2. Versuche

zur Ermittlung des Luftwiderstandes, dessen Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Gestalt der Körper; von Albert Frank.

So naheliegend der Wunsch ist, die Gesetze des Widerstandes sicher zu erkennen, welchen die uns umgebende Luft bewegten Körpern entgegensetzt, oder welchen die bewegte Luft auf ruhende Körper ausübt, so unsicher sind die Ergebnisse der zu diesem Zwecke angestellten Forschungen, so daß die hier bestehende Lücke bei den gesteigerten Anforderungen an rasche Durchmessung großer Entfernungen sehr fühlbar geworden ist.

Ich habe mich deshalb bemüht, den Luftwiderstand verschiedener Körperformen zu ermitteln, um auf diese Weise sichere Grundlagen über den Einfluß der Gestaltung der Körper auf den Luftwiderstand zu gewinnen, und hierbei ein Verfahren zur Anwendung gebracht, welches einen hohen Grad von Genauigkeit gewährleistet, weil es Fehlerquellen anderer Versuchsmethoden vermeidet, die bei der großen Empfindlichkeit des Luftwiderstandes gegen äußere Einflüsse die Ursache der bisher noch auf diesem Gebiete bestandenens Unsicherheit gewesen sind.

Als ein zu diesem Zwecke vortreffliches Mittel hat sich mir die Pendelbewegung der Versuchskörper bei großer Pendellänge und großem Schwingungsbogen im geschlossenen Raume erwiesen. Ein früher als Aula dienender Raum der Technischen Hochschule zu Hannover, welcher jetzt dem physikalischen Institute überwiesen ist, wurde mir von dem Professor der Physik Hrn. Dr. Dieterici zur Anstellung der beabsichtigten Untersuchungen bereitwilligst zur Verfügung gestellt.

Hier konnte ich eine Pendellänge von 12,7 m bei einem Schwingungsbogen von mehr als 13 m Länge verwenden, wobei die Aufhängung in einer Weise bewirkt wurde, daß der schwingende Körper sich nur in einer senkrechten Ebene be-

wegen konnte, während jede Drehung um die Pendelachse ausgeschlossen war.

Das in irgend eine Anfangslage gebrachte und sodann sich selbst überlassene Pendel kann wegen des Luftwiderstandes natürlich nicht bis zu seiner Ausgangslage zurückgelangen, vielmehr durchläuft sein Schwerpunkt immer kleinere Schwingungsbögen, deren Endpunkte die Fallhöhen und bei bekanntem Gewichte die für jede Doppelschwingung aufgewendete Schwerkraftsarbeit des Pendels ermitteln lassen. Diese Arbeit dient lediglich dazu, den Luftwiderstand des Versuchskörpers und seiner Aufhängungsdrähte, sowie die Reibung in den Lagern zu überwinden.

Bei gleichem Ablaufpunkte, gleicher Lufttemperatur und gleichem Barometerstande erreicht dasselbe Pendel bei ruhiger Luft selbst nach mehreren Hundert Schwingungen genau die gleiche Wechsellage wieder, so daß der von seinem Schwerpunkte durchlaufene Weg nach Tausenden von Metern auf Millimeter genau durch Beobachtung unmittelbar festgestellt werden kann.

Infolge davon haben diese Pendelversuche zu Ergebnissen geführt, die nach verschiedenen Richtungen von Bedeutung sind.

Sie bestätigen die Annahme, daß der Luftwiderstand vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängt für sehr verschiedene, ja für außerordentlich kleine Geschwindigkeiten. Denn diese Abhängigkeit ließ sich mit Sicherheit überall feststellen, obgleich sich die während einer Doppelschwingung verrichtete Luftwiderstandsarbeit von der ersten bis zur letzten Schwingung bis auf $\frac{1}{23400}$ ihres Anfangswertes verminderte.

Sie ergaben für die Aufeinanderfolge der einzelnen Wechselagen ein sehr einfaches Gesetz, dessen Geltung sich auf alle solche Fälle erstreckt, in denen die Dämpfung der Schwingungsamplituden vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängt. Sie gestatten endlich einen sicheren Schluß auf die Größe des Luftwiderstandes ebener Flächen und auf die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Gestalt der Körper.

Beschreibung der Versuchsvorrichtung und der Versuche.

In einer Höhe von 13,055 m über dem Fußboden wurde eine gegen Durchbiegung gut versteifte Bohle befestigt und

mit zwei untereinander verbundenen Fahrradnaben der Adler-Fahrradwerke versehen, deren äußere Ränder um 500 mm voneinander entfernt waren, und zum Einhängen von zwei kleinen Stahlbügeln dienten, von denen je zwei 0,7 mm starke Stahldrähte nach dem Versuchskörper hinabführten. Die Querverbindung bewirkte, daß keine Nabe gegen die andere vor-eilen konnte, sich vielmehr beide wie ein Körper bewegen mußten. Der weite Abstand der oberen Aufhängungspunkte gestattete dem Pendel lediglich eine Schwingung in senkrechter Ebene, während Drehungen um den Pendelarm verhindert wurden.

Um die Wechsellagen des Pendels nach jeder Doppelschwingung genau bestimmen zu können, wurden Bretter nach einem Kreisbogen von 12,7 m, dem Schwingungsbogen des Pendels entsprechend ausgeschnitten, mit Millimeterteilung versehen, durch feste Gestelle gehalten und parallel der Pendelbahn in solcher Entfernung von dieser aufgestellt, daß die Luftbewegung dadurch nicht beeinflußt werden konnte.

Ein auf der Teilung verschiebbarer Zeiger ließ sich nun auf eine in der Mitte des Versuchskörpers angebrachte Marke einstellen, während seine Lage durch eine Bleilinie neben der Teilung vermerkt wurde.

Vor Beginn des Versuches wurde der Versuchskörper durch einen nach seinem Schwerpunkt gerichteten Faden in eine solche Lage gebracht, daß dieser um einen Winkel von 30° aus der Lotlinie entfernt war, eine Lage, welche dem Nullpunkte der Millimeterteilung entsprach. Dabei mußte der Faden tangential zur Bahn des Schwerpunktes gerichtet sein und genau in dessen Schwingungsebene liegen, weil anderenfalls Ablenkungen aus der Schwingungsebene hätten eintreten können, durch welche die Versuchsergebnisse nachteilig beeinflußt wären.

Deshalb wurde der Ablaufpunkt mit Hilfe eines Theodoliths und unter Anwendung von Bleiloten genau ermittelt und durch Einfeilen in eine feste Eisenschiene für alle Versuche festgestellt.

Durch $\frac{1}{2}$ Abbrennen des Fadens wurde das vorher völlig in Ruhe befindliche Pendel sich selbst überlassen, nach jedesmaliger Rückkehr dessen Endlage am Teilungsbogen zunächst

nur vorgemerkt, bei wiederholten Versuchen aber mit Hilfe des vorerwähnten Schiebers aufgezeichnet, bis eine ausreichende Genauigkeit erzielt war. Sodann wurden die den Wechsellagen des Pendels entsprechenden Bogenlängen in Millimetern aufgeschrieben.

Um zunächst zu ermitteln, ob die Annahme berechtigt sei, daß der Luftwiderstand bei verschiedenen Geschwindigkeiten sich mit deren Quadrate ändere, wurde eine einfache Messingkugel benutzt, deren Schwerpunkt von der vorerwähnten Anfangslage ausgehend, seine Schwingungsweiten immer mehr verminderte, bis er nach 500 Doppelschwingungen eine um 6436,6 mm von dem Nullpunkte der Teilung entfernte Wechsellage erreichte, sich somit der senkrechten Pendelstellung von 30° bis auf $0,96^\circ$ genähert hatte.

Nachdem diese Versuche zu dem sicheren Beweise geführt hatten, daß sich der Luftwiderstand in der Tat mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ändert, dienten weitere Versuche dazu, die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Gestaltung der schwingenden Körper zu ermitteln. Hierbei genügte es, die Bewegung des Pendels zu verfolgen, bis dessen Schwerpunkt eine vom Ausgangspunkte um etwa 10° entfernte Wechsellage erreicht, auf der Bogenteilung also einen Abschnitt von rund 2200 mm durchmessen hatte.

In beiden Fällen kommen für die Berechnung der Versuchsergebnisse folgende Erwägungen in Betracht.

Berechnung der Versuchsergebnisse.

Aus den beobachteten Abschnitten der Bogenteilung lassen sich die Ausschlagwinkel α der Wechsellagen des Pendels unmittelbar bestimmen. Entsprechen daher die Winkel α_0 und α_e irgend zwei Endstellungen des Pendels für eine beliebige Anzahl vollendeter Doppelschwingungen, so beträgt die Fallhöhe des Versuchskörpers bei einem Abstände R des Schwerpunktes von der wagerechten Drehachse $R(\cos \alpha_e - \cos \alpha_0)$. Ebenso beträgt die Fallhöhe des Schwerpunktes der Aufhängedrähte, wenn dessen Abstand von der Drehachse r ist, $r(\cos \alpha_e - \cos \alpha_0)$. Bei einem Gewichte des Versuchskörpers q_1 und einem Gewichte der Drähte q_2 wird somit bei dieser Bewegung eine Schwerkraftsarbeit $(q_1 R + q_2 r)(\cos \alpha_e - \cos \alpha_0)$ verrichtet. Diese

Schwerkraftsarbeit hat sowohl den Luftwiderstand des Pendels als auch die Reibungsarbeit in den Lagern zu überwinden.

Zur Bestimmung der letzteren habe ich vor Aufhängung des Pendels an beiden Enden eines über die zur Aufnahme der Drähte dienenden, auf Rollen gelagerten Fahrradnaben, gelegten Faden je ein Gewicht $(q_1 + q_2)/2$ angebracht und so dann das Gewicht ermittelt, welches auf der einen oder anderen Seite zuzusetzen war, um eine gleichförmige Bewegung zu unterhalten. Hierbei ergab sich, daß 0,0505 kg an einem Nabenhalbmesser von 0,01525 m genügten, um ein Gesamtgewicht von 6,670 kg gleichförmig zu bewegen.

Für den einem Halbmesser von 12,7 m entsprechenden Schwingungsweg S_m berechnet sich hieraus für jedes Kilogramm des aufgehängten Gewichtes eine Reibungsarbeit

$$0,00000909 S_{\text{mkg}}.$$

Der Luftwiderstand setzt sich aus dem des Versuchskörpers und dem der Drähte zusammen. Er hängt von der Gestalt des Pendels ab und steht im geraden Verhältnisse zur Masse γ/g der verdrängten Luft, worin γ deren Dichtigkeit und g die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Dabei wollen wir von der durch meine Versuche noch zu beweisenden Annahme ausgehen, daß der Luftwiderstand sich mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ändert.¹⁾

1) *Literatur*: Fr. W. Bessels Untersuchungen über die Pendelbewegungen (vgl. Bessels Abhandlungen 3. Engelmann, Leipzig 1876) haben den Zweck, die Bedingungen zur Erzielung genauer Sekundenpendel zu ermitteln. Sie suchen deshalb die Ursachen zu ergründen, welche Änderungen der Schwingungsdauer herbeiführen können. In diesem Sinne sind auch die durch die Aufhängung des Pendels bedingten Reibungswiderstände behandelt. Bessels Untersuchungen sind aber nicht geeignet, die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit klarzustellen. Er selbst sagt: die Annahme des Widerstandes im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit ist eine Hypothese, welche durch die Beobachtung der Pendelschwingungen keineswegs gerechtfertigt wird. Da die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit nicht durch die Theorie bestimmt wird, so sollte man sie aus den Versuchen selbst ableiten, ehe man weitere Folgerungen daraus zieht. Die von Bessel in dieser Beziehung in Aussicht gestellten Versuche sind wohl nicht mehr zum Abschlusse gekommen, wenigstens sind sie nicht veröffentlicht.

von Loessl, Die Luftwiderstandsgesetze. Wien 1896. Die Ver-

Bei einer Geschwindigkeit v_m läßt sich alsdann der Luftwiderstand des Pendels durch das Produkt $L \cdot (\gamma/g) v^2$ ausdrücken. Dieser verrichtet während eines unendlich kleinen Bogenweges $R d\alpha$ eine Widerstandsarbeit

$$L \frac{\gamma}{g} v^2 R d\alpha.$$

Nehmen wir einmal an, daß das Pendel ähnlich dem einer Uhr außer durch die Schwerkraft noch durch eine andere äußere Kraft bewegt werde, welche in jedem Augenblicke eine der Widerstandsarbeit gleiche Arbeit verrichtet, so daß der Schwerpunkt nach einer Doppelschwingung den Ausschlagwinkel α_1 wieder erreichen muß, von dem er ausgegangen ist, daß sich also die Bewegung des Pendels gerade so wie im luftleeren Raume bei Vermeidung der Lagerreibung verhält. Dann würde sich die Geschwindigkeit v des Schwerpunktes für irgend einen Winkel α des Pendels durch die Gleichung

$$v = \sqrt{2 g R (\cos \alpha - \cos \alpha_1)}$$

bestimmen lassen, so daß

$$v^2 = 2 g R (\cos \alpha - \cos \alpha_1)$$

wird.

Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Luftwiderstandsarbeit des Versuchskörpers während des unendlich kleinen Bogens $R d\alpha$ durch den Wert

$$L \frac{\gamma}{g} 2 g R^2 (\cos \alpha - \cos \alpha_1) d\alpha$$

suche sind mit rotierenden Apparaten ausgeführt, bei denen die Drehung um eine senkrechte Achse erfolgt.

O. Mannesmann, Luftwiderstandsmessungen mit einem neuen Rotationsapparat. Wied. Ann. **67**. p. 105—131. 1899. Die von v. Loessl und von Mannesmann mit rotierenden Apparaten gefundenen Ergebnisse weichen erheblich voneinander ab. Die Abweichungen sind vermutlich auf Fehlerquellen zurückzuführen, welche in dem angewandten Verfahren ihre Begründung finden.

Lochner macht in der Elektrotechn. Zeitschr. Jahrg. 1904. p. 1079 Mitteilungen über Versuche der Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen zur Bestimmung des Luftwiderstandes, bei denen der auf die ebene Stirnwand des in Bewegung befindlichen Wagens kommende Luftdruck durch Beobachtung der Druckhöhe einer Wassersäule unmittelbar gemessen ist. Bei Geschwindigkeiten zwischen 14 und 55,5 m in der Sekunde ist der Luftdruck mit dem Quadrate der Geschwindigkeit gewachsen.

und während einer halben Schwingung zwischen den Grenzen $\alpha = 0$ und α_1 durch den Wert

$$L \frac{\gamma}{g} 2 g R^2 (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1)$$

ausdrücken.

Eine Doppelschwingung erfordert daher zur Überwindung des Luftwiderstandes eine Arbeit

$$L \frac{\gamma}{g} 8 g R^2 (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1),$$

wenn unter α_1 der Winkel verstanden wird, bei dessen viermaliger Durchmessung der Versuchskörper die gleiche Widerstandsarbeit zu überwinden hätte als bei einer wirklich vollführten Doppelschwingung.

Jeder der vier Aufhängungsdrähte hat im Abstände ϱ von der Drehungsachse eine Geschwindigkeit $\varrho/R v$ und bietet bei einer Dicke δ mit jedem Flächenelemente von der Länge $d\varrho$ einen Widerstand

$$\frac{\gamma}{g} K_1 \delta d\varrho \left(\frac{\varrho}{R} v \right)^2,$$

worin K_1 einen dieser Fläche entsprechenden konstanten Faktor bedeutet.

Der Widerstand eines Drahtes von der Länge R ist somit

$$\frac{\gamma}{g} K_1 \delta \frac{v^2}{R^2} \int_0^R \varrho^2 d\varrho = \frac{\gamma}{g} K_1 \delta v^2 \frac{R}{3}.$$

Diese Kraft möge im Abstände R' von der Drehungsachse des Pendels angreifen, so daß dem unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ ein Bogenweg $R' d\alpha$ entspricht. Dann ist die von einem Drahte zu überwindende Widerstandsarbeit

$$\frac{\gamma}{g} K_1 \delta v^2 \frac{R}{3} \cdot R' d\alpha$$

unter den obigen Voraussetzungen auch

$$\frac{\gamma}{g} K_1 \delta \frac{R^2}{3} \cdot R' \cdot 2 g (\cos \alpha - \cos \alpha_1) d\alpha,$$

mithin für eine Doppelschwingung und vier Drähte, wenn

$$\frac{4}{3} K_1 \delta R' = D$$

gesetzt wird

$$D \frac{\gamma}{g} 8 g R^2 (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1).$$

Die Luftwiderstandsarbeit des Versuchskörpers und seiner vier Aufhängedrähte beträgt daher bei einer Doppelschwingung

$$(L + D) \frac{\gamma}{g} 8 g R^2 (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1).$$

Hiernach läßt sich die in jedem Augenblicke durch den Luftwiderstand anders beeinflusste Pendelbewegung durch eine Reihe symmetrischer Doppelschwingungen verschiedener Amplituden ersetzen, von denen jede die gleiche Widerstandsarbeit wie die ihr entsprechende wirkliche Doppelschwingung liefert.

Erreicht daher das von einer Anfangslage α_0 ausgehende Pendel nach x_1 -Doppelschwingungen einen Ausschlagwinkel α_e , so ergibt sich aus Vorstehendem die Beziehung

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & (L + D) \frac{\gamma}{g} 8 g R^2 \sum (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1) \\ & = \left(q_1 + \frac{q_2}{2} \right) R (\cos \alpha_e - \cos \alpha_0) - 0,00000909 (q_1 + q_2) S_m, \end{aligned} \right.$$

indem $r = \frac{R}{2}$ gesetzt ist.

Während der Schwerpunkt des Pendels sich aus seiner Anfangslage $\alpha_0 = 30^\circ$ nach x_1 -Doppelschwingungen um 10° entfernt, mithin bei einem Halbmesser $R_1 = 12,700$ m um rund 0,935 m sinkt, wird die Reibungsarbeit so sehr von der Luftwiderstandsarbeit überwogen, daß auf jede 0,300 m Fallhöhe zur Überwindung der letzteren nur etwa 0,001 m zur Überwindung der ersteren kommt.

Die durch eine Doppelschwingung bedingte Fallhöhe ist im allgemeinen so klein, daß sie sich zu der vom Schwerpunkte durchmessenen Bogenlänge Δz wie der Sinus des für diese Doppelschwingung maßgebenden Winkels verhält, den wir mit α_1 bezeichnet haben. Wir können deshalb dafür $\Delta z \sin \alpha_1$ setzen und diese Länge in eine der Luftwiderstandsarbeit entsprechende Länge $\Delta s \sin \alpha_1$ und die der Reibungsarbeit entsprechende Länge $\Delta \sigma \sin \alpha_1$ zerlegen, so daß

$$\Delta z \sin \alpha_1 = \Delta s \sin \alpha_1 + \Delta \sigma \sin \alpha_1,$$

und

$$\Delta z = \Delta s + \Delta \sigma$$

wird.

$$\sum \Delta s = \sum \Delta z - \sum \Delta \sigma$$

Die bei einer Doppelschwingung verrichtete Reibungsarbeit läßt sich nach dem Vorstehenden ausdrücken durch

$$0,00000909 (q_1 + q_2) S = (q_1 + q_2) \Delta \sigma \sin \alpha_1 .$$

Hätten wir es mit einem steifen Pendelarme zu tun, so wäre

$$S = 4 R_1 \alpha_1$$

und

$$\Delta \sigma = 0,00000909 \cdot \frac{4 R_1 \alpha_1}{\sin \alpha_1} .$$

Weil aber $\alpha_1 / \sin \alpha_1$ zwischen den Grenzen $\alpha_1 = 30$ und $\alpha_1 = 0$ nur wenig von der Einheit verschieden ist, und sich dieser mit abnehmendem α_1 immer mehr nähert, so würden wir für alle Doppelschwingungen annähernd den gleichen Wert $\Delta \sigma = 0,00046$ m setzen können. Nun findet aber bei der Pendelbewegung eine kleine Durchbiegung der Drähte statt, welche den Versuchskörper in den Wechsellagen um etwa 0,07 m über die an der Aufhängestelle zur Drahtrichtung gezogene Tangente voreilen läßt, so daß der von der Bewegung in den Lagern abhängige Weg

$$S_m = 4 (R_1 \alpha_1 - 0,07)$$

und für eine beliebige Doppelschwingung

$$\Delta \sigma_m = 0,00046 - \frac{0,0000025}{\sin \alpha_1}$$

wird, oder wenn wir diese Strecken ebenso wie die den Wechsellagen entsprechenden Bogenabschnitte in Millimetern ausdrücken

$$(2) \quad \Delta \sigma_{mm} = 0,46 - \frac{0,0025}{\sin \alpha_1} .$$

Dieser negative Wert hat während der ersten Periode, bei welcher $\alpha_1 > 20^\circ$ ist, nur geringe Bedeutung, während er für kleine Winkel α sehr an Bedeutung gewinnt.

Hat man für irgend eine Anzahl Doppelschwingungen $\sum \Delta \sigma$ berechnet, so ergibt sich die entsprechende $\sum \Delta s = s$ nach dem Vorstehenden aus der Differenz zwischen der beobachteten

$$\sum \Delta z \quad \text{und} \quad \sum \Delta \sigma$$

oder es ist

$$s = \sum \Delta z - \sum \Delta \sigma .$$

Trägt man aber die Anzahl der Doppelschwingungen x als Abszissen und die Abschnitte der Bogenteilung s als Ordinaten

eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf, so ergibt sich eine Kurve, welche mit großer Genauigkeit durch die Gleichung

$$(3) \quad (a + x)(b - s) = C$$

ausgedrückt werden kann.

Diese Kurve geht durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems, so daß für $x = 0$, $s = 0$ mithin $a b = C$ wird.

Dabei nähern sich die Werte s bei zunehmendem x immer mehr der Bogenlänge $R_1 \alpha_0$, so daß für $x = \infty$ $s = b$ werden muß. Bei meinen Versuchen war aber $R_1 = 12\,700$ mm, $\alpha_0 = \pi/6$, mithin $b = 6650$ mm.

Hiernach bedarf es nur noch eines zuverlässig beobachteten Wertes s_1 für eine bestimmte Schwingungszahl x_1 , um aus den Gleichungen

$$(a + x_1)(6650 - s_1) = C$$

und

$$a \cdot 6650 = C$$

die beiden Konstanten a und C zu berechnen.

Sind diese bekannt, so läßt sich jeder beliebige Abschnitt s für irgend eine Schwingungszahl x leicht durch die Gleichung berechnen

$$(4) \quad s = 6650 - \frac{C}{a + x}.$$

Die so berechneten Werte stimmen vortrefflich mit den beobachteten Abschnitten unter Berücksichtigung der der Reibung entsprechenden Größen $\Sigma \Delta \sigma$ überein.

Aus vorstehender Gleichung ergibt sich auch die für eine $(x + 1)^{\text{te}}$ Doppelschwingung zur Überwindung des Luftwiderstandes erforderliche Bogenlänge

$$(5) \quad \Delta s = \frac{6650 - s}{a + x + 1}.$$

Setzt man $6650 - s = R_1 \alpha$, so lassen sich diese Beziehungen auch schreiben:

$$(4a) \quad R_1 \alpha = \frac{C}{a + x} \quad \text{und} \quad (5a) \quad \Delta s = \frac{R_1 \alpha}{a + x + 1},$$

wobei $R_1 \alpha$ den auf der Bogenteilung gemessenen Abstand einer Wechsellage bis zu der durch die Drehungsachse gelegten senkrechten Ebene bedeutet.

Diese Gleichungen drücken das Gesetz der Dämpfung der Pendelschwingungen aus und gelten für alle solche Fälle, in denen der Widerstand sich mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ändert.

Bei den mit einer Kugel angestellten Versuchen, welche den Zweck hatten, die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit festzustellen, erreichte diese nach 16 Doppelschwingungen eine von ihrem Ausgangspunkte, dem Nullpunkte der Bogenteilung, um 2205 mm entfernte Wechsellage, von denen auf Überwindung der Reibungsarbeit

$$\sum \left(0,46 - \frac{0,0025}{\sin \alpha_1} \right) = 7 \text{ mm}$$

entfielen. Somit ist für $x = 16$, $s = 2198$

$$(a + 16)(6650 - 2198) = C,$$

$$a \cdot 6650 = C,$$

oder

$$a = 32,4076 \quad \text{und} \quad C = 215511.$$

Nachstehende *Zusammenstellung 1* enthält die aus Gleichung (4)

$$s = 6650 - \frac{C}{a + x}$$

und aus Gleichung (2)

$$\sum \Delta \sigma = 0,46 x - \sum \frac{0,0025}{\sin \alpha_1}$$

für $x = 0$ bis $x = 500$ berechneten Strecken, sowie deren Summen $z = s + \sum \Delta \sigma$, welche mit der durch Beobachtung gefundenen Kurve (Fig. 1) vortrefflich übereinstimmen.

Dies führt zu folgenden Erwägungen. Die Luftwiderstandsarbeit eines reibungslosen Pendels ist nach Gleichung (1)

$$\begin{aligned} (L + D) \frac{\gamma}{g} 8 g R^2 \sum (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1) \\ = \left(q_1 + \frac{q_2}{2} \right) R (\cos \alpha_e - \cos \alpha_0), \end{aligned}$$

oder

$$\frac{(L + D) \frac{\gamma}{g} 8 g R^2}{q_1 + \frac{q_2}{2}} = \frac{R (\cos \alpha_e - \cos \alpha_0)}{\sum (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1)}.$$

Bei dem vorliegenden Versuch war aber

$$R = 12738 \text{ mm}, \quad q_1 = 4,796 \text{ kg}, \quad q_2 = 0,160 \text{ kg}, \quad \alpha_0 = 30^\circ.$$

Für $x = 16$ und $s = 2198 \text{ mm}$ ergibt sich $\alpha_e = 20^\circ 5' 1,572''$.

Zusammenstellung 1.
Pendelbewegung einer Kugel.

Schwingungszahl x	$s = 6650 - \frac{C}{a+x}$ Millimeter	$\sum \Delta \sigma = 0,46 \cdot x - \sum \frac{0,0025}{\sin \alpha_1}$ Millimeter	$z = s + \sum \Delta \sigma$ Millimeter
1	199,05	0,46	199,51
16	2198	7,3	2205,3
30	3196,8	13,6	3210,4
50	4034,8	22,5	4057,3
70	4555,6	31,4	4587,0
100	5020,1	44,8	5064,9
140	5400	62,3	5462,3
180	5635,4	79,4	5714,8
220	5796,2	96,3	5892,5
260	5918,0	112,8	6025,8
300	6001,7	128,9	6130,6
340	6072,6	144,6	6217,2
380	6127,4	159,7	6287,1
420	6173,6	174,0	6347,6
460	6212,3	187,8	6400,1
500	6245,2	199,9	6445,1

Fig. 1.

Für eine beliebige Doppelschwingung können wir die Beziehung einführen

$$\alpha_1 = \frac{6650 - s - \frac{\Delta s}{2}}{12700},$$

woraus für die ersten 16 Doppelschwingungen

$$\sum (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1) = 0,4156$$

und

$$\frac{(L + D) \frac{\gamma}{g} 8g R^2}{q_1 + \frac{q_2}{2}} = 2242,207 = E$$

folgt. Dieser Wert bleibt für alle Schwingungen derselbe, so daß für eine beliebige Doppelschwingung

$$E(\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1) = R(\cos \alpha_e - \cos \alpha_0),$$

$$E(\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1) = \Delta s' \sin \alpha_1$$

und

$$\frac{\Delta s'}{E} = 1 - \cotg \alpha_1 \alpha_1$$

gilt. Nun ist

$$1 - \cotg \alpha_1 \alpha_1 = \frac{\alpha_1^2}{3} + \frac{\alpha_1^4}{45},$$

da die folgenden Glieder so klein sind, daß sie nicht in Betracht kommen. Somit ist

$$(6) \quad \alpha_1^2 = -7,5 + \sqrt{56,25 + 45 \frac{\Delta s'}{E}}.$$

Darin entsprechen die Werte $\Delta s'$ einem Halbmesser $R = 12738$ mm, während die Abschnitte

$$\Delta s = \frac{6650 - s}{a + x + 1}$$

einem Bogen vom Halbmesser $R_1 = 12700$ mm angehören, so daß

$$\Delta s' = \frac{12738}{12700} \cdot \frac{6650 - s}{a + x + 1}$$

ist.

Durch Einführung solcher Werte $\Delta s'$ in obige Gleichung lassen sich die zugehörigen Winkel α_1 sowie die entsprechen-

den Bogenabschnitte $6650 - R_1 \alpha_1$ berechnen und mit den Bogenabschnitten $s + (\Delta s/2)$, die wir aus den Gleichungen

$$s = 6650 - \frac{C}{a+x} \quad \text{und} \quad \Delta s = \frac{6650 - s}{a+x+1}$$

für verschiedene Werte von x erhalten, vergleichen.

Die auf beide Weise gefundenen Bogenabschnitte sind in der *Zusammenstellung 2* einander gegenübergestellt.

Zusammenstellung 2.

Schwingungszahlen α	1	2	3
	$s + \frac{\Delta s}{2}$	$6650 - R_1 \alpha_1$	
	$s = 6650 - \frac{C}{a+x}$	$\alpha_1^2 = -7,5 + \sqrt{56,25 + 45 \frac{\Delta s'}{E}}$	$\Delta s = \frac{6650 - s}{a+x+1}$
	$\Delta s = \frac{6650 - s}{a+x+1}$		
	Millimeter	Millimeter	Millimeter
16—17	2243	2251	90,11
30—31	3224	3225	54,46
70—71	4555,7	4553,2	20,35
100—101	5028	5026	12,20
200—201	5724,7	5722,8	3,97
300—301	6002,6	6001,2	1,94
400—401	6152,2	6151,6	1,15
500—501	6245,6	6244,9	0,759

Die sehr geringe Abweichung dieser in Kolumne 1 und 2 enthaltenen Werte untereinander und ihre vortreffliche Übereinstimmung mit den beobachteten Bogenabschnitten sind nach zwei Richtungen hin von Bedeutung.

Sie lassen mit Sicherheit erkennen, daß der Luftwiderstand in der Tat auch bei den kleinsten Geschwindigkeiten sich mit deren Quadrate ändert; denn nur in diesem Falle gilt die Gleichung

$$\Delta s' = E(1 - \cotg \alpha_1 \alpha_1).$$

Sie liefern ferner den Beweis, daß die Gleichung

$$(a+x)(b-s) = C$$

bez. die Gleichungen

$$R_1 \alpha = \frac{C}{a+x} \quad \text{und} \quad \Delta s = \frac{R_1 \alpha}{a+x+1}$$

wirklich das Gesetz der Dämpfung der Schwingungsweiten ausdrücken und für alle solche Fälle gelten, in denen der Widerstand sich mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ändert.

Die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Gestalt der Körper.

Aus der Tatsache, daß der Luftwiderstand sich mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ändert, folgt die Richtigkeit des oben aufgestellten Satzes, wonach die während einer Doppelschwingung zu überwindende Luftwiderstandsarbeit durch das Produkt

$$(L + D) \frac{\gamma}{g} 8 g R^2 (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1)$$

ausgedrückt werden kann.

Die Luftwiderstandsarbeit ist aber gleich der Schwerkrbeitsarbeit

$$\left(q_1 + \frac{q_2}{2} \right) R (\cos \alpha_e - \cos \alpha_0)$$

vermindert um die Reibungsarbeit

$$(q_1 + q_2) 0,00000909 S_m,$$

so daß für eine beliebige Anzahl Doppelschwingungen

$$\begin{aligned} (L + D) \frac{\gamma}{g} 8 g R^2 \sum (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1) \\ = \left(q_1 + \frac{q_2}{2} \right) R (\cos \alpha_e - \cos \alpha_0) - 0,00000909 (q_1 + q_2) S_m \end{aligned}$$

ist.

Von dieser Beziehung wollen wir deshalb ausgehen, um die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Gestalt der Körper zu ermitteln.

Der von den Aufhängedrähten herrührende Wert D blieb bei sämtlichen Versuchen unverändert, während der Wert L von der Größe und von der Form der verschiedenen Versuchskörper abhing und deshalb durch das Produkt KF ersetzt werden soll.

Dabei verstehen wir unter K einen von der Gestalt des Körpers abhängenden, aber für ähnliche Flächengebilde konstanten Faktor, während F die Projektion des Versuchskörpers auf eine rechtwinklig zu seiner Bewegungsrichtung stehende Ebene bedeutet. Der Widerstand ähnlicher Flächengebilde

ändert sich nämlich im geraden Verhältnisse mit der Größe F . In dieser Beziehung verweise ich auf die Versuche v. Lössls, mitgeteilt in seinem Buche: Die Luftwiderstandsgesetze, Wien 1896, wonach die Proportionalität des Luftwiderstandes mit der Größe der Grundfläche von ihm bei mehr als tausendfach veränderter Flächengröße durch Versuche festgestellt ist.

Die zu meinen Versuchen benutzten Körper hatten teils kreisförmige, teils quadratische bez. rechteckige Grundfläche. Sie waren aus Holz hergestellt und mit Bleikernen versehen, um die Schwerkrftsarbeit im Vergleich zur Luftwiderstandsarbeit groß zu machen, und so eingerichtet, daß auf leichte Weise auf beiden Enden verschiedene, wenn auch für jeden Versuch symmetrisch gestaltete, dem Hauptkörper genau angepaßte Gebilde diesem vorgesetzt und sicher damit verbunden werden konnten.

So wurde ein zylindrischer Versuchskörper von 0,0104 qm Querschnitt nacheinander mit ebenen kreisförmigen Flächen, Halbkugelflächen, Ellipsoiden oder Kegelflächen versehen. Ein anderer Versuchskörper hatte prismatische Gestalt mit quadratischem Querschnitt. Er diente zur Ermittlung des Luftwiderstandes seiner ebenen quadratischen Endflächen, von Keilflächen, welche unter verschiedenen Winkeln gegeneinander geneigt waren, von gleichseitigen Pyramiden, Halbzylinderflächen und solchen Zylinderflächen, die in einer Schneide zusammenliefen, aber ebenso wie die Halbzylinder tangential zu den Seitenflächen des Prismas ausliefen.

Alle zur Verbindung mit den Versuchskörpern dienenden Teile wurden ebenso wie jene selbst auf Zentigramm genau gewogen, auch wurde bei jedem Versuche der Barometerstand und die Temperatur, letztere auf zehntel Grade Celsius genau aufgezeichnet.

Bei diesen Versuchen wurden, wie oben bereits erwähnt, die Wechsellagen des Pendels von $\alpha_0 = 30^\circ$ bis etwa $\alpha_e = 20^\circ$ beobachtet, weil während dieser Periode die Schwerkrftsarbeit im Vergleich zur Reibungsarbeit sehr groß ist und deshalb eine sehr genaue Ermittlung der Luftwiderstandsarbeit gestattet.

In allen Fällen galten die Beziehungen

$$(a + x)(6650 - s) = C \quad \text{und} \quad s = z - \sum \Delta \sigma,$$

worin z die nach x Doppelschwingungen beobachteten Abschnitte der Bogenteilung und $\Sigma \Delta \sigma$ die der Reibungsarbeit entsprechenden Abschnitte bedeuten und für jede Doppelschwingung

$$\Delta \sigma = 0,000\,009\,09 \frac{S}{\sin \alpha_1}$$

ist.

Da die Kurve xs vom Anfangspunkte des Koordinatensystems ausgeht, so genügt ein einziger zuverlässiger Wert von s für eine x^{te} Doppelschwingung, um in Verbindung mit der Beziehung $a \cdot 6650 = C$ die Konstanten a und C für jeden Versuch zu berechnen. Weil aber das Pendel sich in seiner Anfangslage nicht genau unter den gleichen Verhältnissen befindet, als wenn es bei freier Schwingung das Ende seiner Bahn erreicht, so habe ich in der Regel einen der ersten und einen der letzten Bogenabschnitte, welche besonders zuverlässig ermittelt waren, der Berechnung der Konstanten zugrunde gelegt.

Als zuverlässig bezeichne ich solche Punkte, bei denen sich die Visierlinie des Pendels bei wiederholten Versuchen scharf in die Richtung des Zeigers wieder eingestellt hatte.

So wurden durch Einführung der entsprechenden Größen $x_1 s_1$, $x_n s_n$ die Gleichungen gewonnen

$$(a + x_1)(6650 - s_1) = C \quad \text{und} \quad (a + x_n)(6650 - s_n) = C$$

und daraus die Konstanten a und C berechnet.

Die Zahl der Doppelschwingungen wurde hierbei so gewählt, daß die letzten Wechsellagen des Pendels für die verschiedenen Versuche möglichst wenig voneinander abwichen, weil es wünschenswert war, für die von der Schwerkraft verrichtete Arbeit tunlichst die gleichen Fallhöhen zu bekommen. Die auf diese Weise berechneten Kurven stimmen mit den beobachteten Bogenlängen sehr genau überein.

Die Kurven Figg. 2 u. 3 enthalten die beobachteten Bogenlängen als Ordinaten im Maßstabe 1 : 30 der natürlichen Größe, während die Zahl der Doppelschwingungen vom Anfangspunkte A des Koordinatensystems auf der Abszissenachse in Drittel-Zentim. abgetragen ist. Diese Kurven lassen auch ohne weiteres die Bogenlängen erkennen, um welche das Pendel

auf seinem Hingange von der durch den Ausgangspunkt gelegten wagerechten Ebene entfernt geblieben ist. Es sind das die den Abszissen 0,5, 1,5, 2,5 etc. entsprechenden Ordinaten.

Die aufgetragenen Kurven lassen für jede Schwingung die Anfangslage und Endlage des Pendels und damit seine Bogenentfernung vom Ausgangsniveau erkennen. Aus diesen ergeben sich aber die Anfangs- und Endausschlagwinkel und somit auch deren arithmetisches Mittel α_1 , so daß für jeden Versuch sich

Fig. 2. Vgl. Zusammenstellung I a bis g.

der zur Berechnung des Luftwiderstandes wichtige Wert $\Sigma(\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1)$ genau ermitteln läßt.

Schließlich bleibt noch für jeden Versuch der Wert γ/g zu bestimmen. Dieser ist aber bei einem auf den Meeresspiegel bezogenen Barometerstand B mm Quecksilber und t° C. Lufttemperatur

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{p}{g \cdot 29,272 \cdot 760} \frac{B}{273 + t},$$

und weil der Druck einer Atmosphäre auf 1 qm

$$p = 10334 \text{ kg} \quad \text{und} \quad g = 9,81$$

ist,

$$\frac{\gamma}{g} = 0,0473515 \frac{B}{273 + t}.$$

Fig. 3. Vgl. Zusammenstellung II a bis g und III a und b.

Hiernach sind wir in den Stand gesetzt, alle Werte der rechten Seite der aus Gleichung (1) unmittelbar folgenden Beziehung

$$KF + D = \frac{\left(q_1 + \frac{q_2}{2}\right) R \cos(\alpha_e - \cos \alpha_0) - 0,00000909 (q_1 + q_2) S}{8 g R^2 \sum (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \alpha_1) \frac{\gamma}{g}}$$

aus den Versuchsergebnissen zu berechnen.

Die Fläche F betrug bei den Versuchskörpern mit kreisförmigem Querschnitte im allgemeinen $F = 0,0104$ qm, bei den Versuchskörpern mit quadratischem Querschnitte im allgemeinen $F = 0,01$ qm, während der von den Aufhängungsdrähten her-

rührende Wert D in allen Fällen derselbe blieb. Um diesen Wert D nun bestimmen zu können, wurde eine besondere Versuchsreihe mit einem anderen größeren Zylinder angestellt, der auch mit ebenen rechtwinklig zur Achse stehenden Endflächen versehen war, aber eine Grundfläche $F = 0,0407$ qm besaß.

Diese Versuche lieferten nun eine zweite Gleichung zur Berechnung der beiden Werte D und K .

So ergeben die Versuche mit dem kleinen Zylinder bei ebenen Endflächen die Werte

$$K \cdot 0,0104 + D = 0,0100033,$$

während die Versuche mit dem großen Zylinder zu der Gleichung führten

$$K \cdot 0,0407 + D = 0,026747.$$

Aus beiden Gleichungen berechnet sich

$$K = 0,553 \quad \text{und} \quad D = 0,00425.$$

Ferner wurden zwei prismatische Versuchskörper mit ebenen quadratischen Endflächen benutzt, von denen der eine eine Grundfläche $F = 0,01$ qm, der andere eine solche $F = 0,03$ qm besaß. Diese Versuche führten zu den Gleichungen

$$K \cdot 0,01 + D = 0,0100751$$

und

$$K \cdot 0,03 + D = 0,021725,$$

aus denen sich berechnet

$$K = 0,582 \quad \text{und} \quad D = 0,00425.$$

Bei gleicher Grundfläche bietet also das Quadrat einen etwas größeren Luftwiderstand als die Kreisfläche.

Nachdem der Wert D auf diese Weise ermittelt war, konnte er in gleicher Höhe bei allen übrigen Versuchen von der bei verschiedenen Körperformen auch verschieden ausfallenden Summe $KF + D$ in Abzug gebracht und so die den verschiedenen Körperformen entsprechenden Werte von K berechnet werden, da ja die Grundfläche F in allen Fällen bekannt war.

Zusammenstellung der Versuchsergebnisse, wobei der Luftwiderstand $\frac{\gamma}{g} K \cdot F v^2$ betrgt.
I. Versuchskrper mit kreisfrmigem Querschnitte.

	Zylinder	R	B	t°	q_1	q_2	F	K
		m	mm Quecks.		kg	kg	qm	
a	Mit rechtwinklig zur Achse stehenden ebenen Endflächen	12,68	763	23,6	7,5235	0,160	0,0104	0,558

b	Mit tangential anschließenden Halbkugeln	12,68	764	22,4	7,4743	0,160	0,0104	0,305

c	Mit tangential anschließenden Ellipsoiden, deren große Halbachsen gleich dem zyl. Durchm. sind . . .	12,68	760,2	23,7	7,0995	0,160	0,0104	0,237

d	Mit tangential anschließenden Ellipsoiden, deren große Halbachsen gleich d. 1,5 fach. zyl. Durchm sind	12,68	763,8	22,8	8,3145	0,160	0,0104	0,225

e	Mit vorgesetzten Kegeln, deren Erzeugende 45� mit der Achse einschließen	12,68	760,35	23,55	7,4666	0,160	0,0104	0,368

f	Mit vorgesetzten Kegeln, deren Erzeugende 30� mit der Achse einschließen	12,68	757,2	23,2	7,6099	0,160	0,0104	0,352

g	Mit rechtwinklig zur Achse stehenden ebenen Endflächen	12,68	763,2	17,3	7,2198	0,160	0,0407	0,553

II. Versuchskörper mit quadratischem Querschnitte.

	Prisma		R	B	t°	q ₁	q ₂	F	K
a	Mit rechtwinklig zur Achse stehenden Endflächen		m 12,7	mm Quecks. 761	20,2	kg 6,678	kg 0,160	qm 0,01	0,582
b	Mit Keilflächen, welche mit der Achse einen Winkel von 45° einschließen		12,7	756	20,7	6,71158	0,160	0,01	0,483
c	Mit Keilflächen, welche mit der Achse einen Winkel von 30° einschließen		12,7	758	20,1	6,7194	0,160	0,01	0,377
d	Mit tangential anschließenden Halbsylindern		12,7	759	20,3	6,7376	0,160	0,01	0,462
e	Mit aus gleichseitigen Dreiecken gebildeten Pyramiden		12,7	760	20,5	6,70716	0,160	0,01	0,360
f	Mit tangential anschließenden zylindrischen Flächen, welche die Achse unter 40° schneiden		12,7	759	20,7	6,72979	0,160	0,01	0,306
g	Mit rechtwinklig zur Achse stehenden Endflächen		12,7	762	18,3	5,4215	0,160	0,03	0,552

III. Versuchskörper mit rechteckigem Querschnitte und rechtwinklig zur Achse stehenden Endflächen, wobei $F = a \cdot b$ und $KF = K_1 a^3 + K_2 (a \cdot b - a^3)$ ist.

	Prisma		R	B	t°	q ₁	q ₂	F	K ₁	K ₂
a	—		m 12,7	mm Quecks. 760	20,8	kg 6,6785	kg 0,160	qm 0,015	0,15	0,582
b	—		12,7	762	18,3	5,4215	0,160	0,059	0,342	0,582

Versuchsergebnisse.

Die für die rechnerische Behandlung der einzelnen Versuche erforderlichen Grundlagen, die Pendellängen R , der Barometerstand B , die Temperatur t , das Gewicht des Versuchskörpers q_1 , der Drähte q_2 , die Grundfläche F , die Widerstandsziffer K sind in den *Tabellen I, II und III* unter Ia bis Ig, IIa bis IIg, IIIa und IIIb nach näherer Bezeichnung des Versuchskörpers zusammengestellt, während die zugehörigen gleichartig bezeichneten Kurven der Bogenabschnitte für die Schwingungen aus den Kurventafeln Figg. 2 und 3 ersichtlich sind.

Diese Versuche lassen zunächst erkennen, daß der Luftwiderstand der ebenen Flächen kleiner ist als man nach früheren Versuchen annehmen mußte. So hat v. Lössl für ebene rechtwinklig zur Bahn stehende Kreisflächen den Luftwiderstand $\gamma/g \, 0,83 F v^2$ und für ebene rechtwinklig zur Bahn stehende quadratische Flächen den Luftwiderstand $\gamma/g \, 0,86 F v^2$ gefunden.

Der Faktor K ist also bei meinen Versuchen im ersten Falle im Verhältnis

$$\frac{0,553}{0,83} = 0,666,$$

im zweiten Falle im Verhältnis

$$\frac{0,582}{0,86} = 0,675$$

kleiner als bei den Versuchen v. Lössls.¹⁾

Dessen Versuche sind freilich mit dünnwandigen Platten ausgeführt, während bei den meinigen Körper von einer gewissen Länge verwandt sind, die ja auch bei Fahrzeugen besonders in Betracht kommen.

Bei Versuchskörpern mit kreisförmigem Querschnitte sind tangential an den Zylinder anschließende Rotationsflächen be-

1) Die Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen hat nach den oben erwähnten Mitteilungen Lochners (Elektrotechn. Zeitschr. p. 1079. 1904) innerhalb der Geschwindigkeitsgrenzen zwischen 14 msec und 55,5 msec gefunden, daß der sich mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ändernde Luftwiderstand der ebenen Stirnfläche des Wagens auf 1 msec und 1 qm bezogen den Wert $(\gamma/g) K = 0,0674$ erreicht hat.

sonders geeignet, den Luftwiderstand zu vermindern. So wird dieser bei Ellipsoiden (Versuch Ic), deren große Halbachse gleich dem Durchmesser des Zylinders ist, im Vergleiche zu dem Widerstande ebener Endflächen im Verhältnis

$$\frac{0,237}{0,553} = 0,43$$

verkleinert, wogegen Kegelflächen, deren Erzeugende einen Winkel von 30° mit der Bahnrichtung einschließen, nur eine Verkleinerung des Widerstandes im Verhältnis

$$\frac{0,352}{0,553} = 0,637$$

ergeben.

Auch bei dem prismatischen Körper lieferten tangential zu den Seitenflächen verlaufende, in einer Schneide zusammen-treffende Zylinderflächen besonders günstige Ergebnisse. So ergab der Versuchskörper II f, dessen Zylinderflächen die Bahn-richtung unter 40° schneiden, eine Verminderung des Luft-widerstandes im Vergleich zu dem Widerstande der quadra-tischen ebenen Endfläche wie

$$\frac{0,306}{0,582} = 0,526,$$

während symmetrisch zur Mitte angeordnete Keilflächen, deren Ebenen die Bahnrichtung unter 30° schneiden, sowie aus gleichseitigen Dreiecken gebildete Pyramiden nur Widerstands-verminderungen im Verhältnis wie

$$\frac{0,377}{0,582} = 0,65 \quad \text{bez.} \quad \frac{0,36}{0,582} = 0,62$$

zeigen.

Zu den gleichen Versuchsergebnissen gelangte man, wenn die Achsen derselben Zylinderflächen das eine Mal senkrecht, das andere Mal wagrecht angeordnet wurden, oder wenn die Schneiden der Keilflächen senkrecht oder wagrecht gestellt wurden.

Bei rechteckigen ebenen Endflächen wuchs der Luftwider-stand der Flächeneinheit. Es wurden deshalb mit den Körpern IIIa und IIIb des Verzeichnisses Versuche angestellt.

Der Querschnitt F des ersteren betrug rechtwinklig zur Bahn $F = 0,015 \text{ qm}$, wobei die eine Rechteckseite 1,5mal so lang war als die andere.

Der Querschnitt F des zweiten betrug rechtwinklig zur Bahn $F = 0,059$, wobei die eine Rechteckseite doppelt so lang war als die andere.

Bezeichnen wir die kurze Rechteckseite mit a , die lange Seite mit b , so ergab sich bei beiden Versuchen für den mittleren Teil der Fläche $(b - a)a$ eine Widerstandsziffer $K_1 = 0,83$, wenn für die Flächen $2 \cdot a \cdot a/2$ oder a^2 der für die quadratische Fläche gefundene Wert $K = 0,582$ unverändert beibehalten wird.

Fig. 4.

Der Luftwiderstand eines Prismas mit rechteckigem Querschnitte und ebenen Endflächen mit den Rechteckseiten a und b bestimmt sich daher durch den Ausdruck

$$\frac{\gamma}{g} (0,582 a^2 + 0,83 (b - a) a) v^2.$$

Bei diesen Pendelbewegungen spielt die Lagerreibung eine nur geringe Rolle. Sie hängt von dem Gewichte des Pendels und seinem Schwingungswege ab. Das Verhältnis der Reibungsarbeit zu der von der Schwerkraft verrichteten Arbeit ist bei gleichem Pendelgewichte daher um so größer, je größer die Zahl der Pendelschwingungen bei gleicher Fallhöhe ist. Daher verhielt sich z. B. die Lagerreibungsarbeit zur Schwerkraftsarbeit bei den Versuchskörpern mit kreisförmigem Querschnitte, und zwar

bei Ia wie 1:287,

bei Id wie 1:177;

bei den Versuchskörpern mit quadratischem Querschnitte, und zwar

bei IIa wie 1:292,

bei IIc wie 1:269.

Abgesehen von einzelnen Versuchen mit großen Querschnittsflächen und dementsprechend kleinen Schwingungszahlen, bei denen die Lagerreibung erheblich kleiner ausfällt, liegt das Verhältnis der Lagerreibung zur Schwerkraftsarbeit des Pendels bei allen übrigen Versuchen innerhalb der durch obige Zahlen festgelegten Grenzen.

Bei diesen Pendelversuchen haben wir es also auf der

einen Seite mit dem Luftwiderstande, auf der anderen Seite mit der Differenz der genau bestimmbaren vom Pendelgewichte verrichteten Schwerkraftsarbeit und der ebenfalls genau bestimmbaren und noch dazu nur kleinen Reibungsarbeit in den Lagern zu tun, so daß die hier beschriebenen Versuche eine große Genauigkeit haben erreichen lassen und der hier eingeschlagene Weg eine weitere Klärung der noch wenig erforschten Luftwiderstandsgesetze erwarten läßt.

Hannover, Dezember 1904.

(Eingegangen 3. Januar 1905.)