Lage der Schwingungsebene des Pendels dar, so giebt die Bewegung des Zeigers n auf der Scheibe dd genau die scheinbare Drehung jener Ebene an. Wie nämlich die Schwingungsebene des Pendels durch das Beharrungsvermögen in ihrer Lage zurückgehalten wird, so geschieht dasselbe hier durch die Reibung; die Wirkung, wenn gleich durch verschiedene Kräfte hervorgebracht, ist dieselbe und daher auch die daraus hervorgehende Bewegung. Uebrigens verhält sich die Drehungsgeschwindigkeit von xx zu der von cc , wie $mb:ab = 1:\sin bam$; bam aber ist $= ome$, der geographischen Breite. — So stellt der Apparat die tägliche Umdrehung der Erde, die konische Bewegung des ruhenden Pendels für jede Breite, und die scheinbare, dem Sinus der Breite proportionale Drehung der Schwingungsebene um die Verticale des Horizontes dar. — Um den Apparat auch für den Pol brauchbar zu machen, befindet sich unterhalb der Scheibe cc ein Stift, der in eine Oeffnung des Tellers paßt und, wenn der Apparat für den Pol eingestellt ist, die Drehung der Scheibe cc hindert. — Der Apparat ist höchst sauber von Hrn. W. Langhoff hierselbst ausgeführt worden; die Gröfse der Durchmesser von xx , cc , dd und aa beträgt 12, 5, 6, $6\frac{1}{2}$ Centimeter.

Berlin, Febr. 1853.

XIV. Elementarer Beweis von der Drehungsgeschwindigkeit der Schwingungsebene eines Pendels unter verschiedenen Breiten; von Hrn. Crahay,

Mitglied d. Acad. d. Wiss. zu Brüssel.

(*Bull. de l'acad. etc. de Bruxelles*, 1852, T. XIX. pt. I. p. 537.)

Die gegenwärtige Notiz, hat blofs den Zweck, die Beziehung, welche zwischen der Drehungsgeschwindigkeit der Oscillationsebene und der Breite des Beobachtungsortes stattfindet, mit Hülfe der Elementar-Mathematik nachzu-

weisen. Ich betrachte das Phänomen in seiner größten Einfachheit, ohne mich mit den Ursachen zu beschäftigen, welche die Drehung der Ebene, deren Winkelgeschwindigkeit um die Lothrechte ich als constant annehme, periodisch abändern können. In der Arbeit meines geehrten Collegen, des Hrn. Schaar, ist die Aufgabe von allen Seiten gründlich behandelt worden ¹⁾.

Es sey $PEPF$ (Fig. 6 Taf. IV) ein Durchschnitt der als Kugel angenommenen Erde durch eine Meridian-Ebene, O sein Mittelpunkt, PP' die Drehungsaxe, und L ein Ort unter der Parallele ELF in der nördlichen Halbkugel. Die Gerade OLI repräsentirt für einen gegebenen Zeitpunkt die Lage der Verticale des Orts, dessen Meridiankreis PLP' ist, während die Gerade LM , die in L winkelrecht zur Verticale ist, in der Meridian-Ebene liegt, die Mittagslinie des Ortes vorstellt, und die Verlängerung der Axe in M schneidet.

Im Laufe eines Sterntages beschreiben, vermöge der Rotation der Erde, die Lothrechte Ol und die Mittagslinie ML , um die Axe PP' , gerade Kegelflächen, die den Kreis EF zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben und deren Scheitel respective in O und M liegen. Nach einer gewissen Zeit, die wir als sehr kurz voraussetzen, wird der Ort L den Bogen LL' des Parallelkreises durchlaufen haben, so dafs sich die Lothrechte des Ortes in $OL'I$, der Meridian desselben in $PL'P'$ und die Mittagslinie in $L'M$ befindet.

Angenommen, beim Abgang von L habe sich die Schwingungsebene in der Meridian-Ebene befunden d. h. in derjenigen Ebene, die durch die Lothrechte Ol und die Mittagslinie LM geht. Diese Schwingungsebene würde sich selbst immer genau parallel bleiben, trotz sie durch die Axendrehung der Erde im Raume fortgeführt wird, wenn nicht die Schwerkraft sie beständig nöthigte durch den

1) Dasselbe ist auch von anderen Mathematikern geschehen. Eine dieser vollständigen Lösungen des Problems werden wir noch nächstens mittheilen.

Mittelpunkt der Erde zu gehen. Allein dieß ist auch die einzige Veränderung, welche ihre Lage in Folge der Axendrehung erleidet, so daß, wenn der Ort L in L' angelangt ist, die Schwingungsebene durch die Lothrechte Ol' und durch eine der Mittagslinie LM parallele Gerade $L'M'$ bestimmt seyn wird. Mithin bildet, bei Ankunft in L' , die Schwingungsebene $M'L'l'$ mit der Ebene $ML'l'$ des Meridians des Orts einen Horizontalwinkel $ML'M'$, welcher, wegen vorausgesetzter Kleinheit des Bogens LL' , als gleich betrachtet werden kann dem Winkel LML' zwischen den Mittagslinien der beiden Orte L und L' . Dieß ist der Drehungswinkel, den man scheinbar an der Schwingungsebene beobachtet, der aber in Wahrheit dem Meridian LM zu kommt, welcher durch die Rotation der Erde seine Lage im Raume geändert hat.

Um diesen Winkel zu bestimmen, ziehe man die Geraden LN , $L'N$ nach dem Mittelpunkt N des Parallelkreises, die LO , $L'O$ nach dem Mittelpunkt O der Erde, und endlich, durch die Mitte R der Sehne LL' , die Geraden RN und RM , welche auf dieser Sehne winkelrecht sind und die gegenüber liegenden Winkel bei N und M in zwei gleiche Theile theilen.

Man bezeichne nun mit r den Erdradius, mit h den Stundenwinkel LNL' , mit H den Drehungswinkel LML' der Schwingungsebene und mit λ die Breite des Ortes.

Das in N rechtwinkliche Dreieck NLO , an welchem der Winkel NOL das Complement der Breite ist, giebt

$$NL = r \cos \lambda.$$

Aus dem in R rechtwinklichen Dreiecke LNR ergibt sich:

$$LR = NL \sin \frac{1}{2} LNL' = r \cdot \cos \lambda \cdot \sin \frac{1}{2} h.$$

Das in L rechtwinkliche Dreieck MLO liefert

$$ML = r \cdot \cot. \lambda.$$

Endlich führt das in R rechtwinkliche Dreieck LMR zu der Relation

$$\sin \frac{1}{2} LML' = \frac{LR}{LM}$$

oder

$$\sin \frac{1}{2} H = \frac{\cos \lambda \sin \frac{1}{2} h}{\cot \lambda} = \sin \frac{1}{2} h \cdot \sin \lambda.$$

Da nun der Meridian LM , bei dem Uebergange von L nach L' , ein Stück des Kegelmantels beschreibt, so muß, damit der ebene Winkel LML' den von jener Generatrix wirklich durchlaufenen Winkelraum ohne merklichen Fehler vorstelle, sowohl dieser Winkel als der Winkel LNL' sehr klein seyn, so klein, daß die sie messenden Bogen statt ihrer Sinus genommen werden können. Diefs führt, nach Fortlassung des gemeinschaftlichen Faktors $\frac{1}{2}$, zu dem Ausdruck

$$H = h \cdot \sin \lambda.$$

Wenn mithin der Punkt L der Erde einen Bogen h durchläuft, scheint die Schwingungsebene sich, im Sinne der scheinbaren Bewegung des Himmels, um die Lothrechte durch einen Winkel H zu drehen, dessen Werth $h \sin \lambda$ ist.

Wir haben angenommen, daß, beim Ausgang, die Schwingungsebene mit der Meridianebene zusammenfalle; allein man überzeugt sich leicht, daß wenn sie auch anfangs irgend einen Azimutalwinkel mit der letztern bildet, dennoch die Abweichung von dieser Lage, nach Durchlaufung des Bogens h , denselben Werth H hat. Daraus folgt, daß in jedem Augenblicke dieselbe Relation zwischen den Bogen H und h existirt, und da die Axendrehung gleichförmig ist, so ist es auch die der Schwingungsebene.

Da die Erde eine vollständige Drehung in 24 Stunden Sternzeit oder $23^h 56' 4'',09$ mittlerer Sonnenzeit ausführt, so folgt, daß in einer Sekunde mittlerer Zeit ein Bogen von $15'',041$ beschrieben wird. Das ist denn auch auf den Polen die Winkelbewegung der Schwingungsebene, während dieselbe unter unserer Breite, gesetzt diese sey 51° , nur $0,77715$ jenes Werthes beträgt. Diese Zahl ist der natürliche Sinus der Breite, folglich ist hier die Bewegung der Ebene nur $11'',689$. Und um eine volle Drehung zu machen, bedarf sie $30^h 47' 52''$ mittlerer Zeit, während unter den

den Polen dazu nur ein Sterntag nöthig ist. Damit die Ebene unter unseren Breiten einen Winkel von n Sekunden beschreibe, sind $\frac{n}{11,689}$ Sekunden mittlerer Zeit erforderlich.

In der südlichen Erdhälfte geschieht die Drehung der Schwingungsebene in umgekehrtem Sinne wie auf der nördlichen; d. h. sie folgt auch hier der scheinbaren Bewegung des Himmels.

Die mit der Formel $H = h \sin \lambda$ übereinstimmende graphische Construction zeigt, dafs, in dem Maafse als der Ort L dem Aequator näher liegt, also die beiden Meridiane LM und $L'M$ sich dem Parallelismus nähern, der Winkel H abnimmt, bis er unter dem Aequator Null wird, dafs er dagegen bei Verminderung des Abstandes von einem der Pole zunimmt, bis er unter dem Pole selbst dem Stundenwinkel h gleich ist.

Die Construction zeigt auch, wie die Winkelbewegung LNL' um die Axe PP' auf eine andere, gegen dieselbe geneigte Axe OLl bezogen werden kann, mit Hülfe zweier rotativen Componenten, einer um die neue Axe Ol , und einer anderen um die Gerade LM , die Mittagslinie des Punktes L . Die erste dieser Componenten ist der Winkel MLM' oder H dessen Werth $= h \sin \lambda$; die andere ist der Winkel LOL' , um welchen die Schwerkraft die Schwingungsebene dreht, um sie beständig gegen den Mittelpunkt der Erde zu richten. Der Werth dieses letzteren Winkels, den wir mit C bezeichnen wollen, ergiebt sich aus dem in R rechtwinklichen Dreieck LOR , welches giebt:

$$\sin \frac{1}{2} C = \frac{LR}{LO} = \sin \frac{1}{2} h \cdot \cos \lambda.$$

Substituirt man statt des Sinus die Bogen und läfst den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{2}i$ fort, so erhält man:

$$C = h \cdot \cos \lambda.$$