$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_1}{c} &= \sum_1^6 M_{1n} \varrho_n \\ \frac{\mu_2}{c} &= \sum_1^6 M_{2n} \varrho_n \\ \frac{\mu_3}{c} &= \sum_1^6 M_{3n} \varrho_n \\ \frac{\mu_4}{c} &= \sum_1^6 M_{4n} \varrho_n \\ \frac{\mu_5}{c} &= \sum_1^6 M_{5n} \varrho_n \end{aligned} \right\} 50) \quad \left. \begin{aligned} -\frac{m_1}{c} &= \sum_1^6 M_{1n} r_n \\ -\frac{m_2}{c} &= \sum_1^6 M_{2n} r_n \\ -\frac{m_3}{c} &= \sum_1^6 M_{3n} r_n \\ -\frac{m_4}{c} &= \sum_1^6 M_{4n} r_n \\ -\frac{m_5}{c} &= \sum_1^6 M_{5n} r_n \end{aligned} \right\} 51)$$

Bisher haben wir uns unsere Arbeit durch keine Vernachlässigung erleichtert. Das wollen wir jetzt tun, indem wir den Abstand der Leiter 3 und 4 als sehr groß voraussetzen. Dann kann man die Gegeninduktivität irgendeines Leiters 4, 5, 6 mit den Leiterpaaren 1 und 2 und umgekehrt die Gegeninduktivität irgendeines Leiters 1, 2, 3 mit den Leiterpaaren 4 und 5 gleich Null setzen. Die Forderung 49) zerfällt dann in die beiden Forderungen 1a) und 1b).

Der dann noch übrigbleibende Rest der Gl. 50) und 51) wird recht übersichtlich und lautet, wenn wir noch

$$M_{11} = a; \quad M_{12} = -a; \quad M_{13} = -M_{21} = -b$$

setzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_1}{c} &= a\varrho_1 - a\varrho_2 - b\varrho_3 \\ \frac{\mu_2}{c} &= b\varrho_1 + a\varrho_2 - a\varrho_3 \\ \frac{\mu_4}{c} &= a\varrho_4 - a\varrho_5 - b\varrho_6 \\ \frac{\mu_5}{c} &= b\varrho_4 + a\varrho_5 - a\varrho_6 \end{aligned} \right\} 52)$$

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 0; \quad \varrho_4 + \varrho_5 + \varrho_6 = 0. \quad 53)$$

Hieraus folgen die angegebenen Beziehungen 8a) und durch Änderung des Vorzeichens die Beziehungen 8b).

Einschaltspannungen der Spule aus zwei Windungen.

Von

Ludwig Dreyfus, Berlin-Niederschönhausen.

Das Studium der Fortpflanzung von Wanderwellen durch Spulen ist in jüngster Zeit in neue Bahnen gelenkt worden. Während man sich ursprünglich bemühte, die vieldrätige Spule durch einen Ersatzstromkreis aus konzentrierten Induktivitäten und Kapazitäten abzubilden, packte Rogowski¹⁾ das Problem mit glücklichem Griff am

¹⁾ Rogowski: „Spulen und Wanderwellen: I. Einschaltungen der Spule aus zwei Windungen“: Archiv f. Elektrot. 1918, 6, S. 265. „II. Resonanzspannungen beim Einschalten einer Spule aus zwei Windungen“: Archiv f. Elektrot. 1918, 6, S. 377. „Die Spule bei Wechselstrom“: Archiv f. Elektrot. 1918, 7, S. 17.

anderen Ende an: Er ging von der Spule mit wenigen — zunächst nur zwei — Windungen aus, berücksichtigte aber dafür die verteilte gegenseitige Induktivität und Kapazität der einzelnen Windungen. (Die Kapazität gegen Erde wird vernachlässigt.)

Abb. 1. Rogowskis Modell einer Spule aus zwei Windungen.

Das Rogowskische Modell der Spule aus zwei Windungen zeigt Abb. 1. Rogowski betrachtet sonach die Spule als zwei ineinandergeschobene Doppelleitungen AFGC und BHKD. Ihre magnetischen und elektrischen Felder sind in gleicher Art miteinander verkettet, denn die Niveaulinien des elektrischen Feldes sind zugleich Kraftlinien des magnetischen Feldes. Die rechnerischen Grundlagen für diese Betrachtungsweise hat K. W. Wagner¹⁾ in einem mehrere Jahre früher erschienenen Aufsatz zusammengestellt.

Die Behandlung der Spule aus zwei Windungen hat Rogowski zu schönen Ergebnissen bezüglich ihres Verhaltens bei hochfrequentem Wechselstrom geführt. Dagegen sind seine Ausführungen über die Einschaltspannungen der Spule aus zwei Windungen nicht leicht auf praktische Fälle zu übertragen. Das hat drei Gründe:

Einmal ist die Spule aus zwei Windungen noch ein gutes Stück von der vieldrähtigen Spule entfernt. Doch war fürs erste die Beschränkung auf zwei Windungen notwendig und ich erblicke sogar das Hauptverdienst der Rogowskischen Arbeiten darin, daß er ungeachtet dieses Abstandes das Problem erstmalig von dieser Seite in Angriff genommen hat.

Schwerwiegend erscheint mir jedoch ein zweites Bedenken: Man kann bei Schaltprozessen nicht darauf rechnen, daß beide Schaltmesser genau gleichzeitig an die Wicklungsenden gelegt werden. Hierin besteht aber die Voraussetzung für die vollkommene oder doch annähernde Symmetrie des elektrischen und magnetischen Feldes gegen die Spulen-Mittelebene und gerade dieser Annahme verdankt Rogowski seine einfachen Ergebnisse. Fällt diese Voraussetzung fort, so muß man auch die Kapazität der Windungen gegen Erde berücksichtigen.

Abb. 2. Modell einer Spule aus zwei Windungen mit angeschlossener Leitung.

Endlich ist mir kein praktisch wichtiger Schaltprozeß bekannt, bei dem die Einschaltwellen an einem Wicklungsende den Einschaltvorgang am anderen Wicklungsende so entscheidend beeinflussen, wie dies unter den Annahmen der Rogowskischen Arbeit der Fall ist²⁾.

Die beiden letzten Erwägungen veranlaßten mich, das Rogowskische Modell so abzuändern, wie es Abb. 2 zeigt: Eine widerstandslose Spule aus zwei Windungen sitzt auf einem geerdeten metallischen Kern. Nur der Anfang der Spule wird plötzlich an Spannung gelegt. Das Spulenende mündet in eine Leitung von beliebigem Wellenwiderstand, die so geführt sein soll, daß Wanderwellen auf dieser Leitung die Vorgänge in der

¹⁾ K. W. Wagner: „Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen“; ETZ 1914, S. 639.

²⁾ Nach Einsendung der Arbeit war Herr Rogowski so freundlich, mich auf folgenden Fall aufmerksam zu machen: Man denke sich in Abb. 1 den ersten Schalter eingelegt und die Aufladung der Spule vollendet. Nun werde auch der zweite Schalter eingelegt. Für den hierauf folgenden Ausgleichvorgang sind Rogowskis Annahmen erfüllt, vorausgesetzt daß die Wanderwellen die Spannungsquelle — als welche auch ein Kabel oder ein Kondensator fungieren kann — ohne Verzerrung und Reflexionen überbrücken können.

Spule selbst nicht induktiv beeinflussen. Wie in der zitierten Arbeit von Wagner berücksichtigen wir die gegenseitige Kapazität und Induktivität der Windungen, sowie ihre Kapazität gegen Erde. Wir betrachten dabei die Felder als rein transversal, vernachlässigen also die magnetischen Wirkungen des Verschiebungsstromes. Endlich möge der metallische Kern für die Dauer des Ausgleichvorganges als feldfrei angesehen werden. Diese Annahme ist zulässig. Denn auch in sehr fein unterteiltem Eisen erfordert die Ausbildung des magnetischen Feldes ein Vielfaches der Zeit, die eine Wanderwelle braucht, um die Spule zu durchlaufen.

I. Die einleitenden Schwingungsvorgänge.

Unter den genannten Voraussetzungen ist es nicht schwer, sich ohne Rechnung ein richtiges Bild von den ersten Schaltwellen zu machen.

(Im folgenden werden die in die Spule hinein (d. h. in der Richtung A—E) laufenden Strom- und Spannungswellen mit J' und V' , die rückläufigen Wellen mit J'' und V'' bezeichnet. Die Spannungen und Ströme an den Knotenpunktstellen A, M, E seien V und J . Arabische Ziffern als Indizes beziehen sich auf die Spulenabschnitte 1, 2, 3, die römischen Ziffern geben an, wie viele Wellen seit Beginn des Schaltprozesses bereits in die Wicklung eingedrungen sind. $(V_1')_I$ ist also die erste Schaltwelle, welche in den Windungsabschnitt 1 eindringt.)

Sobald der Schalter geschlossen wird, dringt eine Wanderwelle

$$(V_1')_I = E$$

mit Lichtgeschwindigkeit in die erste Windung der Spule ein. Sie wird magnetisch und elektrisch auf die zweite Windung übertragen und breitet sich dort mit Lichtgeschwindigkeit nach beiden Richtungen aus. So entstehen gleichzeitig eine rechtsläufige Welle $(V_2')_I$ und eine linksläufige Welle $(V_2'')_I$. Die zuletzt genannte Welle induziert ihrerseits die benachbarte Windung 3, so daß auch am Windungsende zwei Wellen entspringen: eine rückläufige Welle $(V_3'')_I$ die mit $(V_2'')_I$ magnetisch und elektrisch gekoppelt ist, und eine vorwärtslaufende Welle $(V_3')_I$, welche in die angeschlossene Leitung eindringt. Soweit die Spannungswellen in Betracht kommen, entwickelt sich somit der Einschaltvorgang, wie in Abb. 3a gezeichnet.

In den Stromwellen der Abb. 3b haben wir nur einen anderen Ausdruck für dieselben Vorgänge zu erblicken. Ist

$$r = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

der Wellenwiderstand der angeschlossenen Leitung, so verbraucht diese bei einer Ladestromspannung V_{3I} den Ladestrom

$$J_{3I}' = \frac{V_{3I}'}{r}.$$

Da dieser Strom nur an der Wellenfront V_{2I}'' der mittleren Windung übertragen werden kann, so haben wir in 2 und 3 zwei linksläufige Wellen J_{2I}'' und J_{3I}' entgegengesetzten Vorzeichens anzunehmen. Dabei ist J_{2I}'' um den zur Erde abfließenden Ladestrom größer als J_{3I}' . Ähnlich liegen die Verhältnisse zwischen den parallelen Windungsabschnitten 1 und 2. Die Leitung 2 empfängt ihren Strom $J_{2I}' = J_{2I}''$ an der Wellenfront V_{1I}' und abermals ist die Stromamplitude J_{1I}' um den zur Erde abfließenden Ladestrom größer als die Amplitude J_{2I}' (vgl. Abb. 3b').

Je geringer der Abstand zwischen den parallelen Windungsabschnitten, um so geringer sind die Unterschiede zwischen V_1' und V_2' einerseits und zwischen V_2'' und V_3'' andererseits. Im Grenzfall unendlich benachbarter Windungen würde sogar die volle Einschaltspannung E quer zu den Windungen auf die angeschlossene Leitung

Spannungsverteilung.

Stromverteilung.

Abb. 3.
Erstes Intervall ($p = I$). Abb. 4.
Zweites Intervall ($p = II$).

Abb. 3 b'. Schema der Stromverteilung zu Abb. 3 b. •

Abb. 5.

Drittes Intervall ($p = III$).

Abb. 3 bis 5. Spannungs- und Stromwellen während der ersten Schwingungsintervalle.

Auch die übrigen Wellen sind nicht unabhängig voneinander. Die Stetigkeit in M verlangt nämlich (Abb. 6):

$$[V_{10} + V_2'']_p = V_{2p} = [V_{30} + V_2']_p \quad \dots \dots \dots 2)$$

sowie

$$[J_{10} + J_2'']_p = J_{2p} = [J_{30} + J_2']_p \quad \dots \dots \dots 3)$$

Analog setzen wir für die Spannungen und Ströme am Spulenende:

$$[V_{30} + V_3'']_p = V_{3p} \quad \dots \dots \dots 4)$$

sowie

$$[J_{30} + J_3'']_p = J_{3p} \quad \dots \dots \dots 5)$$

wobei J_{3p} den Momentanwert des in die Leitung abfließenden Stromes bedeutet. Da ferner diese Leitung durch den elektromagnetischen Ausgleich-Vorgang innerhalb der Spule nicht induziert werden soll, besteht zwischen Spannung und Strom der einfache Zusammenhang:

$$V_{3p} = J_{3p} \cdot r \quad \dots \dots \dots 5a)$$

Es ist daher für den Vorgang in der Spule gleichgültig, ob an ihrem Ende eine lange Leitung vom Wellenwiderstande r oder ein gleichgroßer induktionsfreier Widerstand zur Erde abgezweigt wird.

Abb. 6a. Spannungsverteilung.

Abb. 6b. Stromverteilung.

Abb. 6a u. b. Zur Formulierung der Wanderwellengleichungen für parallele Windungsabschnitte.

Die Anfangs- und Grenzbedingungen des Problems haben wir mit den Gesetzen der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den parallelen Spulenabschnitten zu kombinieren. — Bei zwei magnetisch gekoppelten Stromkreisen mit konzentrierten Induktivitäten pflegt man die totale Feldspannung eines Kreises in eine EMK der Selbstinduktion und eine EMK der Wechselinduktion aufzulösen. Geradeso ist es auch bei der Behandlung von Wanderwellen vorteilhaft¹⁾ die Amplitude der Spannungswelle aus einer dem eigenen Strom (J_1) entsprechenden Komponente

$$V_{11} = J_1 w$$

und einer von der benachbarten Leitung induzierten Komponente

$$V_{21} = J_2 x$$

abzuleiten. Dabei bezeichnet

$$w = c \cdot L_1$$

(c = Wanderwellengeschwindigkeit) den Eigen-Wellenwiderstand der aus Leitung 1

¹⁾ Vgl. die zitierte Arbeit von Wagner.

und Erde gebildeten Schleife, deren Selbstinduktion pro Längeneinheit L_1 ist. Analog bedeutet

$$x = c \cdot M$$

den Wechsel-Wellenwiderstand zwischen den aus Leitung 1 bzw. 2 mit Erde als Rückleitung gebildeten Schleifen ($M =$ Koeffizient der magnetischen Wechselinduktion pro Längeneinheit zwischen beiden Schleifen). Wir schreiben daher für irgendeine rechtsläufige Welle V'_{1p} auf Leitung 1:

$$V'_{1p} = J'_{1p} w + J'_{2p} x \dots \dots \dots 6)$$

Dieselbe Überlegung liefert für den parallelen Windungsschnitt 2:

$$V'_{2p} = J'_{2p} w + J'_{1p} x \dots \dots \dots 7)$$

Analoge Gleichungen drücken die Wechselwirkung zwischen den Windungsabschnitten 2 und 3 aus. Da es sich aber hierbei um linksläufige Wellen handelt, haben wir das negative Vorzeichen zu gebrauchen, also:

$$-V''_{2p} = J''_{2p} w + J''_{3p} x \dots \dots \dots 8)$$

bzw.

$$-V''_{3p} = J''_{3p} w + J''_{2p} x \dots \dots \dots 9)$$

Diese Gleichungen im Verein mit den Anfangs- und Grenzbedingungen 1 bis 5 genügen, um für irgendeinen Umlauf p sämtliche Unbekannte zu berechnen. Ich will mich jedoch hierbei nicht aufhalten, sondern sogleich die Lösung mitteilen. Zur Abkürzung der Formeln gebrauchen wir den Blondelschen Koeffizienten der Gesamtstreuung zwischen den aus zwei parallelen Windungsabschnitten mit Erde als Rückleitung gebildeten Schleifen:

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L^2} = 1 - \frac{x^2}{w^2} \dots \dots \dots 10)$$

Ferner eine Hilfsgröße von der Dimension eines Wellenwiderstandes

$$z = r(1 + \sigma) + 2w\sigma \dots \dots \dots 11)$$

Wir erhalten dann zunächst zwei Beziehungen zwischen den Wellen V''_{2p} und V''_{3p} , nämlich:

$$V''_{2p} \frac{2w}{x} - V''_{3p} = \left[V'_1 + \frac{w}{x} (V_{30} - V_{10}) + \frac{w^2 \sigma}{x} (J_{10} - J_{30}) \right]_p \dots \dots 12)$$

und

$$V''_{2p} \frac{xr}{w} - V''_{3p} \left(\frac{r}{w} + \sigma \right) = -[J_{30}r - V_{30}]_p \cdot \sigma \dots \dots \dots 13)$$

Daraus folgt für die Spannungswellen des p -ten Umlaufes

$$V''_{3p} = \left[V'_1 + \frac{w}{x} (V_{30} - V_{10}) + \frac{w^2 \sigma}{x} (J_{10} - J_{30}) \right]_p \frac{r(1 - \sigma)}{z} + [J_{30}r - V_{30}]_p \frac{2w\sigma}{z} \quad 14)$$

$$V''_{2p} = \left[V'_1 + \frac{w}{x} (V_{30} - V_{10}) + \frac{w^2 \sigma}{x} (J_{10} - J_{30}) \right]_p \frac{x}{z} \left(\frac{r}{w} + \sigma \right) + [J_{30}r - V_{30}]_p \frac{x\sigma}{z} \quad 15)$$

$$V'_{2p} = V''_{2p} + (V_{10} - V_{30})_p \dots \dots \dots 16)$$

Sind diese Werte berechnet, so erhält man auch die Knotenpunktsspannungen V_{2p} und V_{3p} aus den Gl. 2) und 4).

Analog ergeben sich für die Stromwellen zunächst zwei Gleichungen zwischen J''_{2p} und J''_{3p} nämlich:

$$J''_{2p} w (1 + \sigma) + J''_{3p} x = - \left[V'_1 + \frac{w}{x} (V_{30} - V_{10}) + \frac{w^2 \sigma}{x} (J_{10} - J_{30}) \right]_p \frac{x}{w} \dots \dots 17)$$

und

$$J''_{2p} x + J''_{3p} (r + w) = -[J_{30}r - V_{30}]_p \dots \dots \dots 18)$$

Hieraus folgt dann für die Stromwellen selbst:

$$J_{3p}'' = \left[V_1' + \frac{w}{x} (V_{30} - V_{10}) + \frac{w^2 \sigma}{x} (J_{10} - J_{30}) \right]_p \frac{1 - \sigma}{z} - [J_{30} r - V_{30}]_p \frac{1 + \sigma}{z} \quad 19)$$

$$J_{2p}'' = - \left[V_1' + \frac{w}{x} (V_{30} - V_{10}) + \frac{w^2 \sigma}{x} (J_{10} - J_{30}) \right]_p \frac{x}{wz} \left(1 + \frac{r}{w} \right) + [J_{30} r - V_{30}]_p \frac{x}{wz} \quad 20)$$

$$J_{2p}' = J_{2p}'' + [J_{10} - J_{30}]_p \quad \dots \quad 21)$$

$$J_{1p}' = \frac{V_{1p}'}{w} - J_{2p}' \frac{x}{w} \quad \dots \quad 22)$$

Endlich berechnen wir noch den gesamten in die Spule eintretenden Strom:

$$J_{1p} = [J_{10} + J_1]_p \quad \dots \quad 23)$$

und den am Spulenende austretenden Strom

$$J_{3p} = [J_{30} + J_3]_p = \frac{V_{3p}}{r} \quad \dots \quad 5)$$

Damit sind sämtliche Unbekannte ermittelt.

III. Die Berechnung der Strom- und Spannungswellen während der beiden ersten Intervalle ($p = I$ und $p = II$).

Das erste Schwingungsintervall (Index $p = I$).

Bevor die Spannung E auf die Spule geschaltet wurde, waren die Spule und die angeschlossene Leitung spannungs- und stromlos. Für die ersten Schaltwellen sind daher die Anfangsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} (V_{10})_I &= (V_{30})_I = 0 \\ (J_{10})_I &= (J_{30})_I = 0 \\ V_{1I}' &= E \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 24)$$

Für die übrigen Spannungswellen entnehmen wir den Gl. 14) und 15) sofort die Lösung:

$$V_{3I} = V_{3I}'' = E \cdot \frac{r}{z} (1 - \sigma) \quad \dots \quad 25)$$

$$V_{2I} = V_{2I}' = V_{2I}'' = E \cdot \frac{x}{z} \left(\frac{r}{w} + \sigma \right) \quad \dots \quad 26)$$

Ferner betragen die Stromwellen nach Gl. 19), 20) und 22):

$$J_{3I} = J_{3I}'' = \frac{E}{z} (1 - \sigma) \quad \dots \quad 27)$$

$$J_{2I} = J_{2I}' = J_{2I}'' = - \frac{E}{z} \frac{x}{w} \left(1 + \frac{r}{w} \right) \quad \dots \quad 28)$$

$$J_{1I} = J_{1I}' = \frac{E}{z} \left(1 + 2 \frac{r}{w} + \sigma \right) \quad \dots \quad 29)$$

Die Bedeutung der Hilfsgröße z erkennen wir am besten aus Gl. 27). Ihr zufolge ist der erste Ladestromstoß, der in die angeschlossene Leitung entsandt wird, ebenso groß, als träfe sie die volle Spannung E bei einem Wellenwiderstand

$$\frac{z}{1 - \sigma} = r \left(\frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} + 2 \frac{w}{r} \frac{\sigma}{1 - \sigma} \right) \quad \dots \quad 11a)$$

Je fester hiernach die elektrische und magnetische Koppelung der Windungen, d. h.

je geringer ihre Streuung σ , um so mehr nähert sich $\frac{z}{1-\sigma}$ dem wahren Wellenwiderstand r der Leitung, um so größer wird daher der Ladestromstoß J_{3I} und die Ladespannung V_{3I} . Im Grenzfalle $\sigma=0$ dringt die volle Einschaltspannung in die Leitung ein. Setzen wir dagegen beispielsweise

$$\sigma = 0,2 \quad \text{und} \quad r = w,$$

so wird

$$\frac{z}{1-\sigma} = 2r,$$

d. h. Ladestrom und Ladespannung sind nur halb so groß, als würde die Leitung ohne Vorschaltung der Spule an gleiche Spannung gelegt. Für diese Verhältnisse sind die Abb. 3 bis 5 entworfen. Die Zahlenwerte sind:

$$\begin{aligned} V_{1I} &= E & J_{1I} &= 2 \frac{E}{w}, \\ V_{2I} &= 0,67 E & J_{2I} &= -1,12 \frac{E}{w}, \\ V_{3I} &= 0,5 E & J_{3I} &= 0,5 \frac{E}{w}. \end{aligned}$$

Das zweite Schwingungsintervall (Index $p=II$).

Nachdem die Spannungs- und Stromwellen eine Windung durchlaufen haben, erreichen sie die Knotenpunkte A, M und E. Der damit hergestellte Ladezustand ist der Anfangszustand, dem sich die an den Knotenpunkten reflektierten Wellen überlagern. Für dieses zweite Intervall ist daher gemäß Abb. 3c, d und 4a, b

$$\left. \begin{aligned} (V_{10})_{II} &= [V_1' + V_2'']_I \\ (V_{30})_{II} &= [V_2' + V_3'']_I \end{aligned} \right\} \dots 30) \quad \left| \quad \begin{aligned} (J_{10})_{II} &= [J_1' + J_2'']_I \\ (J_{30})_{II} &= [J_2' + J_3'']_I \end{aligned} \right\} \dots 31)$$

Die am Spulenansatz eindringende Entladewelle V'_{1II} entsteht durch totale Reflexion der von innen auftreffenden Ladewelle V''_{2I} . Es gilt daher:

$$V'_{1II} = -V''_{2I} \dots \dots \dots 32)$$

Treten wir mit diesen Anfangsbedingungen in die allgemeinen Gl. 14) bis 16) und 19) bis 23) ein, so erhalten wir für die Amplituden der Wanderwellen: .

$$\left. \begin{aligned} V''_{3II} &= - \left[V_2 + V_3 \frac{4x\sigma}{z} \right]_I \\ V''_{2II} &= - \left[V_3 + V_2 \frac{4x\sigma}{z} \right]_I \\ V'_{2II} &= E - \left[2V_3 + V_2 \frac{4x\sigma}{z} \right]_I \end{aligned} \right\} 33) \quad \left| \quad \begin{aligned} J''_{3II} &= - \left[J_2 + J_3 \frac{4x\sigma}{z} \right]_I \\ J''_{2II} &= - \left[J_3 + J_2 \frac{4x\sigma}{z} \right]_I \\ J'_{2II} &= J_{1I} - \left[2J_3 + J_2 \frac{4x\sigma}{z} \right]_I \\ J'_{1II} &= \left[-3J_1 + 2J_2 \frac{4x\sigma}{z} + 5J_3 \right]_I \frac{x}{2w} \end{aligned} \right\} 34)$$

Daraus berechnen sich sodann auch die Spannungen und Ströme an den Knotenpunkten A, M, E:

$$\left. \begin{aligned} V_{1II} &= E \\ V_{2II} &= E + \left[V_2 \left(1 - \frac{4x\sigma}{z} \right) - V_3 \right]_I \\ V_{3II} &= V_{3I} \left(1 - \frac{4x\sigma}{z} \right) \end{aligned} \right\} 35) \quad \left| \quad \begin{aligned} J_{1II} &= [J_1 + J_2]_I + J'_{1II} \\ J_{2II} &= J_{1I} + \left[J_2 \left(1 - \frac{4x\sigma}{z} \right) - J_3 \right]_I \\ J_{3II} &= J_{3I} \left(1 - \frac{4x\sigma}{z} \right) \end{aligned} \right\} 36)$$

Unser Beispiel liefert gemäß den Anfangsbedingungen

$$(V_{10})_{II} = 1,67 E$$

$$(J_{10})_{II} = 0,88 \frac{E}{w}$$

$$(V_{30})_{II} = 1,17 E$$

$$(J_{30})_{II} = -0,62 \frac{E}{w}$$

für die Schaltwellen:

$$V'_{1II} = -0,67 E$$

$$J'_{1II} = -2,01 \frac{E}{w}$$

$$V'_{2II} = -0,3 E$$

$$J'_{2II} = 1,5 \frac{E}{w}$$

$$V''_{2II} = -0,8 E$$

$$J''_{2II} = 0$$

$$V''_{3II} = -0,893 E$$

$$J''_{3II} = 0,893 \frac{E}{w}$$

und für die elektromagnetischen Größen in den Knotenpunkten

$$V_{1II} = E$$

$$J_{1II} = -1,13 \frac{E}{w}$$

$$V_{2II} = 0,87 E$$

$$J_{2II} = 0,88 \frac{E}{w}$$

$$V_{3II} = 0,277 E$$

$$J_{3II} = 0,277 \frac{E}{w}$$

Bei dem das zweite Intervall ausfüllenden Entladevorgange steigt also die Knotenpunktspannung in M wieder nahezu auf den vollen Wert der Schaltspannung E. Dagegen sinkt die Spannung am Spulenende nahezu auf die Hälfte des Spannungsstoßes (V_{3I}) , welcher im Schaltmoment in die Leitung eindrang.

IV. Die Differenzengleichung der Spannungswellen.

Die Formeln 14 bis 23 gestatten bereits eine sukzessive Berechnung der Strom- und Spannungswellen aufeinanderfolgender Schwingungsintervalle. Sie lassen jedoch ohne eine wiederholte Durchführung dieser zeitraubenden Rechnung nicht erkennen, wie sich der Schwingungsvorgang im großen und ganzen abwickeln wird. Wir wären

Abb. 7. Zum Vergleich der Spannungsverteilung V_{10} und V_{30} am Anfang des $(p-1)$ -ten und p -ten Intervalles.

ein großes Stück weiter, wenn wir die Amplitude irgendeiner Spannungsweile allein durch die Einschaltspannung E und die Ordnungszahl p des Schwingungsintervalles ausdrücken könnten. Es wird sich zeigen, daß dies in der Tat möglich ist.

Um hierhin zu gelangen, müssen wir eine Beziehung suchen, die während einiger

aufeinanderfolgender Zeitintervalle die Amplituden ein und derselben Spannungswelle verknüpft. Eine Gleichung dieser Art

$$f(V_p, V_{p-1}, V_{p-2}, \dots, V_{p-n}) = 0$$

nennt man eine Differenzengleichung n -ten Grades für die variable V .

Wir beginnen damit, daß wir in den Gl. 12) und 13) die Größen des Anfangszustandes $((V_{10})_p, (V_{30})_p, (J_{10})_p$ und $(J_{30})_p$) durch die Spannungswellen des vorhergehenden Schwingungsintervalls (Index $p-1$) ausdrücken. Zum Teil ist diese Umformung aus Abb. 7 direkt abzulesen. Vergleicht man nämlich den Anfangszustand der p -ten und $(p-1)$ -ten Welle, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} (V_{10})_p &= [V_{10} + V_1' + V_2'']_{p-1} \\ (V_{30})_p &= [V_{30} + V_2' + V_3'']_{p-1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 37)$$

Da in Gl. 12) nur die Differenz der Anfangspotentiale auftritt, so bilden wir

$$[V_{30} - V_{10}]_p = [(V_{30} - V_{10}) - (V_2'' - V_1')]_{p-1} + [V_3'' - V_1']_{p-1}$$

oder da sich nach Gl. 2) die Glieder unter der ersten eckigen Klammer auf der rechten Seite fortheben:

$$[V_{30} - V_{10}]_p = [V_3'' - V_1']_{p-1} \dots \dots \dots 38)$$

Auf demselben Wege ergibt sich durch die Differenz der Anfangsströme:

$$[J_{10} - J_{30}]_p = [J_1' - J_3'']_{p-1} \dots \dots \dots 39)$$

Hierin haben wir aber noch die Stromwellen der rechten Seite durch die Spannungswellen des gleichen Intervalles auszudrücken. Aus den Gl. 6) bis 9) entwickeln wir zunächst

$$[J_1' - J_3'']_{p-1} = \frac{1}{w^2 \sigma} [V_1' w - 2 V_2'' x + V_3'' w]_{p-1} + [V_{30} - V_{10}]_{p-1}$$

und mit Benutzung von Gl. 38):

$$[J_{10} - J_{30}]_p = \frac{1}{w^2 \sigma} [V_1' - 2 V_2'' x + V_3'' w]_{p-1} + [V_3'' - V_1']_{p-2} \dots \dots 40)$$

Beachtet man noch das Reflexionsgesetz für den Spulenanfang:

$$V_{2(p-1)}'' = -V_{1p}'$$

so liefert die rechte Seite der Gl. 12)

$$[V_1' + \frac{w}{x}(V_{30} - V_{10}) + \frac{w^2 \sigma}{x}(J_{10} - J_{30})]_p = 3V_{1p}' + \frac{2w}{x}V_{3(p-1)}'' + [V_3'' - V_1']_{p-2} \quad 41)$$

In ähnlicher Weise entwickeln wir für die rechte Seite der Gl. 13):

$$-[J_{30} r - V_{30}]_p \sigma = \left(\frac{r}{w} - \sigma\right) V_{1p}' + \frac{R x}{w^2} V_{1(p-1)}' + \left(\frac{r}{w} - \sigma\right) [V_3'' - V_1']_{p-2} \dots 42)$$

Diese Werte führen wir in die Gl. 12) und 13) ein und erhalten

$$\frac{2w}{x} V_{1(p+1)}' + 4V_{1p}' + \frac{2w}{x} V_{1(p-1)}' = [V_1' - V_3'']_p + \frac{2w}{x} [V_1' - V_3'']_{p-1} + [V_1' - V_3'']_{p-2} \quad 43)$$

$$\frac{r x}{w} V_{1(p+1)}' + 2r V_{1p}' + \frac{r x}{w} V_{1(p-1)}' = (r + w \sigma) [V_1' - V_3'']_p + (r - w \sigma) [V_1' - V_3'']_{p-2} \quad 44)$$

Damit haben wir zwei Differenzengleichungen zweiten Grades für die zwei Unbekannten V_1' und V_3'' gewonnen. Doch treten noch beide Spannungen in beiden Gleichungen auf. Wir müssen daher eine der Unbekannten eliminieren, wobei sich der Grad der Differenzengleichung erhöht.

Zunächst leiten wir durch einfache Umformung aus 43) und 44) zwei neue Gleichungen ab, die zur weiteren Behandlung besser geeignet sind:

$$z \cdot V_{1(p+1)}' + \frac{2x}{w}(r+2w\sigma)V_{1p}' + zV_{1(p-1)}' = 2(r+w\sigma)[V_1' - V_3'']_{p-1} + 2x\sigma[V_1' - V_3'']_{p-2} \quad 45)$$

$$(z-4w\sigma)V_{1(p+1)}' + \frac{2x}{w}(r-2w\sigma)V_{1p}' + (z-4w\sigma)V_{1(p-1)}' \\ = -2x\sigma[V_1' - V_3'']_p + 2(r-w\sigma)[V_1' - V_3'']_{p-1} \dots \dots \dots 46)$$

Dazu fügen wir die beiden folgenden Gleichungen, die aus den vorigen entstehen, in dem wir den Index der Spannungswellen um 1 erhöhen bzw. erniedrigen:

$$z \cdot V_{1(p+2)}' + \frac{2x}{w}(r+2w\sigma)V_{1(p+1)}' + zV_{1p}' = 2(r+w\sigma)[V_1' - V_3'']_p + 2x\sigma[V_1' - V_3'']_{p-1} \quad 45a)$$

$$(z-4w\sigma)V_{1p}' + \frac{2x}{w}(r-2w\sigma)V_{1(p-1)}' + (z-4w\sigma)V_{1(p-2)}' \\ = -2x\sigma[V_1' - V_3'']_{p-1} + 2(r-w\sigma)[V_1' - V_3'']_{p-2} \dots \dots \dots 46a)$$

Endlich bilden wir:

$$-(45)(r-w\sigma) + (46)(r+w\sigma) + (45a + 46a)x\sigma.$$

Dann fallen alle Glieder auf der rechten Seite fort und es bleibt

$$V_{1(p+2)}' + \frac{4x\sigma}{z}V_{1(p+1)}' - \frac{2r(1-\sigma)}{z}V_{1p}' - \frac{4x\sigma}{z}V_{1(p-1)}' + \left(1 - \frac{4w\sigma}{z}\right)V_{1(p-2)}' = 0 \quad 47)$$

Dies ist die gesuchte Differenzgleichung für die Amplitude der Spannungswelle, die vom Schalter aus in die Spule eindringt. Gleichlautende Differenzgleichungen liefern auch die übrigen Wanderwellen V_{3p}'' , ferner

$$V_{2p}'' = -V_{1(p+1)}' \dots \dots \dots 32a)$$

und

$$V_{2p}' = -V_{1(p+1)}' + [V_1' - V_3'']_{p-1} \dots \dots \dots 48)$$

Die Gleichungen der Anfangsspannungen V_{10} , V_{30} und der Knotenpunktsspannungen V_2 , V_3 unterscheiden sich nur durch ein Zusatzglied $E \frac{4r\sigma}{z}$ auf der rechten Seite. Z. B.:

$$V_{3(p+2)} + \frac{4x\sigma}{z}V_{3(p+1)} - \frac{2r(1-\sigma)}{z}V_{3p} - \frac{4x\sigma}{z}V_{3(p-1)} + \left(1 - \frac{4w\sigma}{z}\right)V_{3(p-2)} = \frac{4r\sigma}{z}E.$$

Wir können jedoch auch die Knotenpunktsspannungen durch die Wanderwellen-Amplituden ausdrücken, indem wir entwickeln

$$V_{2p} = (V_{10})_p + V_{2p}'' = E - V_{1p}' + V_{2p}'' \dots \dots \dots 49a)$$

und

$$V_{3p} = (V_{30})_p + V_{3p}'' = [V_{30} - V_{10}]_p + E + [V_3'' - V_1']_p$$

oder

$$V_{3p} = [V_3'' - V_1']_p + [V_3'' - V_1']_{p-1} \dots \dots \dots 49b)$$

Gl. 47) ist eine Differenzgleichung vierten Grades mit konstanten Koeffizienten. Man kann sie lösen, wenn man ihre „charakteristische Gleichung.“

$$y^4 + \frac{4x\sigma}{z}y^3 - \frac{2r(1-\sigma)}{z}y^2 - \frac{4x\sigma}{z}y + \left(1 - \frac{4w\sigma}{z}\right) = 0 \dots \dots \dots 50)$$

zu lösen vermag. Besitzt diese Gleichung vier reelle Wurzeln y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , so lautet die Lösung der Differenzgleichung:

$$V_{1p}' = C_1y_1^p + C_2y_2^p + C_3y_3^p + C_4y_4^p, \dots \dots \dots 51)$$

wobei die willkürlichen Konstanten C_1 bis C_4 aus den Anfangsbedingungen der Aufgabe zu berechnen sind.

Sind dagegen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung konjugiert-komplex, etwa:

$$\left. \begin{aligned} y_{12} &= u(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \\ y_{34} &= v(\cos \psi \pm i \sin \psi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 52)$$

so lautet die Lösung der Differenzengleichung:

$$\left. \begin{aligned} V'_{1p} &= u^p (C_1 \cos p\varphi + C_2 \sin p\varphi) + v^p (C_3 \cos p\psi + C_4 \sin p\psi) \\ &= A \cdot u^p \cos(p\varphi - \alpha) + B \cdot v^p \cos(p\psi - \beta) \end{aligned} \right\} \dots \dots 53)$$

Glücklicherweise ist Gl. 50) für nicht zu große Werte der Streuung in einfacher Weise und doch mit guter Annäherung lösbar. Ist nämlich σ^2 klein gegen 1, so kann man an Stelle des mittleren Gliedes das nur wenig geänderte Glied

$$\frac{2r(1 - \sigma - 2\sigma^2)}{z} y^2 \approx \frac{2r(1 - \sigma)}{z} y^2 \dots \dots \dots 54)$$

eingeführen. In diesem Falle läßt sich die Gleichung als das Produkt zweier Ausdrücke vom zweiten Grade darstellen:

$$\left(y^2 - 2 \frac{x}{w} \frac{r(1 + \sigma)}{z} y + 1 - \frac{4w\sigma}{z} \right) \cdot \left(y^2 + 2 \frac{x}{w} + 1 \right) = 0 \dots \dots \dots 55)$$

Da beide Klammerwerte für sich verschwinden müssen, so sind die ersten beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

$$y_{12} = \frac{x}{w} \cdot \frac{r(1 + \sigma)}{z} \pm i \sqrt{\sigma} \cdot \frac{\sqrt{r^2(1 + \sigma)^2 - 4w^2\sigma}}{z} \dots \dots \dots 56)$$

oder in der oben gegebenen Schreibweise

$$u = \sqrt{1 - \frac{4w\sigma}{z}} \dots \dots \dots 56a)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{w} \frac{r(1 + \sigma)}{zu} \dots \dots \dots 56b)$$

und

$$\sin \varphi = \sqrt{\sigma} \frac{\sqrt{r^2(1 + \sigma)^2 - 4w^2\sigma}}{zu} \dots \dots \dots 56c)$$

Dagegen liefert die dritte und vierte Wurzel:

$$y_{34} = -\frac{x}{w} \pm i \sqrt{\sigma} \dots \dots \dots 57)$$

oder in trigonometrischer Form

$$v = -1 \dots \dots \dots 57a)$$

$$\cos \psi = \frac{x}{w} = \sqrt{1 - \sigma} \dots \dots \dots 57b)$$

$$\sin \psi = \sqrt{\sigma} \dots \dots \dots 57c)$$

Betrachten wir zunächst nur die erste Hälfte der Lösung, d. h. die Wurzeln y_{12} und die ihnen entsprechende Wanderwellenserie

$$(V'_{1p})_{12} = A \cdot u^p \cdot \cos(p\varphi - \alpha) \dots \dots \dots 53a)$$

Da

$$u = \sqrt{1 - \frac{4w\sigma}{z}}$$

eine positive Größe und stets kleiner als 1 ist, so bedeutet die Funktion

$$u^p = f(p)$$

einen treppenförmig abfallenden Linienzug, der einer erlöschenden Exponentialfunktion

Abb. 8. Charakter der Funktion u^p und $u^p \cos(p\varphi - \alpha)$.

$$e^{-\frac{t}{T_\varphi}}$$

gleich (Abb. 8). Ist die Streuung klein, so läßt sich auch die äquivalente Zeitkonstante T_φ leicht angeben: Einem Schwingungsintervall entspricht die Zeit ϑ , welche die Wanderwelle braucht, um eine Windung zu durchlaufen. Wir haben daher für den Vergleich

$$t = p \cdot \vartheta$$

einzuführen und erhalten

$$e^{-\frac{\vartheta}{T_\varphi}} = \sqrt{1 - \frac{4w\sigma}{z}}$$

bzw.

$$\frac{\vartheta}{T_\varphi} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{4w\sigma}{z} \right) \approx \frac{2w\sigma}{z}.$$

Die Zeitkonstante der Dämpfung beträgt somit:

$$T_\varphi = -\frac{2\vartheta}{\ln \left(1 - \frac{4w\sigma}{z} \right)} \approx \vartheta_0 \frac{z}{2w\sigma} = \vartheta \left(1 + \frac{1}{2w} \frac{1+\sigma}{\sigma} \right) \dots \dots \dots 58)$$

Danach ist die Dämpfung der ersten Komponente der Wanderwellen um so geringer:

1. je größer die Windungslänge (ϑ !) d. h. die Selbstinduktion der Spule,
2. je geringer der Wellenwiderstand der Spule im Verhältnis zum Wellenwiderstand der angeschlossenen Leitung,
3. je geringer die Streuung zwischen den Spulenwindungen.

Bezeichnete der Faktor u^p die Dämpfung der Wanderwellenschwingungen, so bestimmt der Faktor

$$\cos(p\varphi - \alpha) = \cos\left(\frac{\varphi}{\vartheta} \cdot t - \alpha\right)$$

ihre Periodendauer

$$\Theta_\varphi = \frac{2\pi}{\varphi} \cdot \vartheta \dots \dots \dots 59)$$

Alles in allem ändert sich daher die Amplitude der ersten Komponente nach einem treppenförmigen Linienzug, dessen Leitkurve eine abklingende Sinusschwingung

$$e^{-\frac{t}{T_\varphi}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\Theta_\varphi} t - \alpha\right)$$

ist (Abb. 8).

Wesentlich anders ist das Gesetz, welches der zweite Anteil der Lösung

$$(V_{1p})_{34} = B \cdot v^p \cos(p\psi - \beta) \dots \dots \dots 53b)$$

befolgt.

Vor allem ist diese Schwingung weit schwächer gedämpft wie die vorige. Nach der oben mitgeteilten Näherungslösung wäre sie sogar vollkommen ungedämpft, da abgesehen vom Vorzeichen

$$|v^p| = |I^p| = I$$

gefunden wurde. Eine genauere Rechnung lehrt jedoch, daß auch bei widerstandsloser Spule die Zeitkonstante T_ψ zwar groß, aber nicht unendlich wird, und daß sie für nicht zu kleine Werte von r nach der Gleichung

$$T_\psi = \vartheta \cdot 2 \frac{r}{w} \cdot \frac{1 + \sigma}{\sigma^3} \dots \dots \dots 60)$$

geschätzt werden kann. Wir werden später hierauf zurückkommen.

Sodann ist v negativ. Die Wanderwelle wechselt somit nach jedem Umlauf ihr Vorzeichen, soweit nicht die Multiplikation mit der $\cos$ -Funktion einen nochmaligen Vorzeichen-Wechsel bedingt.

Endlich ist ihre Periode

$$\Theta_\psi = \frac{2\pi}{\psi} \vartheta = \vartheta \cdot \frac{2\pi}{\arcsin \sqrt{\sigma}} \dots \dots \dots 61)$$

in erster Annäherung nur von der Windungslänge und der Streuung der Spule, nicht aber wie Θ_ψ auch von dem Wellenwiderstand der angeschlossenen Leitung abhängig¹⁾. Erst wenn σ sehr groß wird, versagt dieses Gesetz, denn dann muß die Substitution 54) zu Trugschlüssen führen.

Nach alledem ist der Charakter der zweiten Wanderwellen-Komponente durch einen rechteckigen Wellenzug nach Art von Abb. 9 wiederzugeben. Der Wechsel der Ordinaten erinnert an eine Schwebung. Diese Schwebung besteht noch, wenn die erste Schwingung $(V_1')_{1,2}$ längst verklungen ist. Sie ist für die Spule allein, nicht für das Zusammenschalten der Spule mit anderen Leitungen charakteristisch und kann daher als Eigenschwingung der Spule angesprochen werden. In diesem Sinne würde der ersten Komponente nur die Aufgabe zufallen, den durch den Schaltprozeß eingeleiteten Ausgleichsvorgang allmählich in diese Eigenschwingung überzuführen. Wahrscheinlich wird sich diese Auffassung auch für die mehrdrähtige Spule als fruchtbar erweisen.

Abb. 9. Charakter der Funktion $v^p \cos(p\psi - \beta)$.

Was für die Wanderzelle V_1'' in Erfahrung gebracht wurde, gilt qualitativ auch für die übrigen Spannungswellen. Die Eigenschwingung der ganzen Spule stellt sich somit dar als das Spiel zweier gegenläufiger Wellen (V_1' und V_2'' auf der ersten Windung, sowie V_2' und V_3'' auf der zweiten Windung), die zwischen den drei Knoten-

¹⁾ Für $r = 0$ gilt die Lösung 57) sogar streng. Für $r = \infty$ wird:

$$v = -1; \quad \cos \psi = \sqrt{\frac{1}{1 + \sigma}}; \quad \sin \psi = \sqrt{\frac{\sigma}{1 + \sigma}}, \dots \dots \dots 62)$$

was mit 57) immer noch gut übereinstimmt.

stellen A, M, E unter stetigen Reflexionen hin und her laufen. Je kleiner hierbei der Wellenwiderstand der angeschlossenen Leitung und je loser die elektromagnetische Koppelung ist, welche die Wellen der beiden Windungen verknüpft, um so mehr wird sich die Eigenschwingung auch der angeschlossenen Leitung mitteilen und um so schneller wird sie daher erlöschen (vgl. 60).

Wenn ein merklicher Anteil der Eigenschwingung auch auf die Leitung hinter der Spule übertragen werden kann, so entsteht die Gefahr, daß die Spule für diesen Stromkreis als Schwingungserreger fungiert. Es ist daher von besonderem Interesse, zu untersuchen, welches Verhältnis zwischen den Eigenschwingungs-Amplituden in Spule und Leitung besteht.

Um hierüber Aufschluß zu erhalten, müssen wir zunächst die Konstanten der Eigenschwingung noch etwas genauer berechnen. An Stelle der Näherungslösung

$$y_{34} = (-1)^p (\cos \psi \pm i \sin \psi)$$

versuchen wir jetzt den Ansatz:

$$y_{34} = (-\eta)^p \cdot (\cos \psi \pm i \sin \psi) \quad \dots \quad 63)$$

Treten wir damit in die charakteristische Gl. 50) ein, so ergeben sich für η und ψ zwei Bestimmungsgleichungen

$$\eta^4 \cos^2 \psi - \eta^3 \frac{2x\sigma}{z} \cos \psi = \frac{1}{4} \left[\eta^4 + \eta^2 \frac{2r(1-\sigma)}{z} + 1 - \frac{4w\sigma}{z} \right] \quad \dots \quad 64a)$$

und

$$\cos \psi = \eta(1 + \eta^2) \cdot \frac{2x\sigma}{4w\sigma - (1 - \eta^4)z} \quad \dots \quad 64b)$$

Für $\eta = 1$ würde aus der letzten Gleichung wie früher

$$\cos \psi = \frac{x}{w} = \sqrt{1 - \sigma}$$

hervorgehen. Setzen wir jetzt aber

$$\eta = 1 - \varepsilon \quad \dots \quad 64c)$$

und betrachten ε als kleine Größe, deren Potenzen gegen die Einheit zu vernachlässigen sind, so wird

$$\cos \psi = \frac{x}{w} \left(1 + \varepsilon \frac{r(1+\sigma)}{w\sigma} \right) \quad \dots \quad 65a)$$

und

$$\varepsilon = \frac{w}{2r} \cdot \frac{\sigma^3}{1 + \sigma} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma^3}{1 + \sigma} \cdot \frac{w}{r} \left(3 + \frac{w}{r} \right)}$$

oder bei nicht zu kleinen Werten von r :

$$\varepsilon = \frac{w}{2r} \cdot \frac{\sigma^3}{1 + \sigma} \quad \dots \quad 65b)$$

Damit folgen aus Gl. 65a) die korrigierten Werte

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{x}{w} \left(1 + \frac{\sigma^3}{2} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma}} \\ \sin \psi &= \sqrt{\sigma - \frac{\sigma^3}{2} (1 + \sigma)} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{1 + \sigma}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 65c)$$

Es empfiehlt sich auf Grund dieser Ergebnisse, auch die erste stark gedämpfte Schwingungskomponente zu korrigieren. Wir werden sie in der Folge kurzerhand als „Anfangsschwingung“ bezeichnen. Die verbesserte Gleichung ihrer Konstanten lautet:

$$y^2 = 2 \left[\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\sigma}} - \frac{2x\sigma}{z} \right] y + \frac{1-\frac{4w\sigma}{z}}{(1-\varepsilon)^2} = 0 \dots\dots\dots 66)$$

Bei nicht zu großer Streuung und $r \geq w$ sind auch die Wurzeln dieser Gleichung konjugiert komplex. Es ist dann formell wieder die Lösung 52) zu verwenden, nur daß jetzt

$$\left. \begin{aligned} u &= (1+\varepsilon) \sqrt{1 - \frac{4w\sigma}{z}} \\ \varphi &= \arccos \left[\frac{\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\sigma}} - \frac{2x\sigma}{z}}{u} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 66a)$$

erhalten wird.

Sind dagegen beide Wurzeln reell, so lautet die Lösung

$$y_{12} = \left(\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\sigma}} - \frac{2x\sigma}{z} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\sigma}} - \frac{2x\sigma}{z} \right)^2 - \frac{1-\frac{4w\sigma}{z}}{(1-\varepsilon)^2}} \dots\dots\dots 66b)$$

Besondere Erwähnung verdient ein ausgezeichneter Fall, der sich beim Anschluß eines Kabels an eine Spule praktisch verwirklichen läßt. Er liegt vor, wenn das letzte Glied in Gl. 66) verschwindet, d. h. wenn das Verhältnis

$$\frac{r}{w} = \frac{2\sigma}{1+\sigma}$$

besteht. Dann wird nämlich

$$y_1 = 0$$

und

$$y_2 = 2 \left(\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\sigma}} - \frac{2x\sigma}{z} \right)$$

oder wegen

$$\varepsilon = \frac{\sigma^3}{4} \quad \text{und} \quad \frac{2x\sigma}{z} = \frac{\sqrt{1-\sigma}}{2}$$

einfacher:

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} \dots\dots\dots 66c)$$

Die Gleichung der Anfangsschwingung lautet somit

$$(V_p)_{12} = C \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} \right)^p$$

Bei kleiner Streuung ist dies eine schwachgedämpfte Schwingung, die wie wir später sehen werden, für die Verwendung der Spule als Schutz-Drosselspule große Vorzüge besitzt.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zu unserer ursprünglichen Aufgabe zurück und versuchen an Hand der Formeln 65) die in die Leitung eindringende Welle zu kontrollieren. Wir brauchen hierfür nur die Spannung V_3 am Spulenende zu untersuchen. Denn das Zeitdiagramm dieser Spannung — nach Art der Diagramme 8 und 9 aufgezeichnet — gibt direkt die räumliche Wellenform auf der Leitung wieder. Man muß sich nur die Abszissen-Intervalle ϑ durch die Windungslänge l ersetzt denken. (Vgl. dazu Abb. 5.)

Nun beträgt die Spannung am Spulenende

$$V_{3p} = [V_{30} + V_3'']_p = [V_{30} - V_{10}]_p + [V_3'' + V_{10}]_p \dots\dots\dots 4)$$

oder gemäß Gl. 1) und 38):

$$V_{3p} = E + [V_3'' - V_1']_p + [V_3'' - V_1']_{p-1} \dots\dots\dots 67)$$

Wir haben daher zuerst zu untersuchen, ob bzw. wie stark die Differenz

$$D_p = [V_3'' - V_1']_p \dots\dots\dots 68)$$

die behandelte Eigenschwingung der Spule enthält.

Zu diesem Zwecke bedienen wir uns der Gl. 43), die ich zur besseren Übersicht noch einmal anschreibe:

$$D_{p+1} \frac{x}{w} + 2D_p + D_{p-1} \frac{x}{w} = 2V''_{2(p+1)} + 4 \frac{x}{w} V''_{2p} + 2V''_{2(p-1)} \quad . \quad . \quad . \quad 43)$$

Die Glieder auf der rechten Seite enthalten die Eigenschwingung jedenfalls stark. Wir setzen hierfür:

$$V''_{2p} = -(V_1)_{p+1} = \tilde{V}_2'' \cdot (-\eta)^p \cos(p\psi - \gamma)$$

und versuchen den Ansatz

$$D_p = \tilde{D} \cdot (-\eta)^p \cos(p\psi - \gamma).$$

$\tilde{V}_2''$ und $\tilde{D}$ bedeuten somit die noch ungedämpften Amplituden der Schwebung, welche die Eigenschwingungen charakterisieren.

Unter diesen Annahmen liefert die linke Seite der Differenzgleichung 43):

$$\tilde{D} \cdot (-\eta)^p \left\{ \cos(p\psi - \gamma) \left[2 - \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \frac{x}{w} \cos \psi \right] + \sin(p\psi - \gamma) \cdot \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \frac{x}{w} \sin \psi \right\}$$

und wegen $\eta = 1 - \varepsilon$ und Gl. 65c)

$$2\tilde{D} \cdot (-\eta)^p \cos(p\psi - \gamma) \left[\sigma - (1 - \sigma) \frac{\sigma^2}{2} \right].$$

Die rechte Seite entwickeln wir analog und erhalten:

$$\begin{aligned} 2\tilde{V}_2'' \cdot (-\eta)^p \left\{ \cos(p\psi - \gamma) \left[2 \frac{x}{w} - \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \cos \psi \right] + \sin(p\psi - \gamma) \cdot \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \sin \psi \right\} \\ = -2\tilde{V}_2'' \cdot (-\eta)^p \cos(p\psi - \gamma) \cdot \frac{x}{w} \sigma^2. \end{aligned}$$

Unser Ansatz hat sich also bewährt, und zwar gilt für das Verhältnis der Schwebungen

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{V}_2''} = - \frac{\sigma}{1 - \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^2}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad 69)$$

Jetzt macht auch die Bestimmung der Schwebungs-Amplitude $\tilde{V}_3$ in der Knotenpunktspannung V_{3p} keine Schwierigkeiten mehr. Wir setzen:

$$\begin{aligned} V_{3p} &= E + D_p + D_{p-1} \quad . \quad . \quad . \quad 67) \\ &\approx E + \tilde{D} (-\eta)^p [\cos(p\psi - \gamma) - \cos((p+1)\psi - \gamma)] \\ &= E + \tilde{D} \cdot 2 \sin \frac{\psi}{2} (-\eta)^p \sin \left(p\psi - \frac{\psi}{2} - \beta \right). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\tilde{V}_3 = \tilde{D} \cdot 2 \sin \frac{\psi}{2} = (-) \tilde{V}_2'' \cdot 2 \sin \frac{\psi}{2} \frac{\sigma}{1 - \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^2}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad 70)$$

Dies ist die anfängliche Amplitude der Schwebungen, welche die Eigenschwingung der Spule in die angeschlossene Leitung entsendet. Sie ist klein für kleine Werte der Streuung σ , für welche man die abgekürzte Formel

$$\tilde{V}_3 = \tilde{V}_2'' \sqrt{\frac{\sigma^3}{1 + \sigma^3}} \quad . \quad . \quad . \quad 70a)$$

gebrauchen kann. So würde man für $\sigma = 0,2$ nur

$$\tilde{V}_3 = 0,09 \tilde{V}_2''$$

zu gewärtigen haben. Dagegen ergäbe $\sigma = 0,6$

$$\tilde{V}_3 = 0,47 \tilde{V}_2''.$$

Mit anderen Worten: die Eigenschwingung würde nahezu in halber Stärke auf die angeschlossene Leitung übergehen. Das kann gefährlich werden, wenn diese Schwingung (bei $r > w$) auch noch schwach gedämpft ist.

V. Zahlenbeispiele.

Es bleibt noch übrig an einigen Beispielen zu zeigen, wie die erkannten und diskutierten Gesetze dem ganzen Ausgleichvorgang das Gepräge geben. Da hierfür der Wellenwiderstand der angeschlossenen Leitung von sekundärer Bedeutung ist, wird im folgenden

$$r = w$$

gesetzt. Unter diesen Annahmen soll das Verhalten zweier Spulen mit verschiedener Streuung

$$\sigma = 0,2 \quad \text{bzw.} \quad \sigma = 0,6$$

verglichen werden.

Um einen vollständigen Überblick zu gewinnen, muß man entweder die vier Integrationskonstanten C_1 bis C_4 der Differenzgleichung 47) bestimmen, oder man muß durch wiederholte Anwendung dieser Differenzgleichung die Wellenamplituden für eine große Zahl aufeinanderfolgender Intervalle berechnen. Wenn man bei großer Streuung nicht sicher ist, ob man die charakteristische Gl. 50) genau genug gelöst hat, ist der zuerst genannte Weg der zuverlässigere. In jedem Falle muß man zuvor für die Spannungswellen V_1' oder V_2' usw., deren Verhalten man aufklären will, die Amplituden während vier aufeinanderfolgender Intervalle bestimmt haben.

Für die beiden ersten Intervalle ($p = I$ und II) habe ich die Gleichungen bereits mitgeteilt. Für das dritte und vierte Intervall lassen sich Gl. 14) und 15) benutzen. Besser wandelt man diese jedoch durch Einführung der Formeln 41) und 42) in Differenzgleichungen um, was auf die Ausdrücke führt:

$$V_{3p}'' = -V_{2(p-1)}'' \left(1 - \frac{4r\sigma}{z}\right) - [V_1' - V_3'']_{p-1} \frac{2xr}{wz} + [V_1' - V_3'']_{p-2} \left(1 - \frac{4w\sigma}{z}\right) \quad 71)$$

$$V_{2p}'' = V_{2(p-1)}'' \frac{2x}{w} \cdot \frac{r - 2w\sigma}{z} + V_{3(p-1)}'' - [V_1' - V_3'']_{p-1} \frac{r(1-\sigma)}{z} - [V_1' - V_3'']_{p-2} \frac{2x\sigma}{z} \quad 72)$$

Also z. B. für $p = III$.

$$V_{3III}'' = -V_{2II}'' \left(1 - \frac{4r\sigma}{z}\right) - V_{3I}'' \frac{8w\sigma \cdot r(1-\sigma)}{z^2} + (E - V_{3I}) \left(1 - \frac{4w\sigma}{z}\right) \quad 71a)$$

$$V_{2III}'' = V_{2II}'' \frac{2x}{w} \cdot \frac{r - 2w\sigma}{z} + V_{3II}'' - V_{3I}'' \frac{4x\sigma \cdot r(1-\sigma)}{z^2} - (E - V_{3I}) \frac{2x\sigma}{z} \quad 72a)$$

Unter der Annahme $r = w$ lassen sich diese Formeln noch etwas vereinfachen und liefern dann:

$$V_{3III}'' = E \cdot \frac{1-\sigma}{1+3\sigma} \left[1 - 4\sigma \left(\frac{1-\sigma}{1+3\sigma}\right)^2\right] \quad 73)$$

$$V_{2III}'' = -V_{1IV}' = E \frac{x}{w} \left[\frac{1-\sigma}{1+3\sigma} - 2\sigma \frac{1+\sigma}{1+3\sigma} - 2\sigma \left(\frac{1-\sigma}{1+3\sigma}\right)^3 \right] \quad 74)$$

$$V_{3IV}'' = -E \frac{x}{w} \frac{1-\sigma}{1+3\sigma} \left[1 - 2\sigma \frac{1+\sigma}{1+3\sigma} + 2\sigma(3+\sigma) \frac{(1-\sigma)^2}{(1+3\sigma)^3} \right] \quad 75)$$

Entweder setzt man jetzt

$$\begin{aligned} V_I &= u \cdot [C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi] + v [C_3 \cos \psi + C_4 \sin \psi] \\ V_{II} &= u^2 [C_1 \cos 2\varphi + C_2 \sin 2\varphi] + v^2 [C_3 \cos 2\psi + C_4 \sin 2\psi] \\ V_{III} &= u^3 [C_1 \cos 3\varphi + C_2 \sin 3\varphi] + v^3 [C_3 \cos 3\psi + C_4 \sin 3\psi] \\ V_{IV} &= u^4 [C_1 \cos 4\varphi + C_2 \sin 4\varphi] + v^4 [C_3 \cos 4\psi + C_4 \sin 4\psi], \end{aligned}$$

und bestimmt aus diesen vier linearen Gleichungen die vier unbekannten Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 und C_4 .

Oder man folgt aus der Differenzengleichung 47)

$$V_V = -\frac{4x\sigma}{z} V_{IV} + \frac{2r(1-\sigma)}{z} V_{III} + \frac{4x\sigma}{z} V_{II} - \left(1 - \frac{4w\sigma}{z}\right) V_I$$

und fährt in gleicher Weise fort V_{VI}, V_{VII} usw. zu berechnen. Für unser Zahlenbeispiel habe ich den letzten Weg eingeschlagen und dabei die Werte der Tabelle I und II erhalten. Ein Teil dieser Ergebnisse ist in dem Zeitdiagramm 10 bis 16 aufgetragen. Es ist notwendig diese Diagramme einzeln durchzusprechen. Denn jedes zeigt den Ausgleichvorgang von einer besonderen Seite.

a) Die Wanderwellen.

Betrachten wir zuerst das Spiel der rechts- und linksläufigen Wanderwellen auf beiden Windungsabschnitten AM und ME (vgl. auch Abb. 1). Die Rechteckswellen in Abb. 10a) zeigen den Amplituden-Wechsel der vom Schalter in die Spule eindringenden Wanderwelle, und zwar für die Spule mit der verhältnismäßig kleinen Streuung $\sigma = 0,2$. Jede Rechtecksbreite entspricht einem Schwingungsintervall ϑ , so daß das Diagramm als Zeitdiagramm gelesen werden kann. Positive Ordinaten bedeuten Lade- wellen, negative Ordinaten Entladewellen. Im allgemeinen folgt also auf eine Lade- welle stets eine Entladewelle, wie sich dies schon bei der Betrachtung der einleitenden Schwingungsvorgänge im ersten Abschnitt ergab.

Gleichzeitig mit diesem Vorzeichen-Wechsel tritt der Schwebungscharakter des Ausgleichsvorganges in aller Klarheit hervor. Wir haben erfahren, daß diese eigen- artige Selbstregulierung der Spule als solcher eigentümlich ist. Wir sehen jetzt, daß gegenüber dieser fast ungedämpften Eigenschwingung die durch die Verkettung der Spule mit fremden Stromkreisen bedingte schnellgedämpfte „Anfangsschwingung“ nur wenig ausmacht. Der treppenförmige Linienzug, dessen Ordinaten schraffiert sind, stellt diese Komponente der Wanderwellen dar. Sie gleicht, wie die Theorie es ver- langt, einer abklingenden Sinusschwingung; aber sie bleibt so niedrig, daß sich das Nullniveau der Schwebung nur wenig verschiebt. Deshalb muß der Ausgleichsvor- gang mit einem Schwebungsbauch beginnen, der wenig kleiner als die volle Ein- schaltspannung ist.

Ich habe in Abb. 10a die Scheitelpunkte der Rechteckswellen der resultieren- den Schwingung durch zwei Leitkurven verbunden. Es sind Sinuslinien entgegen- gesetzten Vorzeichens, aber gleicher Höhe, deren Null-Linie die Leitlinie der stark- gedämpften Anfangsschwingung bildet. Diese Darstellungsweise ermöglicht es, in die- selbe Figur die rechtsläufigen Wanderwellen V_2' des parallelen Windungsabschnittes ME aufzunehmen. Ihre Leitlinien sind strichliert. Die mittlere, niedrige Leitlinie entspricht der schnellverlöschenden Anfangsschwingung, die beiden äußeren Leitkurven der Schwe- bungs-Eigenschwingung. Da die elektromagnetische Verkettung zwischen beiden Win- dungsabschnitten bei $\sigma = 0,2$ noch ziemlich gut ist, sind die Wellen V_1' und V_2' nicht nur in ihrer Höhe, sondern auch in ihrer Phase wenig voneinander verschieden. Daß beide Schwebungen genau synchron sind, braucht wohl nicht besonders betont zu werden.

Abb. 10a. $\sigma = 0,2$.

Abb. 10b. $\sigma = 0,6$.
Abb. 10a und b. Die Amplituden der rechtsläufigen Spannungswellen.

Abb. 11a. $\sigma = 0,2$.

Abb. 11b. $\sigma = 0,6$.
Abb. 11a und b. Die Amplituden der linksläufigen Spannungswellen.

Wir wenden uns daher gleich zu Abb. 11a, die in derselben Darstellungsweise die linksläufigen Wellen V_2'' und V_3'' behandelt. Diesmal ist die Welle $V_{2p}'' = -V_{1(p+1)}'$ die Primärwelle, von der die Induktionswirkungen ausgehen. Daher ist sie etwas größer als die induzierte Welle V_3'' . Wiederum ist die Anfangsschwingung von sekundärer Bedeutung, da sie von Anbeginn klein und längst erloschen ist, während sich die Schwebungsschwingung noch so gut wie ungedämpft wiederholt.

Aus der Abb. 10a die Zeitkonstante und Periodizität der Anfangsschwingung herzuleiten, ist schwierig. Man muß sich hier schon auf die Theorie verlassen. Dagegen ist für die Eigenschwingungs-Komponente der Vergleich mit der Theorie leicht möglich: ihre Periode folgt mit Hilfe der Gleichung

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{\sigma}{1+\sigma}} = \arcsin 0,408 = 24^\circ \dots\dots\dots 65c)$$

zu

$$\Theta_\psi = \frac{360^\circ}{\psi} \cdot \vartheta = 15\vartheta.$$

Es sollten also 15 Schwingungsintervalle in einer vollen Wellenlänge der Leitkurven enthalten sein. In der Tat entnehmen wir der Abbildung dasselbe Verhältnis. Ferner liefert die Theorie für die Dämpfungskonstante

$$T_\psi = 2 \frac{1+\sigma}{\sigma^3} \vartheta = 3000\vartheta \dots\dots\dots 60)$$

Nach einer vollen Wellenlänge der Leitkurve sollte daher die Amplitude nur im Verhältnis

$$1 : e^{-\frac{\Theta_\psi}{T_\psi}} = 1 : e^{-\frac{1}{200}} = 1 : 0,995$$

abgenommen haben. Auch diese verschwindende Dämpfung stimmt mit den Diagrammen überein.

Für die Anfangsschwingung liefert die Theorie das Gesetz

$$0,707^p \cos(p\varphi - \alpha)$$

mit

$$\varphi = \arcsin \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} - \frac{2x\sigma}{z}}{\sqrt{1 - \frac{4w\sigma}{z}}} \right] = 13^\circ \dots\dots\dots 66a)$$

Es sollten also $\frac{180^\circ}{13^\circ} = 14$ Intervalle auf eine halbe Wellenlänge der Leitkurve gehen.

Da aber für $p=14$ die Amplitude auf 0,8 Proz. ihres Anfangswertes gesunken ist, kann in den Diagrammen die Periodizität nicht in Erscheinung treten.

Wir haben noch zu untersuchen, wie die Lockerung der elektromagnetischen Koppelung den Charakter der Wanderwellenschwingung verändert. Diesem Zwecke dienen Abb. 10b und 11b, die für eine Streuung $\sigma=0,6$ die eben besprochenen Diagramme wiederholen. Was bei dem Vergleich sofort ins Auge fällt, ist die Verkürzung der Schwebungsperiode und die ziemlich kräftige Dämpfung der Eigenschwingung. Beides war nach der Theorie zu erwarten. Annähernd sollte jetzt

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{\sigma}{1+\sigma}} = \arcsin 0,612 \approx 38^\circ \dots\dots\dots 65c)$$

und

$$\Theta_\psi = \frac{360^\circ}{\psi} \vartheta = 9,5\vartheta$$

gefunden werden. Die Zeichnung liefert $\Theta_{\psi} = 9,3 \vartheta$. Ferner haben wir eine Dämpfungskonstante

$$T_{\psi} = 2 \frac{1 + \sigma}{\sigma^3} \cdot \vartheta = 14,8 \vartheta \quad \dots \dots \dots 6a)$$

zu erwarten. Das Amplituden-Verhältnis zwischen zwei Punkten, die auf der Leitkurve eine volle Wellenlänge auseinanderliegen, sollte daher

$$e^{-\frac{\Theta_{\psi}}{T_{\psi}}} = e^{-0,642} = 0,52$$

betragen. Auch hier liefert die Zeichnung praktisch denselben Wert.

Es ist indessen nicht allein die Dämpfung, welche die Eigenschwingung der Spule gegenüber den früheren Diagrammen so stark geschwächt erscheinen läßt. Auch die Anfangswerte der ersten Intervalle liegen bereits tiefer. Das gilt insbesondere für die Amplituden V_3'' , die infolge der losen elektromagnetischen Koppelung nur etwa halb so groß wie die erregenden Schwingungen V_2'' ausfallen. Schließlich sei noch auf die wachsende Phasenverschiebung zwischen den Leitkurven je zweier gleichläufiger Wellen hingewiesen. Trotz dieser Unterschiede erscheint noch immer die Eigenschwingung der Spule als das Charakteristikum des Ausgleichsvorganges, gegen welches die Anfangsschwingung völlig in den Hintergrund tritt.

b) Die Knotenpunktsspannungen.

Die Bedeutung der Anfangsschwingung liegt in dem Verhalten der Spannungen an den Punkten M und E, die wir gewöhnlich als Knotenpunkte bezeichneten. Für sie bewirkt die Anfangsschwingung den Übergang von dem Anfangspotential V_1 auf das Endpotential E, und wenn hier zu Anfang große Potentialdifferenzen bestanden, so kann die Anfangsschwingung die von der Eigenschwingung der Spule herrührende Komponente weit übertreffen.

Wie die Diagramme 12 und 13 zeigen, sind Spulenmitte und Spulenende keine echten Knotenpunkte in dem Sinne, daß sie von der Eigenschwingung der Spule überhaupt nicht in Mitleidenschaft gezogen würden. Doch ist diese Komponente schon in der Spannung V_2 der Spulenmitte M ziemlich klein — die ankommende Welle V_1' ist mehr als doppelt so groß — und in der Spannung V_3 am Spulenende ist sie bei niedriger Streuung kaum noch nennenswert.

Die Schnelligkeit, mit welcher die Anfangsschwingung am Spulenende abklingt, ist von großem praktischen Interesse. Denn, wie schon früher betont, ist das Zeitdiagramm für V_3 zugleich als Wegdiagramm für die Form der in die abgezweigte Leitung eindringenden Wanderwelle zu deuten. An die Stelle des Zeitintervalles ϑ tritt dann der Weg, den die Wanderwellen in derselben Zeit durchlaufen, d. i. die Windungslänge l . Setzen wir also den Fall, die Spule solle für den dahinterliegenden Stromkreis als Überspannungsschutz fungieren, welcher die schroffe Stirn der von dem Schalter ausgehenden Spannungswellen zu brechen hat. Dann wird sie diesen Zweck offenbar um so besser erfüllen, je schwächer die Anfangsschwingung gedämpft ist.

Wenn man sich fragt, welchen Einfluß hierauf die Streuung hat, so zieht man am besten gleich die Abb. 13a und 13b zu Rate. Denselben Vergleich an Hand der entwickelten Theorie durchzuführen stößt nämlich insofern auf Schwierigkeiten, als für $\sigma = 0,6$ die Anfangsschwingung nicht mehr periodisch, sondern aperiodisch gedämpft ist¹⁾. Im Einklang mit den Näherungsgleichungen 58) und 66c) beweisen die

¹⁾ Aus Gl. 66b) folgt nämlich:

$$y_1 = 0,695$$

$$y_2 = 0,237.$$

Abb. 12a. $\sigma = 0,2$.

Abb. 12a und b. Schwankungen des Potentials der Spulenmitte M gegen Erde.

Abb. 12b. $\sigma = 0,6$. Abb. 13a. $\sigma = 0,2$.

Abb. 13a und b. Potential am Spulenende, zugleich Form der in die angeschlossene Leitung eindringenden Wanderwelle.

Abb. 13b. $\sigma = 0,6$. Abb. 13c. $\sigma = 0,6$. Schwingungskomponente der in die Leitung eindringenden Wanderwelle, herrührend von der Eigenschwingung der Spule.

Diagramme, daß die Vergrößerung der Streuung die Dämpfung erhöht, also steile Wellenfronten begünstigt. Trotzdem wäre dies allein noch kein Grund, Schutzdrosselspulen mit geringer Streuung zu bevorzugen. Denn man braucht ja nur ihre Selbstinduktion — verkörpert durch die Windungslänge l — genügend zu vergrößern, um den Anstieg der Leitkurve der Anfangsschwingung beliebig zu mildern.

Was aber auch dann noch in Kauf genommen werden müßte, sind die hohen Stufen des treppenförmigen Anstieges, die von der starken Eigenschwingung innerhalb der Spulen herrühren. Bei der Spule mit großer Streuung habe ich diese Schwingungskomponente besonders herausgezeichnet, Abb. 13c, um ihren Schwebungscharakter deutlich hervortreten zu lassen. Ob sie auch als Schwingungserreger für den angeschlossenen Stromkreis gefährlich werden könnte, vermag ich nicht zu beurteilen.

Trotzdem mit der Verringerung der Streuung die Amplitude der Eigenschwingung innerhalb der Spule wächst (vgl. Abb. 10a und 10b), wird das Spulenende mehr und mehr zu einem echten Knotenpunkt, der diese Eigenschwingung nicht durchsickern läßt. Geringe Streuung wirkt also günstig. Aus Abb. 13a und b entnehmen wir, daß schon bei $\sigma = 0,2$ nur noch schwache Ausläufer in die Leitung eindringen, und wir konnten dieses Verhalten auch theoretisch begründen (Gl. 70a). Dafür setzt aber die über die Leitung fortlaufende Wanderwelle sogleich mit einer steilen Wellenfront V_{31} von beträchtlicher Höhe ein. Man brauchte daher eigentlich noch eine zweite Vor-schaltespule, um auch diese Wellenfront abzuschleifen.

Will man V_{31} trotz niedriger Streuung kleinhalten, so gibt es nur ein Mittel: Man muß den Wellenwiderstand w der Spule möglichst groß gegen den Wellenwiderstand r der Leitung machen¹⁾; denn wir fanden

$$V_{31} = E \cdot \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma + \frac{w}{r} \cdot 2\sigma} \dots \dots \dots 25)$$

Beim Anschluß eines Kabels an eine Spule ist $r \lesssim w$ ohne weiteres erfüllt. In anderen Fällen dürfte dagegen die Einhaltung dieser Bedingung große Schwierigkeiten bereiten.

c) Die Windungsspannung.

Zu den bisher erörterten Gesichtspunkten tritt als letzter die Frage: Wie hoch wird die Spule selbst durch den Schaltvorgang beansprucht? Es verlohnt sich daher, den Wechsel des Potentials an einigen Punkten zu verfolgen.

Das Potential der Knotenpunkte wurde soeben untersucht. Die Differenz der Knotenpunktsspannungen gibt die Windungsspannung an gleicher Stelle. Die Windungsspannung $E - V_2$ am Spulenanfang kann den Diagrammen 12a und b entnommen werden. Sie ist am größten im dritten Intervall, wo sie bei beiden Spulen etwa $\frac{2}{3}$ der Schaltspannung E beträgt. Höher liegt die Windungsspannung $V_2 - V_3$ am Spulenende. Wie aus Tabelle I und II (Spalte 10) ersichtlich, erreicht sie hier bei $\sigma = 0,2$ $\frac{3}{4}$ der Schaltspannung, bei $\sigma = 0,6$ sogar nahezu die volle Schaltspannung. Es ergibt sich also das bemerkenswerte Resultat, daß die Endwindung höher beansprucht wird als die Anfangswindung.

¹⁾ Zu dem gleichen Ergebnis gelangt K. W. Wagner auf anderem Wege. Vgl. namentlich seinen Vortrag: Beanspruchung und Schutzwirkung von Spulen bei schnellen Ausgleichsvorgängen. ETZ 1916 S. 266.

Tabelle I. Die Spule mit geringer Streuung: $\sigma = 0,2$, $r = w$.

(Die Schaltspannung E ist gleich 1 gesetzt.)

Ordnungs- zahl des Intervalles	Wanderwellen				Knoten- punkts- potentiale		Lade- zustand		Windungsspannung				
	Anfangs- windung		Endwindung						Vorderseite	Rücken	Rechte		Linke
											Seite		
p	V ₁ '	V ₂ ''	V ₂ '	V ₃ ''	V ₂	V ₃	V ₁₀	V ₃₀	E-V ₂	V ₂ -V ₃	V ₁₀ -V ₃₀	V ₁₀ -V ₃₀ +V ₁ '-V ₂ '	V ₁₀ -V ₃₀ +V ₂ ''-V ₃ ''
I	I	0,670	0,670	0,500	0,670	0,500	0	0	0,330	0,170	0	0,330	0,170
II	-0,670	-0,800	-0,300	-0,894	0,870	0,277	1,670	1,170	0,130	0,593	0,500	0,130	0,594
III	0,800	0,134	0,358	0,400	0,334	0,377	0,200	-0,024	0,666	-0,043	0,224	0,666	-0,042
IV	-0,134	-0,060	0,340	-0,404	1,074	0,330	1,134	0,734	0,074	0,744	0,400	-0,074	0,744
V	0,060	-0,532	-0,262	0,069	0,408	0,601	0,940	0,670	0,592	-0,193	0,270	0,592	-0,193
VI	0,532	0,638	0,767	0,253	1,106	0,592	0,468	0,339	0,106	0,514	0,129	-0,106	0,514
VII	-0,638	-0,911	-0,632	-0,562	0,727	0,797	1,638	1,359	0,273	-0,070	0,279	0,273	-0,070
VIII	0,911	0,837	0,761	0,675	0,926	0,840	0,089	0,165	0,074	0,086	-0,076	0,074	0,086
IX	-0,837	-0,734	-0,498	-0,716	1,103	0,885	1,837	1,601	0,103	0,218	0,236	-0,103	0,218
X	0,734	0,439	0,318	0,617	0,705	1,004	0,266	0,387	0,295	-0,299	-0,121	0,295	-0,303
XI	-0,439	-0,101	0,018	-0,409	1,338	0,913	1,439	1,322	0,338	0,425	0,117	-0,340	0,425
XII	0,101	-0,262	-0,290	0,142	0,637	1,071	0,899	0,929	0,363	-0,434	-0,030	0,367	-0,434
XIII	0,262	0,579	0,538	0,161	1,317	0,940	0,738	0,779	0,317	0,377	-0,041	-0,315	0,377
XIV	-0,579	-0,785	-0,684	-0,421	0,794	1,057	1,579	1,478	0,206	-0,263	0,101	0,206	-0,263
XV	0,785	0,863	0,705	0,617	1,078	0,990	0,215	0,373	-0,078	0,088	-0,158	-0,078	0,088
Spalte Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Tabelle II. Die Spule mit großer Streuung: $\sigma = 0,6$, $r = w$.

(Die Schaltspannung E ist gleich 1 gesetzt.)

Ordnungs- zahl des Intervalles	Wanderwellen				Knoten- punkts- potentiale		Lade- zustand		Windungsspannung				
	Anfangs- windung		Endwindung						Vorderseite		Rücken	Rechte	Linke
p	V ₁ '	V ₂ ''	V ₂ '	V ₃ ''	V ₂	V ₃	V ₁₀	V ₃₀	E-V ₂	V ₂ -V ₃	V ₁₀ -V ₃₀	Seite	
												V ₁₀ -V ₃₀ '	V ₁₀ -V ₃₀ ''
I	1	0,361	0,361	0,143	0,361	0,143	0	0	0,639	0,218	0	0,639	0,218
II	-0,361	-0,338	0,519	-0,438	1,023	0,076	1,361	0,504	-0,023	0,947	0,857	-0,023	0,957
III	0,338	-0,345	-0,268	0,136	0,317	0,621	0,662	0,585	0,683	-0,304	0,077	0,683	-0,404
IV	0,345	0,428	0,630	-0,031	1,083	0,422	0,655	0,453	-0,083	0,661	0,202	-0,083	0,661
V	-0,428	-0,565	-0,189	-0,202	0,863	0,850	1,428	1,052	0,137	0,013	0,376	0,137	0,013
VI	0,565	0,290	0,064	0,237	0,725	0,898	0,435	0,661	0,275	0,173	-0,226	0,275	-0,173
VII	-0,290	-0,037	0,291	-0,222	1,253	0,740	1,290	0,962	-0,253	0,513	0,328	-0,253	0,513
VIII	0,037	-0,264	-0,332	0,083	0,699	1,114	0,963	1,031	0,301	-0,445	-0,068	0,301	-0,415
IX	0,264	0,370	0,324	0,048	1,106	0,830	0,736	0,782	-0,106	0,276	-0,046	-0,106	0,276
X	-0,370	-0,338	-0,122	-0,156	1,032	0,998	1,370	1,154	-0,032	0,034	0,216	-0,032	0,034
XI	0,338	0,151	-0,063	0,175	0,813	1,051	0,662	0,876	0,187	-0,238	-0,214	0,187	-0,238
XII	-0,151	0,060	0,223	-0,125	1,211	0,863	1,151	0,988	-0,211	0,348	0,163	-0,211	0,348
XIII	0,060	-0,225	-0,251	0,026	0,835	1,113	1,060	1,086	0,165	-0,278	-0,026	-0,165	-0,277
XIV	0,225	0,269	0,183	0,067	1,044	0,928	0,775	0,861	-0,044	0,116	-0,086	-0,044	0,116
XV	-0,269	-0,199	-0,041	-0,121	1,070	0,990	1,269	1,111	-0,070	0,080	0,158	-0,070	0,080
XVI	0,199	0,055	-0,093	0,117	0,856	1,066	0,801	0,949	0,144	-0,210	-0,148	0,144	-0,210
Spalte Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Ebenfalls leicht anzugeben ist die Windungsspannung in der Mitte der Spulenseiten. Da hier die rechts- und linksflüchtigen Wellen gleichzeitig eintreffen, sind V_{10} bzw. V_{30} (Abb. 14a und b) die Werte des Potentials. Ihre Differenz, die Windungsspannung, ist in Spalte 11 aufgeführt. Die Maximalwerte 0,5 E bzw. 0,86 E liegen etwas tiefer als die Windungsspannungen auf der Vorderseite.

Abb. 14a. $\sigma = 0,2$.

Abb. 14a u. b. Das Potential der Spulenrückseite gegen Erde (vgl. Abb. 1).

Abb. 14b. $\sigma = 0,6$.

Abb. 15a. $\sigma = 0,2$.

Abb. 15a u. b. Die Windungsspannung an der rechten Spulenseite (vgl. Abb. 1).

Abb. 15b. $\sigma = 0,6$.

Abb. 16a. $\sigma = 0,2$.

Abb. 16a u. b. Die Windungsspannung an der linken Spulenseite (vgl. Abb. 1).

Abb. 16b. $\sigma = 0,6$.

Schließlich zeigen noch die Abb. 15 und 16 die eigenartige Pulsation der Windungsspannung in der Mitte der beiden Spulenseiten (vgl. auch Abb. 1). Es treffen hier auf ein Intervall zwei Stufen, da die Ankunftszeit der rechtsläufigen und linksläufigen Welle um ein halbes Intervall differiert. Gleich nach dem Einschalten begegnen wir wieder denselben gefährlich hohen Werten, wie an der Vorderseite der Spule, wobei abermals auf die Endwindung eine etwas höhere Beanspruchung entfällt. Ist jedoch die Anfangsschwingung abgeklungen, so steigen die Spitzen nicht mehr über die halbe Einschaltspannung.

Gegen Erde wird die ganze Spule mit hoher Spannung beansprucht, am höchsten die erste Windung (V_{10}') der Spule mit geringer Streuung, wo nicht viel an der Erreichung der doppelten Schaltspannung $2E$ fehlt.