Balmerformel führen; dadurch ist dieses Bewegungsproblem als entartetes im Sinne Schwarzschilds und Epsteins gekennzeichnet.

Quantitative Vergleiche sollen im § 4 gezogen werden.

§ 3. Die Ritzsche Form der Serienterme.

Ausschlaggebend für die Durchführbarkeit der quantentheoretischen Behandlung eines Bewegungsproblems ist die Möglichkeit, dasselbe durch bedingt periodische Bewegungen zu approximieren. Ein Beispiel haben wir soeben gegeben. Nun soll das Atomfeld der Beschränkung unterworfen werden — sei es durch Symmetriebedingungen oder durch gewisse Mittelwertshildungen —, daß die Bewegung des Serienelektrons in diesem Atomfeld eine (genähert) bedingt periodische ist und in räumlichen Polarkoordinaten behandelt werden kann. Dieses Koordinatensystem wählen wir wegen seiner Einfachheit. Es muß also die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung in räumlichen Polarkoordinaten separierbar sein. Wir gehen daran, sie aufzustellen und leiten daraus die Bedingungen ab, denen das Potentialfeld zu genügen hat.

Der Ausdruck für die lebendige Kraft lautet in räumlichen Polarkoordinaten

$$T = \frac{m}{2} \{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2 + r^2 \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2 \}.$$

Daher die Impulse

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r},$$

$$p_\Theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} = m r^2 \dot{\Theta},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \Theta \dot{\varphi}.$$

Wir setzen

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r},$$

$$p_\Theta = \frac{\partial W}{\partial \Theta},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

1) P. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 168. 1916.

und erhalten die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$(30) \quad \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \Theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + V = H.$$

V und H bedeuten wiederum Potential und Gesamtenergie. Gemäß Formel (1) machen wir für V den Ansatz

$$(31) \quad V = V_0 + \Delta V,$$

wo

$$(32) \quad V_0 = -\frac{eE}{r}$$

als Hauptglied das reine Coulombsche Feld darstellt (E Differenz von Kernladung und Summe der Ladungen, die sich innerhalb der Bahnen des Serienelektrons befinden), und ΔV die Zusatzglieder in Form von Reihenentwicklungen enthält. Man überzeugt sich leicht, daß Separation der Variablen möglich ist, wenn ΔV in drei Glieder zerfällt

$$(33) \quad \Delta V = \Delta V_r + \frac{\Delta V_\Theta}{r^2} + \frac{\Delta V_\varphi}{r^2 \sin^2 \Theta}$$

und ΔV_r , ΔV_Θ , ΔV_φ nur Funktionen von r , Θ bzw. φ allein sind. Wir werden daher schreiben

$$W = W_r + W_\Theta + W_\varphi,$$

wo W_r , W_Θ , W_φ je nur von r , Θ , φ abhängen und können nach Epstein die Quantenbedingungen aufstellen

$$(34) \quad \int_0^{\frac{\partial W_r}{\partial r}} dr = \int_0^{\frac{dr}{r}} \sqrt{2mr^2 H - 2mr^2(V_0 + \Delta V_r) - A^2} = n_1 h,$$

$$(35) \quad \int_0^{\frac{\partial W_\Theta}{\partial \Theta}} d\Theta = \int_0^{\frac{d\Theta}{\sin \Theta}} \sqrt{A^2 \sin^2 \Theta - B^2 - 2m \Delta V_\Theta \sin^2 \Theta} = n_2 h,$$

$$(36) \quad \int_0^{\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}} d\varphi = \int_0^{\frac{d\varphi}{\sin \Theta}} \sqrt{B^2 - 2m \Delta V_\varphi} = n_3 h.$$

Zunächst sei der Fall vollkommen radialer Symmetrie betrachtet. Dann sind ΔV_Θ und ΔV_φ gleich Null zu setzen und man berechnet aus Gleichung (36) und (35) für die Integrationskonstanten A und B (Flächensatz)

$$(37) \quad B = \frac{n_3 h}{2\pi},$$

$$(38) \quad A = \frac{(n_2 + n_3) h}{2\pi}.$$

Das Zusatzpotential ΔV_r stellen wir durch eine nach positiven und negativen Potenzen von r fortschreitende Reihe dar:

$$(39) \quad \Delta V_1 = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s r^s.$$

Die Koeffizienten a_s sollen alle als kleine Größen behandelt werden können. Das radiale Phasenintegral läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$(40) \quad \left\{ \int_0^{\frac{\partial W_r}{\partial r}} dr = \int_0^{\frac{dr}{r}} \sqrt{2m H r^2 + 2m e E r - A^2} \right. \\ \left. \left\{ 1 - \frac{2m \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s r^{s+2}}{2m H r^2 + 2m e E r - A^2} \right\}^{1/2} \right.$$

Entwickelt man die geschweifte Klammer in eine Potenzreihe, so bleiben Glieder von der allgemeinen Form zu integrieren

$$(41) \quad \left\{ \Delta J_{r,k} = (2m)^k \binom{1/2}{k} \int_0^{\frac{dr}{r}} (2m H r^2 + 2m e E r - A^2)^{-\frac{2k-1}{2}} \right. \\ \left. \left\{ - \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s r^{s+2} \right\}^k \right.$$

Diese Integrale $\Delta J_{r,k}$ lassen sich am zweckmäßigsten in der komplexen Zahlenebene nach dem Residuensatze auswerten.¹⁾ In der Nähe des Poles $r = 0$ gilt für den Integranden die Entwicklung

$$(42) \quad \left\{ (2m)^k \binom{1/2}{k} (-A^2)^{-\frac{2k-1}{2}} \cdot \frac{1}{r} \left\{ - \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s r^{s+2} \right\} \right. \\ \left. \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\lambda^{-\frac{2k-1}{2}} \right) \frac{(2m e E r + 2m H r^2)^\lambda}{(-A^2)^\lambda} \right.$$

und in der Nähe des Unendlichkeitspunktes $r = \frac{1}{z}$

$$(43) \quad \left\{ - (2m)^k \binom{1/2}{k} (2m H)^{-\frac{2k-1}{2}} \cdot z^{2(k-1)} \left\{ - \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s z^{-(s+2)} \right\}^k \right. \\ \left. \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\lambda^{-\frac{2k-1}{2}} \right) \frac{(2m e E z - A^2 z^2)^\lambda}{(2m H)^\lambda} \right.$$

1) Vgl. A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. p. 17, 500. 1916.

Die Zahlen k und λ laufen unabhängig voneinander von 0 bis ∞ . Der Koeffizient von $1/r$ bzw. $1/z$ ist das gesuchte Residuum; es gilt dann für einen bestimmten Index k

$$(44) \quad \Delta J_{r,k} = \pm 2\pi i (\text{Res.})_k.$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus dem Umlaufssinn um die singulären Stellen. Das radiale Phasenintegral ist die Summe aller $\Delta J_{r,k}$, also

$$(45) \quad \int_0^{\infty} \frac{\partial W_r}{\partial r} dr = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta J_{r,k} = n_1 h.$$

Hieraus ist nun mit Hilfe der durch (37) und (38) gegebenen Ausdrücke für A und B die Energie H der statischen Bahnen zu berechnen.

Wir vergegenwärtigen uns, daß das Hauptglied obiger Summe $\Delta J_{r,0}$ für $k=0$ dem reinen Coulombschen Felde, d. h. Vernachlässigung der Zusatzglieder a_s , entspricht, und berechnen als eine erste Näherung

$$\Delta J_{r,0} = -2\pi \left(A + \frac{m e E}{\sqrt{-2mH}} \right) = n_1 h$$

und daraus

$$(46) \quad H = - \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^2 (n_1 + n_2 + n_3)^2}.$$

Wie zu erwarten war, ergibt sich so ein vollkommen wasserstoffähnlicher Term

$$(47) \quad S = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^2 (n_1 + n_2 + n_3)^2} = \frac{N}{(n_1 + n_2 + n_3)^2}.$$

Um weitere Näherungen zu berechnen, schreiben wir nach Gleichung (45)

$$(48) \quad \Delta J_{r,0} = h \left(n_1 - \frac{\Delta J_{r,1}}{h} + \frac{\Delta J_{r,2}}{h} + \dots \right) = h(n_1 + \Delta n_1)$$

und haben als Ausdruck des allgemeinen Serienterms

$$(49) \quad S = \frac{N}{(n_1 + n_2 + n_3 + \Delta n_1)^2},$$

wobei Δn_1 gegeben ist durch

$$(II) \quad \Delta n_1 = - \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta J_{r,k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta n_1)_k.$$

Um einen Überblick zu gewinnen, soll angenommen werden, daß nur die Zusatzglieder von a_2 bis a_{-5} , als wichtigste und beidseitig am nächsten an das Coulombsche Glied a_{-1} sich anschließende Glieder berücksichtigt zu werden brauchen. Dann ergibt die Rechnung:

$$(50) \left\{ \begin{aligned} (\Delta n_1)_1 &= \frac{4\pi^2 m}{(n_2 + n_3) h^2} \\ &\left\{ a_{-2} + a_{-3} \frac{4\pi^2 m e E}{(n_2 + n_3)^2 h^3} + a_{-4} \frac{4\pi^2 m}{(n_2 + n_3)^2 h^2} \left[\frac{6\pi^2 m e^2 E^2}{(n_2 + n_3)^2 h^2} + H \right] \right. \\ &\quad + a_{-5} \frac{16\pi^4 m^2 e E}{(n_2 + n_3)^4 h^4} \left[\frac{10\pi^2 m e^2 E^2}{(n_2 + n_3)^2 h^2} + 3H \right] + \dots \Big\} \\ &\quad + \frac{2\pi m}{h \sqrt{-2mH}} \\ &\left\{ a_{-1} - \frac{a_0}{2} \cdot \frac{eE}{H} + \frac{a_1}{H} \left[\frac{(n_2 + n_3)^2 h^2}{16\pi^2 m} + \frac{3}{8} \cdot \frac{e^2 E^2}{H} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_2}{H^2} \left[\frac{3(n_2 + n_3)^2 h^2 e E}{32\pi^2 m} + \frac{5}{16} \cdot \frac{e^2 E^2}{H} \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(51) \left\{ \begin{aligned} (\Delta n_1)_2 &= - \frac{8\pi^4 m^2}{(n_2 + n_3)^3 h^4} \left\{ [a_{-2}^2 + 2a_{-1} a_{-3} + 2a_0 a_{-4} + 2a_1 a_{-5}] \right. \\ &\quad + 2[a_{-2} a_{-3} + a_{-1} a_{-4} + a_0 a_{-5}] \frac{12\pi^2 m e E}{(n_2 + n_3)^2 h^2} \\ &\quad + [a_{-3}^2 + 2a_{-2} a_{-4} + 2a_{-1} a_{-5}] \\ &\quad \quad \frac{12\pi^2 m e E}{(n_2 + n_3)^2 h^2} \left[\frac{10\pi^2 m e^2 E^2}{(n_2 + n_3)^2 h^2} + H \right] \\ &\quad + 2[a_{-3} a_{-4} + a_{-2} a_{-5}] \frac{80\pi^4 m^2 e E}{(n_2 + n_3)^4 h^4} \\ &\quad \quad \left[\frac{14 m e^2 E^2}{(n_2 + n_3)^2 h^2} + 3H \right] + \dots \Big\} \\ &\quad - \frac{\pi m^2}{h(-2mH)^{3/2}} \left\{ 2[a_0 a_{-1} + a_1 a_{-2} + a_2 a_{-3}] \right. \\ &\quad \quad - [a_0^2 + 2a_1 a_{-1} + 2a_2 a_{-2}] \frac{3eE}{2H} \\ &\quad + 2[a_1 a_0 + a_2 a_{-1}] \frac{3}{H} \left[\frac{(n_2 + n_3)^2 h^2}{16\pi^2 m} + \frac{5}{8} \cdot \frac{e^2 E^2}{H} \right] \\ &\quad \left. - [a_1^2 + 2a_2 a_0] \frac{5eE}{H^2} \left[\frac{(n_2 + n_3)^2 h^2}{32\pi^2 m} + \frac{7}{16} \cdot \frac{e^2 E^2}{H} \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wegen der gemachten Annahme vollkommener radialer Symmetrie wird die Bewegung des Serienelektrons eine Zentralbewegung sein und in einer Ebene stattfinden. Formel (II) gilt also insbesondere für den Fall der Ebene. Wir wollen sie dabei

spezialisieren für eine Anordnung der konstituierenden Elektronen in konzentrischen Ringen. Trägt ein Ring vom Radius ϱ_k die negative Ladung E_k , so gilt für sein Potential, bezogen auf ein außerhalb gelegenes Elektron in seiner Ebene

$$(52) \quad V_k = \frac{e E_k}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\varrho_k}{r} \right)^2 + \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{\varrho_k}{r} \right)^4 + \dots \right\}$$

und für ein System von Ringen, das sich um den Kern mit der Ladung E_0 gruppiert:

$$(53) \quad \begin{cases} V = -\frac{e E_0}{r} + \sum_k \frac{e E_k}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\varrho_k}{r} \right)^2 + \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{\varrho_k}{r} \right)^4 + \dots \right\} \\ = -\frac{e(E_0 - \sum_k E_k)}{r} + \frac{e \sum_k E_k \varrho_k^2}{4 r^3} + \frac{9 e \sum_k E_k \varrho_k^4}{64 r^5} + \dots \end{cases}$$

Es fallen also alle Koeffizienten a_s mit geradem Index s aus und es bleiben:

$$(54) \quad a_{-3} = \frac{e}{4} \sum_k E_k \varrho_k^2,$$

$$(55) \quad a_{-5} = \frac{9e}{64} \sum_k E_k \varrho_k^4.$$

Berücksichtigen wir noch alle Größen von der Ordnung ϱ^4 , so lautet nunmehr Formel (II):

$$\Delta u = \frac{16 \pi^4 m^2 e E}{(n_2 + n_3)^3 h^4} \left\{ a_{-3} + \frac{20 \pi^4 m^2 e^2 E^2}{(n_2 + n_3)^4 h^4} (2 a_{-5} - 3 a_{-3}^2) + H \frac{6 \pi^2 m^4}{(n_2 + n_3)^2 h^2} (2 a_{-5} - a_{-3}^2) \right\}$$

oder

$$(III) \quad \left\{ \Delta u = \frac{16 \pi^4 m^2 e E}{(n_2 + n_3)^3 h^4} \left\{ a_{-3} + \frac{20 \pi^4 m^2 e^2 E^2}{(n_2 + n_3)^4 h^4} (2 a_{-5} - 3 a_{-3}^2) \right\} - \frac{192 \pi^3 m^4 e^3 E^2}{(n_2 + n_3)^5 h^8} \cdot \frac{(2 a_{-5} - a_{-3}^2)}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} \right\}.$$

Dabei ist

$$E = E_0 - \sum_k E_k$$

gesetzt und für a_{-3} , a_{-5} sind die Werte (54) und (55) einzusetzen. Eine numerische Anwendung werden wir im nächsten Paragraphen geben.

Die Diskussion unserer Ergebnisse hat an den allgemeinen Ausdruck

$$(II) \quad \Delta n = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta n)_k$$

anzuknüpfen. Man hat es in der Hand, ihn beliebig genau zu berechnen. Ein Vergleich mit (51) und (52) lehrt, daß er in zwei Gruppen von Ausdrücken zerfällt, die entweder die Quantenzahlen nur in den Nennern oder nur in den Zählern enthalten (H ist ja wesentlich $-N \cdot h / (n_1 + n_2 + n_3)^2$). Im Zusammenhang damit zeigt sich, daß die Koeffizienten a eine wesentlich verschiedene Rolle spielen, je nachdem $s \geq -1$ ist [vgl. (51)]; dies entspricht ihrer verschiedenen physikalischen Bedeutung, indem Glieder mit $s < -1$ von der Wirkung von Ladungen herrühren, die sich innerhalb der Bahnen des betrachteten Elektrons befinden, während Glieder mit $s > -1$ durch Ladungen außerhalb dieser Bahnen verursacht sind. Man hat daher nach den allgemeinen Vorstellungen über den Atombau für Spektralserien im optischen Gebiet eine andere Abhängigkeit von Δn von den Quantenzahlen zu erwarten als für Spektralserien im Röntgengebiet. In der Tat gelangen wir zu Serientermen vom Ritzschen Typus

$$S = \frac{N}{\left(n + a + \frac{a}{n^2}\right)^2}$$

bzw.

$$S = \frac{N}{[n + a + \alpha(A - \nu)]^2}; \quad \nu = A - S$$

— und zwar dann und nur dann — wenn alle Feldkoeffizienten a_s mit Indizes $s > -1$ verschwinden. Durch Konstanthalten von n_2 und n_3 ergibt sich die Rydbergsche Größe a im Termnenner, durch H wird das speziell von Ritz herrührende Zusatzglied a/n^2 bzw. $\alpha(A - \nu)$ eingeführt. Es zeigt sich, daß der Serienterm nach Ritz nur als eine gegenüber der Rydbergschen Form verbesserte Näherung zu betrachten ist, wobei noch weitere Potenzen von H zu berücksichtigen wären.¹⁾ Durch solche weitere Korrektionsglieder läßt sich ohne Zweifel der Anschluß an die Erfahrung verbessern, der auch der Ritzschen Serienformel für niedere Zahlen n manchmal fehlt.²⁾

1) Analog Sommerfeld, Münchener Ber. 1916. p. 163.

2) Vgl. z. B. F. Paschen, Ann. d. Phys. 29. p. 625. 1909.

Bemerkenswert ist, daß im wesentlichen die Annahme genügt, daß das Serienelektron sich außerhalb des engeren Atomverbandes bewegt, um auf Ritzsche Serienterme zu führen. Daraus erklärt sich die allgemeine Anwendbarkeit der Ritzschen Serienformeln im optischen Gebiet, unabhängig von der Stellung eines Elementes im periodischen System und es bestätigt sich auch die übliche Vorstellung, daß die optischen Serien im Atomäußern erzeugt werden. Das Serienelektron ist aber im allgemeinen nicht als ein Valenzelektron anzusehen, vielmehr scheint das Atom bei der Serienemission in einem vom normalen abweichenden Zustande sich zu befinden.

Wir gelangen zu einer Darstellung des Termes der Hauptserien, der ersten Nebenserien und der Bergmannserien, d. h. all der Serienterme, die nach Ritz ganze Laufzahlen haben, wenn wir die Quantenzahlen entsprechend wählen. Doch bleibt auch hier die Frage nach der Halbzahligkeit in den Nennern der Terme der zweiten Nebenserien noch offen; sie scheint durch Betrachtung räumlicher Modelle und Elektronenbewegungen der Lösung nicht näher gerückt zu werden. Hat man an dieser Halbzahligkeit festzuhalten — die numerischen Vorteile legen dies nahe —, so scheint es das naheliegendste, den Term der zweiten Nebenserie einem ionisierten Atom zuzuschreiben. Man hätte dann folgende Übersicht:

Tabelle 2.
Quantenzahlen und Serienterme.

Atom	Term der	n_1	n_2	n_3	$n = n_1 + n_2 + n_3$
Neutral $S = \frac{N}{(n_1 + n_2 + n_3 + 1)^2}$	H. S.	0, 1, 2 ...	0 1 2	2 1 0	2, 3, 4 ...
		1, 2, 3 ...	0 1	1 0	
		0, 1, 2 ...	0 1 2 3	3 2 1 0	3, 4, 5 ...
	1. N. S.	1, 2, 3 ...	0 1 2	2 1 0	
		2, 3, 4 ...	0 1	1 0	
			1	0	

Tabelle 2 (Fortsetzung).

Atom	Term der	n_1	n_2	n_3	$n = n_1 + n_2 + n_3$
Einfach ionisiert	2. N. S.	0, 2, 4 ...	0 1 2 3	3 2 1 0	3, 5, 7 ...
$S =$ $\frac{N}{\left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} + \frac{4n}{2}\right)^2}$		1, 3, 5 ...	0 1 2	2 1 0	
		2, 4, 6 ...	0 1	1 0	
	H. S. oder 1. N. S.	0, 2, 4 ...	0 1 : :	4 3 : :	4, 6, 8 ... usf.

In der Tabelle sind nicht alle Kombinationen durchgeführt, sie ist aber leicht zu ergänzen. Man bemerkt, daß sich von vornherein nicht entscheiden läßt, ob ein gegebener Serienterm dem neutralen oder dem ionisierten Atom angehört. Gegen die soeben vorgebrachte Auffassung der Terme der zweiten Nebenserien scheint allerdings zu sprechen, daß man schon He einen solchen zuschreibt. Ionisiertes Helium kann aber nach dem Bohrschen Modell nur rein wasserstoffähnliche Serienterme liefern. Ist dieser Einwand richtig, so bliebe zur Erklärung wohl nur noch eine Revision der Quantenansätze.¹⁾

Auffällig ist die Konstanz der azimuthalen Quantenzahlen n_2 und n_3 ; wir müssen sie fordern, um unter den gemachten Voraussetzungen die konstante Größe a zu erhalten; sie wird jedoch nicht mehr unbedingt notwendig, wenn wir auch noch eine Abhängigkeit des Atomfeldes von den Winkeln Θ und φ zulassen. Die Größen ΔV_Θ und ΔV_φ in Gleichung (33) sind dann noch in Rechnung zu ziehen und haben zu Δn_1 analoge Korrekturen Δn_2 und Δn_3 zur Folge. Im allgemeinen würde dies auf einen ziemlich komplizierten Atomaufbau hindeuten. Von den verschiedenen Möglichkeiten einer Verallgemeinerung in dieser Richtung soll nur eine als Beispiel angeführt werden.

Innerhalb des Modells befinde sich ein elektrischer Dipol von der Gesamtladung Null und dem Momente M . Er über-

1) Vgl. die Bemerkungen am Schluß.

lagert sich der effektiven Kernladung E , ohne sie zu ändern. Ist er in der Z -Richtung orientiert, so liefert er zum Potential den Beitrag:

$$(56) \quad \frac{e M}{r^2} \cos \Theta.$$

Wir haben also zu setzen

$$(57) \quad \Delta V_{\Theta} = e M \cos \Theta.$$

Über ΔV_r mögen die früheren Annahmen bestehen bleiben. Dann berechnen wir einen Störterm

$$(58) \quad S = \frac{N}{(n_1 + n_2 + n_3 + \Delta n_1 + \Delta n_2)^2},$$

wo zu der uns bereits bekannten Korrektionsgröße Δn_1 eine zweite hinzutritt

$$(59) \quad \Delta n_2 = \frac{12\pi^4 m^2 e^2 M^2}{h^4 (n_2 + n_3)^3} \left(1 - \frac{n_3^2}{(n_2 + n_3)^2} \right)^2.$$

Auf diese Weise läßt sich die Mannigfaltigkeit und Anpassungsfähigkeit der Formeln bedeutend erweitern. Die Schwierigkeit besteht nur in der physikalischen Interpretation der einzelnen Größen.

Eine Frage von besonderem Interesse ist die Frage nach der Struktur der Serien (Paare, Triplets). Daß diese wahrscheinlich vermöge einer Aufspaltung vielfacher Terme durch das Atomfeld zustande kommt, äußert schon Sommerfeld.¹⁾ Hält man daran fest, daß nur n_1 im Termennenner eine laufende Zahl sein kann, während $n_2 + n_3$ einen einmal gewählten Wert behält, so können solche Aufspaltungen aus verschiedenen Lagen (nahe) derselben Bahn des Serienelektrons gegen das Atom hervorgehen. Mit zunehmender Seriennummer würde die Vielfachheit der Aufspaltung nicht zunehmen. Ferner müßte aus dem gleichen Grunde die Anzahl der Komponenten beim Zeemaneffekt innerhalb der Serie konstant bleiben, da sie durch die Werte des Impulsmomentes des Atoms bedingt wird; letzteres ist aber bei konstanten n_2 und n_3 unveränderlich.²⁾ Eine Prüfung der Formeln (51), (52), (53) ergibt jedoch, daß solche Aufspaltungen im allgemeinen zu grob werden.

1) Vgl. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 50. p. 90. 1916.

2) Vgl. die Bemerkungen am Schluß.

Dagegen hat die Konstanz der azimuthalen Quantenzahlen eine gewisse Wahrscheinlichkeit für sich. Sie führt zu Ergebnissen, die durch die Erfahrung bestätigt werden. Es ist jedoch noch hervorzuheben, daß die Koeffizienten a_s nicht als absolut unveränderlich zu betrachten sind, sondern daß sie die Quantenzahlen der Bahnen der konstituierenden Elektronen enthalten. Einem Wechsel solcher Quantenzahlen kann eine Änderung des Serienterms entsprechen, die in einer Art Aufspaltung desselben zur Geltung kommt. Es wäre von höchstem Interesse, wenn in gewissen Serienstrukturen oder Feinstrukturen von Linien die Rückwirkung der Röntgenbahnen im Atom auf das sichtbare Spektrum sich nachweisen ließe. Es würden sich dann direkt die Gesetzmäßigkeiten des Atominnern in den Feinheiten der Serien- und Linienstrukturen spiegeln.

Unsere Formeln (51) und (52) lassen sich auch auf das Gebiet der Röntgenspektren anwenden. Gemäß der Lage der Röntgenbahnen im Innern des Atoms sind vor allem die Feldkoeffizienten a_s für $s \geq -1$ zur Diskussion heranzuziehen. Es sind besonders drei Eigentümlichkeiten der Röntgenterme, die Erklärung verlangen¹⁾: das Versagen des Kombinationsprinzips bzw. der Unterschied zwischen Energie und Term, die scheinbare Nicht-Ganzzahligkeit der Kernladungen (Kernladungscharakteristiken), und die Nicht-Ganzzahligkeit der Termnenner. Wenden wir uns sogleich zu letzterer, so zeigt sich, daß sie durch sehr mannigfache Ursachen begründet sein kann, da jeder der Koeffizienten a_s zu einer solchen führt; jede Störung der Elektronenbahn bewirkt im allgemeinen eine Abänderung der ganzzahligen Termnenner. Die Möglichkeit, Abweichungen vom Kombinationsprinzip und die Kernlagerungscharakteristiken darzustellen, bieten die Glieder mit den Koeffizienten a_0 und a_1 in Formel (51). Wir zerlegen den dort für $(\Delta n_1)_1$ gegebenen Ausdruck in zwei Teile:

$$(\Delta n_1)_1 = \Delta n_1' + \Delta n_1'',$$

wo in $\Delta n_1''$ nur Glieder mit a_0 und a_{-1} enthalten sind.

Es ist

$$(60) \quad \Delta n_1'' = \frac{2\pi m}{h \sqrt{-2\mu H}} \left[a_{-1} - \frac{a_0 e E}{2 H} \right].$$

1) Vgl. A. Sommerfeld, Münchener Ber. 1916. p. 165.

Wir schreiben den Serienterm

$$S = \frac{N}{(n + \Delta n_1)^2} = \frac{N}{(n + \Delta n_1)^2} \left(1 - \frac{2 \Delta n_1''}{n} + \dots \right); \quad n = n_1 + n_2 + n_3$$

und können dies durch Einführung des obigen Wertes für $\Delta n_1''$ mit geringen Vernachlässigungen umformen zu

$$(61) \quad S = \frac{2\pi^2 m e^2}{h^3 (n + \Delta n)^2} \left(E - \frac{a_{-1}}{e} \right)^2 - \frac{a_0}{h}.$$

In der Tat bewirkt das Glied a_0 einen Zusatz zum Term, der das Kombinationsprinzip stören kann; es ist charakteristisch, daß es an das Vorhandensein außen gelegener Ladungen gebunden ist. Auch eine Darstellung für die Kernladungscharakteristiken haben wir gefunden. Diese erscheinen durch den Koeffizienten a_{-1} bedingt. Ein solcher tritt nur in ganz speziellen Fällen auf, wo im Zusammenhang mit dem betrachteten Elektron andere Elektronen sich bewegen, die mit diesem eine stets geometrisch ähnlich bleibende Konfiguration bilden.¹⁾

Im wesentlichen ergeben sich uns die Sommerfeldschen Resultate²⁾ in allgemeinerer Fassung. Dadurch wird eine weitgehendere Anpassung an die Tatsachen ermöglicht. Unsere Formeln enthalten hinreichend Glieder, um jede Eigenart der Serienterme formell darzustellen. Darin dokumentiert sich die Entwicklungsfähigkeit der Bohrschen Anschauungen über Atombau und Serienemission auch auf dem Gebiete nicht wasserstoffähnlicher Serienspektren. Die konsequente Weiterführung der von Bohr gegebenen Grundlagen führt in formaler Hinsicht zu keinen Widersprüchen mit der Erfahrung, was wertvoll für die allgemeine Beurteilung der Theorie ist. Es wird im weiteren alles auf die quantitativen Prüfungen ankommen; nur solche können eine wirksame Weiterentwicklung sichern. Es ergibt sich daher als nächste wichtige Aufgabe, die zur Darstellung eines bestimmten Serientermes gewählten und durch Vergleich mit der Erfahrung zahlenmäßig ausgewerteten Feldkoeffizienten a_s bzw. die im vorigen Paragraphen ermittelte Dipolbreite $2c$ und die Dipolladungen E' und E'' modellmäßig zu deuten. Unter modellmäßiger Deutung kann aber nur eine

1) So z. B. beim Sommerfeldschen „Ellipsenverein“ (Phys. Zeitschr. p. 19, 297. 1918), oder bei Modellen von der Art der p. 296 besprochenen.

2) A. Sommerfeld, Münchener Ber. 1916. p. 152.

Zurückführung auf universelle Konstante und Gesetze verstanden werden. Denn um z. B. einen bestimmten einfachen Serienterm nach Ritz darzustellen, genügen schon zwei der Koeffizienten a_s in Formel (51) und (52), z. B. a_{-2} und a_{-4} oder a_{-3} und a_{-5} ; diese Koeffizienten selbst lassen sich wieder durch ganz verschiedene Elektronenanordnungen quantitativ wiedergeben, sei es durch ruhende Elektronenanordnungen oder durch Elektronenbahnen, im Raume oder in der Ebene. Stets sind aber so viele Modellparameter willkürlich zu wählen (Zahl der Elektronenringe, Radien derselben usw.), als der Serienterm empirische Konstante enthält. Der Rückschluß ist auf diese Weise nicht eindeutig; außerdem erschwert die große Zahl von Möglichkeiten die Auswahl der einzelnen Modelle bedeutend. Wegleitend ist also stets die Forderung der Zurückführung der Modellkonstanten auf universelle Konstanten.

§ 4. Vergleich mit der Erfahrung.

Aus den oben erörterten Gründen der Möglichkeit eines vieldentigen Rückschlusses von empirisch gegebenen Größen auf die Konstanten des Modells erscheint es notwendig, die Betrachtung auf Atome von niederem Atomgewicht zu beschränken, da diese wenige Elektronen und daher wohl verhältnismäßig einfache Modelle besitzen.

Wir werden in erster Linie an Formel (I) anknüpfen

$$\Delta n = \frac{16\pi^4 m^3 e^2 E' E'' c^3}{h^4 (n_2 + n_3)^3} \left(1 - \frac{3n_3^2}{(n_2 + n_3)^2} \right).$$

In gewissen Fällen wird es möglich sein, zur genaueren Berechnung Formel (II) bzw. (III) heranzuziehen; in dieser ist obige Formel dann als Näherungsfall enthalten. Nach Dunz gilt¹⁾

1. Hauptserienterme.

	$2p$	$N/2p$	$\Delta n = p$
H	27419	$\frac{2^2}{2^2}$	0
Farbe	27174	$(2 + 0,009)^2$	+ 0,009
He	29221	$(2 - 0,063)^2$	- 0,063
Li	28581	$(2 - 0,041)^2$	- 0,041

1) Bearbeitung unserer Kenntnisse von den Serien, Diss. Tübingen 1911; zitiert nach Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51. p. 86. 89. 1916.

2. Terme der ersten Nebenserie.

	$3d$	$N/3d$	$\Delta n = d$
H	12186,0	3^2	0
Parhe	12204,2	$(3 - 0,0022)^2$	- 0,0022
He	12208,0	$(3 - 0,0026)^2$	- 0,0026
Li	12202,5	$(3 - 0,0020)^2$	- 0,0020

Ein Anschluß an die Erfahrung wurde nur bei den Hauptserientermen erreicht. Bei den Termen der ersten Nebenserien gelangt man zu der richtigen Größenordnung ($-0,0011$ bei Parhe, $-0,0016$ bei Li); die Terme der zweiten Nebenserien lassen wir wegen der auf p. 316 erörterten Schwierigkeiten unberücksichtigt.

Die Berechnungen sind im folgenden mit den Werten durchgeführt¹⁾

$$\begin{aligned}
 N_{\infty} &= 109\,737, \\
 e &= 4,774 \times 10^{-10} \text{ E.S.E.}, \\
 h &= 6,545 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-1}, \\
 m &= 8,998 \times 10^{-28} \text{ g}.
 \end{aligned}$$

a) Helium.

Dem Helium werden im neutralen Zustande zwei Elektronen zugeschrieben. Betrachten wir das eine Elektron als „Serielektron“, so ist im Modell nur noch die Bahn des andern Elektrons festzulegen. Als einfachste Möglichkeit im Sinne der Bohrschen Theorie ergibt sich für diese ein Kreis um den Atomkern als Zentrum mit bestimmter Quantenzahl n_0 und dem Radius r_0 . Wir berechnen;

Tabelle 3.
Innerer Ring von Helium.

n_0	$r_0 \times 10^9 \text{ cm}$	$c^2 \times 10^{18} \text{ cm}^2$
1	2,65	- 3,44
2	10,6	- 55,0

Die zu ermittelnde Größe Δn (Formel I) hängt noch von den Quantenzahlen n_2 und n_3 des Serielektrons ab. Die verschiedenen möglichen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

1) Nach L. Flamm, Phys. Zeitschr. p. 18, 521. 1917.

Tabelle 4.

$\Delta n = p$ für Helium nach Formel (I).

n_0	n_2	n_3	0	1	2
1	0		—	+ 0,060	+ 0,0077
	1		— 0,030	— 0,00096	—
	2		— 0,0038	—	—
2	0		—	—	+ 0,122
	1		—	— 0,015	—
	2		— 0,061	—	—

Die den Quantenzahlen $n_0 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 2$ und $n_0 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 0$ zukommenden Werte zeigen eine augenfällige Anlehnung an die empirischen Werte. Wir vergleichen:

Tabelle 5.

p -Werte von Helium.

	n_0	n_2	n_3	$p_{\text{ber.}}$	$p_{\text{emp.}}$
Parhe	1	0	2	+ 0,0077	+ 0,009
He	2	2	0	— 0,061	— 0,063

Bestehen auch noch Abweichungen, so ist doch daran zu erinnern, daß die empirischen Daten nicht ganz sicher sind, und daß unsere Formel (I) als Näherungsformel mit einem gewissen Fehlerbereich behaftet ist.¹⁾ Überraschend ist sicherlich, daß man auf so einfache Weise zu beiden Hauptserientermen des Heliums geführt wird: Beim sogenannten Parhe liegen die Bahnen beider Elektronen in derselben Ebene, das innere Elektron beschreibt einen einquantigen Kreis um den Kern; bei He ist dieser Kreis zweiquantig und die Bahnen des Serienelectrons stehen nahe senkrecht zu seiner Ebene (vgl. Figg. 3 u. 4).²⁾

1) Dieser mag 10—15% betragen. Aus diesem Grunde wird bei den weiter unten angeführten Modellen von Li und Na von einer Berücksichtigung der sogenannten „Wechselwirkungskorrektion“ der inneren Ringe Umgang genommen.

2) Nach Epstein machen auch Dispersionsrechnungen ein Modell solcher Art bei He wahrscheinlich. Vgl. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **53**. p. 547. 1917.

Der Parhe- und der He-Hauptserienterm entspringen somit demselben Modell. Das verschiedene Vorzeichen der p

Fig. 3. Parhe.

Fig. 4. He.

ergibt sich notwendig aus der verschiedenen räumlichen Lagerung der Bahnen. Es sind nach dem geschilderten Modell somit Spektralserien bei Helium zu erwarten von der Form

$$\nu = N \left[\frac{1}{(2 + 0,0077)^2} - \frac{1}{(n + 0,0077)^2} \right],$$

$$\nu = N \left[\frac{1}{(2 - 0,061)^2} - \frac{1}{(n - 0,061)^2} \right].$$

In der Tat sind diese Differenzserien von Koch, Stark und Liebert¹⁾ im elektrischen Felde gefunden worden.

1) J. Koch, Ann d. Phys. 48. p. 98. 1915; J. Stark, Ann. d. Phys. 56. p. 577. 1918; G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. p. 610. 1918.

Die Serien von Parhe gelten als einfach, jene von He sind doppelt. Auch für die Deutung dieser Tatsache liegen Anzeichen vor. Bei Parhe ist der innere Ring einquantig und daher notwendig einfach¹⁾; bei He kann der zweiquantige innere Ring durch eine Ellipse gleicher Summe der Quantenzahlen und nahe gleicher Energie ersetzt werden. Diese liegt innerhalb eines Kreisinges mit den Radien

$$r_0' = r_0 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(Perihel) und

$$r_0'' = r_0 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(Aphel), so daß der mittlere Radius gleich dem Radius des zweiquantigen Kreises ist. Es erscheint somit nicht ausgeschlossen, daß die Dubletstruktur der He-Linien mit der Zweiquantigkeit der inneren Elektronenbahn im Zusammenhang steht.²⁾

b) Lithium.

Lithium besitzt einen Kern mit drei positiven Elementarladungen; im neutralen Zustand kommen dem Atom drei Elektronen zu. Bei der Serienemission ist wiederum ein Elektron, das Serienelektron, aus dem eigentlichen Atomverband losgelöst zu denken, und es bleiben noch die Bahnen der zwei übrigen Elektronen zu bestimmen. In Anlehnung an die üblichen, z. B. häufig im Gebiet der Röntgenspektroskopie verwendeten Anschauungen, bieten sich zwei Fälle von möglichster Einfachheit.

Als erster Fall denke man sich die beiden inneren Elektronen in Bewegung auf einer Kreisbahn in diametraler Gegenüberstellung. Die Elemente dieser Bahn seien n_0 (Quantenzahl) und r_0 (Radius). Dann ergibt sich bei verschiedener Wahl der Quantenzahlen n_0 , n_2 und n_3 folgende Übersicht über die zu erwartenden p -Werte:

1) Wegen der Konstanz von n_1 und n_2 sind die Bahnen des Serienelektrons einfach. Vgl. p. 318.

2) Vgl. die Bemerkungen p. 319.

Tabelle 6.

 $\Delta n = p$ für Lithium nach Formel (I) (erstes Modell).

n_0	$r_0 \times 10^9 \text{ cm}$	$n_2 \backslash n_3$	0	1	2
1	1,922	0	—	+ 0,064	+ 0,0081
		1	— 0,032	— 0,0010	—
		2	— 0,0040	—	—
2	7,70	0	—	—	+ 0,129
		1	—	— 0,016	—
		2	— 0,065	—	—

Als zweite Möglichkeit kommt der Fall in Betracht, wo die beiden inneren Elektronen sich (genähert) auf konzentrischen Kreisen bewegen. Wir ordnen diesen von innen nach außen gezählt die Quantenzahlen n_0' und n_0'' zu, und bezeichnen die entsprechenden Radien mit r_0' und r_0'' .

Die Resultate sind in Tab. 7 zusammengestellt.

Tabelle 7.

 $\Delta n = p$ für Lithium nach Formel (I) (zweites Modell).

$n_0' \ n_0''$	$r_0' \times 10^9 \text{ cm}$	$r_0'' \times 10^9 \text{ cm}$	$n_2 \backslash n_3$	0	1	2
1 1	1,763	2,645	0	—	+ 0,088	+ 0,011
			1	— 0,044	— 0,0014	—
			2	— 0,0055	—	—
1 2	1,763	10,58	0	—	—	+ 0,124
			1	—	— 0,016	—
			2	— 0,063	—	—
2 2	7,055	10,58	0	—	—	+ 0,176
			1	—	— 0,017	—
			2	— 0,088	—	—

Die beiden Modelle lassen die Wahl zwischen den Werten $p = -0,032$ (erstes Modell) und $p = -0,044$ (zweites Modell), von denen aber der zweite dem empirischen Werte $-0,041$ bedeutend näher kommt. Wir stellen daher zusammen

Tabelle 8.

 p -Wert von Lithium.

n_0'	n_0''	n_1	n_2	$p_{\text{ber.}}$	$p_{\text{emp.}}$
1	1	1	0	— 0,044	— 0,041

Wenn Lithium eine Serie emittiert

$$\nu = N \left[\frac{1}{(2 - 0,044)^2} - \frac{1}{(n - 0,044)^2} \right],$$

ist es demnach wahrscheinlich, daß es in diesem Zustande zwei einquantige innere Ringe besetzt, die in derselben Ebene liegen; die Bahnen des Serienelektrons stehen nahezu senkrecht darauf. Diese Serie existiert in der Tat.¹⁾

Die chemische Einwertigkeit kommt in diesem Modell gut zum Ausdruck.

Da nur einquantige Ringe vorkommen, vermissen wir zunächst die Möglichkeit zur Deutung der Dubletstruktur des *p*-Terms. Dazu ist zu bemerken, daß die Annahme zweier einquantiger konzentrischer innerer Elektronenbahnen zwar der Wirklichkeit nahe zu kommen scheint, in Einzelheiten jedoch offenbar noch zu summarisch ist, da ja die beiden Bahnen auf einander nicht unbedeutende Störungen ausüben müssen, die in eine präzisere Fassung des Quantensatzes eingehen würden. Wichtig scheint zu sein, daß dem inneren Elektronensystem als ganzem zwei Quanten zukommen. Wie ich mich überzeugte, führen einfache Annahmen über räumliche Neigung der inneren Bahnen zueinander zu keinen besseren Resultaten.

c) Einiges über die Hauptserienterme der Alkalien.

Die bei Helium und Lithium gewonnenen Ergebnisse erhalten dadurch den Stempel der Eindeutigkeit und Zwangsläufigkeit, daß die behandelten Modelle möglichst einfach sind und daß bei der Durchrechnung der verschiedenen Möglichkeiten sich weit auseinanderliegende Δn -Werte ergeben, wodurch die richtige Auswahl derselben sich ohne weiteres ergibt. Bei Atomen von höherem Atomgewicht hat man es in weitaus höherem Maße in der Hand, durch Wahl der Lage, Quantenzahl und Ladung der Elektronenbahnen sich einem vorgeschriebenen Δn -Wert zu nähern. Die numerisch gute Übereinstimmung, die man so erhalten kann, darf nicht ohne weiteres zugunsten des aufgestellten Modells ausgelegt werden. Es werden dazu weitere Proben nötig sein, insbesondere eine Prüfung der Korrekturen zweiter Ordnung (π , δ , σ). Als Beispiel möge der Hauptserienterm von Na behandelt werden.

1) Vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 48. p. 210. 1915.

Schreiben wir in Ritzscher Form $S = \frac{N}{\left(n + p + \frac{\pi}{n^2}\right)^2}$,

so hat man nach Ritz¹⁾ zu setzen $p = 0,145$, $\pi = -0,116$. Von der Dubletstruktur sehen wir ab. Das positive Vorzeichen von p läßt sich so deuten, daß die Bahnen der konstituierenden Elektronen im wesentlichen in der Ebene der Bahnen des Serienelektrons liegen. Wir werden demzufolge ein konzentrisches und komplanares Ringsystem annehmen, von dem wir aber nur die beiden äußeren Ringe zu betrachten brauchen, da mit abnehmendem Radius die Wirkung der inneren Ringe nach außen rasch klein wird. Diesen Ringen schreiben wir die Quantenzahlen n_0' (innerer Ring) und n_0'' (äußerer Ring) zu und die Zahlen z_0' und z_0'' ihrer Elektronenladungen. Als plausibelste Besetzungszahlen im neutralen Atom hat man zu wählen:

Tabelle 9.

z'	z''	
1	1	Nach Analogie mit Li ²⁾
8	2	Nach Bohr ³⁾
2	8	Nach Kossel ⁴⁾

Kombiniert man dazu die einfachsten Quantenzahlen 1 und 2 für n_0' , n_0'' und n_3 ($n_2 = 0$), so ergibt sich folgende Übersicht:

Tabelle 10.

$\Delta n = p$ für Natrium nach Formel (III).

1. Ring		2. Ring				
n_0'	z_0'	n_0''	z_0''	n_3	p	π
1	1	1	1	1	+ 0,105	- 0,014
	8		2		+ 0,094	- 0,0041
	2		8		+ 0,054	—
1	1	1	1	2	+ 0,0110	—
	8		2		+ 0,0115	—
	2		8		+ 0,0069	—
1	1	2	1	2	+ 0,140	- 0,082
	8		2		+ 0,125	- 0,031
	2		8		+ 0,102	+ 0,016
2	1	2	1	2	+ 0,191	- 0,098
	8		2		+ 0,175	- 0,033
	2		8		+ 0,125	+ 0,016

1) W. Ritz, Ann. d. Phys. 12. p. 264. 1903.

2) Vgl. p. 326.

3) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 476. 857. 1913.

4) Ann. d. Phys. 49. p. 229. 1916.

Für den numerischen Vergleich mit der Erfahrung kommt allein in Betracht das Modell, das analog dem von uns behandelten (zweiten) Lithiummodell ist, nur daß hier die Bahnen der beiden Elektronen zweiquantig sind und die Bahnen des Serielektrons mit ihnen in derselben Ebene liegen. Die übrigen Elektronen ordnen sich näher dem Kern an und üben keinen merklichen Einfluß auf das Serielektron mehr aus. Zum Vergleiche stellen wir die Resultate für Li und Na zusammen.

Tabelle 11.
p-Werte von Li und Na.

	z_0'	z_0''	n_0'	n_0''	n_2	n_3	$p_{\text{ber.}}$	$p_{\text{emp.}}$	$\pi_{\text{ber.}}$	$\pi_{\text{emp.}}$
Li . . .	1	1	1	1	1	0	-0,044	-0,041	—	—
Na . . .	1	1	2	2	0	2	+0,140	+0,145	-0,082	-0,11

Der Fehler im π -Wert ist nicht allzugroß, wenn man bedenkt, daß π der 4. Potenz der Ringradien proportional ist, und daß die Werte von e, m, h in hohen Potenzen in Formel (III) eingehen; die Berechnung ist daher sehr heikel. Auffällig ist, daß ein äußerer Achterring ein falsches Vorzeichen von π bewirkt. Das hat seinen Grund darin, daß wegen der starken Besetzung des Ringes mit Elektronen (großes z_0'') im Ausdruck für π nach Formel (III) das Glied mit a_{-3}^2 das Glied mit a_{-5} überwiegt; denn sowohl a_{-3} als a_{-5} sind als Koeffizienten in der Potenzentwicklung für das Potential des Elektronenringes seiner Ladung, also z_0'' , proportional. Stark besetzte Elektronenringe führen daher zu einem direkten Widerspruch mit der Erfahrung.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Differenzserie, die unser Modell liefert

$$\nu = N \left[\frac{1}{\left(2 + p + \frac{\pi}{n^2}\right)^2} - \frac{1}{\left(n + p + \frac{\pi}{n^2}\right)^2} \right]$$

bei Na bekannt ist¹⁾ (sogenannte dritte Nebenserie).

Die erhaltenen Übereinstimmungen haben viel für sich. Eine große Schwierigkeit darf jedoch nicht unerwähnt bleiben.

1) Vgl. z. B. H. Konen, Das Leuchten der Gase und Dämpfe, Braunschweig 1913, S. 138.

Bekanntlich weisen die Alkalien von Na bis Cs eine eigentümliche Konstanz des Verhältnisses π/p auf¹⁾, das sicher charakteristisch und für das Modell von Bedeutung ist. Bei einer im wesentlichen komplanaren Ringanordnung der konstituierenden Elektronen, wie wir sie bei Li und Na behandelt haben, ist p merklich proportional der zweiten und π merklich proportional der vierten Potenz der Ringradien. Es ist daher kaum einzusehen, wie das Verhältnis π/p konstant bleiben kann, wenn die Radien sich ändern. Sobald aber gewisse, an die Kugel sich anlehrende Raumsymmetrien vorhanden sind, läßt sich leicht zeigen, daß in Formel (II) die Glieder a_{-2} , a_{-3} , a_{-4} fallen und das Glied mit a_{-5} als erstes und wichtigstes stehen bleibt. Dann werden p und π von merklich gleicher Dimension bezüglich der Abmessungen des Modells; denn es ist

$$\Delta n = a_{-5} \frac{64\pi^6 m^3 e^2}{h^6 (n_2 + n_3)^5} \left[3H + \frac{10\pi^2 m e^4}{h^2 (n_2 + n_3)^2} \right] + \dots$$

und da genähert

$$H = - \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 (n_1 + n_2 + n_3)^2},$$

$$\frac{\pi}{p} = -0,6 \times (n_2 + n_3).$$

Für $n_2 = 0$, $n_3 = 1$ oder $n_2 = 1$, $n_3 = 0$ würde man mit $-0,60$ dem wahren Werte $-0,75$ ziemlich nahe kommen; allein darauf ist wohl nicht großes Gewicht zu legen. Überzeugender ist das Vorzeichen, das unter allen Umständen sich einstellt, und die Tatsache, daß alle Konstanten des inneren Atomaufbaues sich merklich herausheben. Es wäre dies ein Fingerzeig dafür, daß die Modelle der Alkalien und damit wohl die Modelle aller Atome mit Ausnahme derjenigen der leichtesten Elemente, in räumlichen Anordnungen gesucht werden müssen. Damit wachsen aber nicht nur die Möglichkeiten verschiedener Modellvorstellungen, sondern insbesondere werden der Rechnung unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg gelegt.

Auch über den Ursprung der Doppelstruktur der Alkali-Hauptserienterme lassen sich vorläufig nur Vermutungen aufstellen. Zweifellos liegt er in der Vielfachheit gewisser Bahnen, die zu einem bestimmten Energiewert gehören, begründet. Eine eingehende Theorie der Serienstruktur scheint jedoch

1) Vgl. z. B. W. Ritz, Ann. d. Phys. 12. p. 264. 1903.

prinzipielle Schwierigkeiten überwinden zu haben. Denn wegen des engen Zusammenhanges von Serienstruktur und anomalem Zeemaneffekt (komplizierte Zerlegungen, Paschen-Backeffekt) wird sie nur in Verbindung mit einer Theorie der Zeemanneffekte der Serienlinien einer befriedigenden Lösung fähig sein. Beim Bohrschen Modell wird der Zeemaneffekt dadurch erklärt, daß im Magnetfeld, solange man nur in der Feldstärke lineare Glieder berücksichtigt, das ganze Modell in unveränderter Konfiguration nach Art eines schnell laufenden schweren Kreisels um die Richtung des Magnetfeldes als Achse präzessiert; dabei sind nur quantenhaft ausgezeichnete Lagen des Modells gegen die Feldrichtung zulässig.¹⁾ Diese Lagen werden durch die Bedingung vorgeschrieben, daß das Impulsmoment des Atoms in der Feldrichtung eine Komponente besitze, die ein ganzzahliges Vielfache von $h/2\pi$ ist. Dieser Weg führt aber stets und nur zu Aufspaltungen mit normalen Abständen. Man gelangt nur zu den komplizierteren, der Runge-schen Regel entsprechenden Zerlegungen, wenn man zuläßt, daß diese Komponente unter Umständen auch ein einfacher Bruchteil von $h/2\pi$ sein kann. Diese Bedingung bedeutet einen Eingriff in die Ganzzahligkeit der Quantenansätze, läßt sich aber möglicherweise im Falle entarteter Probleme rechtfertigen.²⁾ Solche entartete Probleme sind aber gerade nötig zur Erklärung der Serienstruktur, weil sie für verschiedene Wahl gewisser Quantenzahlen verschieden liegende und verschieden gestaltete Bahnen (nahe) gleicher Energie geben können. In starken Magnetfeldern, wo neben Gliedern, die die Feldstärke $\mathfrak{H}$ enthalten, auch solche mit $\mathfrak{H}^2$ zu berücksichtigen sind, entfällt der Begriff der Entartung und damit auch der für diesen Fall geltende Quantenansatz: Die komplizierte Aufspaltung geht in die normale über (Paschen-Backeffekt). Inwiefern diese Auffassung sich halten läßt, muß eine genauere Durchführung derselben zeigen.

Zürich, Physikal. Institut d. Univers., Januar 1919.

1) Vgl. z. B. J. M. Burgers, *Het Atoommodel van Rutherford-Bohr*, Haarlem 1918, p. 175.

2) Vgl. z. B. K. Schwarzschild, *Sitz.-Ber. Berliner Akad.* 1916. p. 555.