III. *Brechung und Zurückwerfung des Lichts unter der Voraussetzung, daß das Licht in der Polarisationssebene schwinde; von Dr. Zech.*

1. **D**ie Frage, ob das Licht in oder senkrecht zur Polarisationssebene schwinde, liefse sich dadurch zu Gunsten der einen Annahme lösen, daß man Lichterscheinungen nachweist, welche sich nach der anderen Annahme nicht erklären würden. Als solche Lichterscheinung wird die elliptische Polarisation des Lichts bei der Zurückwerfung geltend gemacht (vergleiche »die Fortschritte der Physik im Jahr 1856« S. 793 u. ff.) Die Resultate von Holtzmann aus dem von Stokes angegebenen Beugungsversuch (Pogg. Ann. Bd. 99, S. 446) werden noch nicht als entscheidend angesehen, ebenso wenig der Einwand Neumann's, daß man nach Fresnel's Annahme in demselben Mittel verschieden dichten Aether annehmen müßte. Es mag daher am Platze seyn, Formeln aufzustellen, welche unter der Annahme Neumann's die elliptische Polarisation erklären. Durch Mittheilungen von Prof. Holtzmann bin ich im Stande dieß zu thun.

Die folgende Untersuchung beschränkt sich auf eine unkrystallinische planparallele Platte, und es liegen ihr folgende Voraussetzungen zu Grunde:

a. Die Verschiebungen in der Gränzfläche zweier Mittel, welche sich aus den Bewegungen im einen oder im andern Mittel ergeben, haben gleiche Größe und Richtung.

b. Die Spannungen in der Gränzfläche zweier Mittel, welche sich aus den Bewegungen im einen oder im andern Mittel ergeben, haben gleiche Größe und Richtung.

c. Der Aether gleicht den tropfbar flüssigen Körpern darin, daß die Kraft, welche eine Verschiebung mit Verdichtung hervorbringt, außerordentlich vielmal größer ist als die, welche eine Verschiebung von ähnlicher Größe ohne Verdichtung giebt, d. h. daß die durch Transversalschwin-

gungen hervorgerufenen Longitudinalschwingungen gegen jene vernachlässigt werden können. Die Dichtigkeit des Aethers ist überall gleich, die Elasticität verschieden in verschiedenen Mitteln.

2. Ich nehme ein rechtwinkliges Coordinatensystem, in welchem eine Gränzfläche der planparallelen Platte Ebene der yz ist; die andere habe die Gleichung:

$$x = +d$$

wobei also d die Dicke der Platte ist. Im ersten Mittel, für welches $x > d$ ist, falle eine ebene Welle parallel zur Axe der z ein. Die Bewegungen in der Wellenebene werden nach den drei Axen zerlegt, die Componenten mit ξ , η , ζ bezeichnet.

Als positive Richtung der Schwingungen parallel mit der Axe der z wähle ich die Richtung der positiven Axe der z , als positive Richtung der Schwingungen senkrecht zur Axe der z diejenige Richtung, welche parallel durch den Ursprung gelegt in den Winkel der positiven Axe der x und der negativen Axe der y hineingeht.

Schneidet die einfallende Welle ursprünglich die positive Axe der x und die positive Axe der y , und bildet ein einfallender Strahl den Winkel α mit der Axe der x , so hat man:

$$\zeta = s \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\lambda} \right) - f \right]$$

$$\xi = \sigma \sin \alpha \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\lambda} \right) - \varphi \right]$$

$$\eta = -\sigma \cos \alpha \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\lambda} \right) - \varphi \right]$$

wo s und σ die Amplituden der Schwingungen parallel und senkrecht zur Axe der z , die zugehörigen Phasen f und φ sind; die andern Beziehungen sind die gewöhnlichen: t die Zeit, τ die Schwingungsdauer, λ die Wellenlänge, (x, y) ein beliebiger Punkt der betrachteten Wellenebene.

Um dieselben Componenten für die zurückgeworfenen Wellenebenen zu finden, darf man nur $\pi - \alpha$ statt α setzen und den Amplituden und Phasen einen besonderen Index

geben. Bei der gebrochenen Wellenebene erhält man dieselben Ausdrücke, aber wieder mit besonderem Index bei den Phasen, Amplituden, der Wellenlänge und dem Winkel α ; ebenso bei der im zweiten Mittel zurückgeworfenen und der ins dritte Mittel gebrochenen Wellenebene.

3. Ich betrachte zuerst die Bewegungen *normal* zur Einfallsebene, also parallel zur Axe der z . Man hat für die fünf Wellenebenen:

$$\begin{aligned} \text{erstes Mittel:} \quad & \left\{ \begin{aligned} \zeta &= s \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\lambda} \right) - f \right] \\ \zeta_0 &= s_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{x} - \frac{x \cos \alpha - y \sin \alpha}{\lambda} \right) - f_0 \right] \end{aligned} \right. \\ \text{zweites Mittel:} \quad & \left\{ \begin{aligned} \zeta' &= s' \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x \cos \alpha' + y \sin \alpha'}{\lambda'} \right) - f' \right] \\ \zeta_1 &= s_1 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x \cos \alpha' - y \sin \alpha'}{\lambda'} \right) - f_1 \right] \end{aligned} \right. \\ \text{drittes Mittel:} \quad & \zeta'' = s'' \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{\lambda''} \right) - f'' \right] \end{aligned}$$

wobei der Index oben bei der gebrochenen, der Index unten bei der zurückgeworfenen Welle gebraucht wird.

Zwischen diesen Verschiebungen müssen folgende Beziehungen stattfinden;

nach 1. a.

$$\left. \begin{aligned} \text{für } x=0: \quad & \zeta'' = \zeta' + \zeta_1 \\ \text{für } x=d: \quad & \zeta'' + \zeta_1 = \zeta + \zeta_0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

nach 1. b, wenn $BB'B''$ die Elasticitätscoefficienten der drei Mittel für transversale Verschiebungen sind:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } x=0: \quad & B'' \frac{d\zeta''}{dx} = B' \left(\frac{d\zeta'}{dx} + \frac{d\zeta_1}{x} \right) \\ \text{für } x=d: \quad & B' \left(\frac{d\zeta'}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dx} \right) = B \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\zeta_0}{dx} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und diese vier Gleichungen gelten für jedes beliebige y und jedes beliebige t . Unter den Phasen läßt sich eine beliebig annehmen, ich setze $f'' = 0$.

Die erste der Gleichungen (1) giebt:

$$s'' \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{y \sin \alpha''}{\lambda''} \right) = (s' \cos f' + s_1 \cos f_1) \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{y \sin \alpha'}{\lambda'} \right) \\ + (s' \sin f' + s_1 \sin f_1) \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{y \sin \alpha'}{\lambda'} \right)$$

Da eine der Amplituden nur in besonderen Fällen verschwinden kann, so ist diese Gleichung für jedes t und jedes y nur möglich, wenn:

$$\frac{\sin \alpha''}{\lambda''} = \frac{\sin \alpha'}{\lambda'}$$

und ebenso giebt die zweite die Gleichungen (1)

$$\frac{\sin \alpha'}{\lambda'} = \frac{\sin \alpha}{\lambda}$$

womit das gewöhnliche *Brechungsgesetz* ausgesprochen ist.

Setzt man nun:

$$\frac{t}{\tau} + \frac{y \sin \alpha''}{\lambda''} = \frac{t}{\tau} + \frac{y \sin \alpha'}{\lambda'} = \frac{t}{\tau} + \frac{y \sin \alpha}{\lambda} = K$$

so erhält man:

$$\zeta = s \cos \left[2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha}{\lambda} \right) - f \right]$$

$$\zeta_0 = s_0 \cos \left[2\pi \left(K - \frac{x \cos \alpha}{\lambda} \right) - f_0 \right]$$

$$\zeta' = s' \cos \left[2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha'}{\lambda'} \right) - f' \right]$$

$$\zeta = s_1 \cos \left[2\pi \left(K - \frac{x \cos \alpha'}{\lambda'} \right) - f_1 \right]$$

$$\zeta'' = s'' \cos 2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha''}{\lambda''} \right)$$

Da die Dichte des Aethers gleich bleibt, so ist:

$$B : B' : B'' = \lambda^2 : \lambda'^2 : \lambda''^2 = \sin^2 \alpha : \sin^2 \alpha' : \sin^2 \alpha'' \\ = \lambda \sin \alpha : \lambda' \sin \alpha' : \lambda'' \sin \alpha''.$$

Man kann also in den Gleichungen (2) die B durch $\lambda \sin \alpha$ ersetzen.

Man erhält nun, da die Gleichungen (1) und (2) für jedes beliebige K gelten:

für $x = 0$:

$$s'' = s_1 \cos f_1 + s' \cos f' \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$0 = s_1 \sin f_1 + s' \sin f' \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$s'' \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha'} = s_1 \cos f_1 - s' \cos f' \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$0 = s_1 \sin f_1 - s' \sin f' \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

aus (4) und (6) folgt:

$$f_1 = f' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und mit Hülfe dieser Werthe aus (3) und (5).

$$s_1 = \frac{s''}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha'}\right) \quad . \quad (8) \quad s' = \frac{s''}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha'}\right) \quad . \quad (9)$$

Mit Benutzung dieser Werthe erhält man ferner, wenn man:

$$\frac{2\pi d \cos \alpha}{\lambda} = \gamma \quad . \quad (10) \quad \frac{2\pi d \cos \alpha'}{\lambda'} = \gamma' \quad . \quad (11)$$

setzt, für $x=d$, aus den letzten Gleichungen (1) und (2), da sie für jedes K gelten:

$$\begin{aligned} s'' \cos \gamma' &= s_0 \cos (\gamma + f_0) + s \cos (\gamma - f) \\ - s'' \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha'} \sin \gamma' &= s_0 \sin (\gamma + f_0) - s \sin (\gamma - f) \\ - s'' \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha'} \cos \gamma' &= s_0 \cos (\gamma + f_0) - s \cos (\gamma - f) \\ + s'' \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha} \sin \gamma' &= s_0 \sin (\gamma + f_0) + s \sin (\gamma - f) \end{aligned}$$

und aus diesen vier Gleichungen ergibt sich:

$$s \cos (\gamma - f) = \frac{s''}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha}\right) \cos \gamma' \quad . \quad (12)$$

$$s \sin (\gamma - f) = \frac{s''}{2} \left(\frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha'}\right) \sin \gamma' \quad (13)$$

$$s_0 \cos (\gamma + f_0) = \frac{s''}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha}\right) \cos \gamma' \quad . \quad (14)$$

$$s_0 \sin (\gamma + f_0) = \frac{s''}{2} \left(\frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha'}\right) \sin \gamma' \quad (15)$$

Die Gleichungen (12) bis (15) geben die Beziehungen zwischen der im ersten Mittel einfallenden und zurückgeworfenen und der ins dritte Mittel gebrochenen Welle.

Die Gleichungen (7) bis (9) geben die Beziehungen zwischen der einfallenden, zurückgeworfenen und gebrochenen Welle an der Gränze zweier Mittel. Sie stimmen mit Fresnel's Formeln für Licht, das senkrecht zur Einfall-

ebene polarisirt ist, überein. Das zurückgeworfene Licht wird Null, wenn:

$$\sin 2\alpha'' = \sin 2\alpha', \text{ oder } \alpha'' + \alpha' = \frac{\pi}{2}$$

worin das Brewster'sche Gesetz für den *Polarisationswinkel* liegt. Ist $\sin 2\alpha'' > \sin 2\alpha'$, so wird l. negativ. Wollte man den Amplituden nur absolute Werthe geben, so heisst diefs: die Phase hat um π zugenommen oder abgenommen, da die Gleichungen (4) und (6) auch durch $f_1 = \pm \pi$ befriedigt werden.

4. Für die Bewegungen in der Einfallsebene hat man:

$$\text{erstes Mittel: } \begin{cases} \xi = \sigma \sin \alpha \cos \left[2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha}{\lambda} \right) - \varphi \right] \\ \eta = -\sigma \cos \alpha \cos \left[2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha}{\lambda} \right) - \varphi \right] \\ \xi_0 = \sigma_0 \sin \alpha \cos \left[2\pi \left(K - \frac{x \cos \alpha}{\lambda} \right) - \varphi_0 \right] \\ \eta_0 = \sigma_0 \cos \alpha \cos \left[2\pi \left(K - \frac{x \cos \alpha}{\lambda} \right) - \varphi_0 \right] \end{cases}$$

$$\text{zweites Mittel: } \begin{cases} \xi' = \sigma' \sin \alpha' \cos \left[2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha'}{\lambda'} \right) - \varphi' \right] \\ \eta' = -\sigma' \cos \alpha' \cos \left[2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha'}{\lambda'} \right) - \varphi' \right] \\ \xi_1 = \sigma_1 \sin \alpha' \cos \left[2\pi \left(K - \frac{x \cos \alpha'}{\lambda'} \right) - \varphi_1 \right] \\ \eta_1 = \sigma_1 \cos \alpha' \cos \left[2\pi \left(K - \frac{x \cos \alpha'}{\lambda'} \right) - \varphi_1 \right] \end{cases}$$

$$\text{drittes Mittel: } \begin{cases} \xi'' = \sigma'' \sin \alpha'' \cos 2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha''}{\lambda''} \right) \\ \eta'' = -\sigma'' \cos \alpha'' \cos 2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha''}{\lambda''} \right) \end{cases}$$

wo wieder die letzte Phase der Null gleich genommen wurde. Dazu kämen noch die longitudinalen Schwingungen, die an der Gränze je zweier Mittel entstehen. Der Bedingung 1^e müssen nach 1^e die Transversalschwingungen für sich genügen; man hat also für $x=0$:

$$\xi'' = \xi_1 + \xi', \quad \eta'' = \eta_1 + \eta'$$

und für $x = d$:

$$\xi_1 + \xi' = \xi_0 + \xi, \quad \eta_1 + \eta' = \eta_0 + \eta$$

Diese vier Gleichungen gelten für jeden Werth von K , geben also acht Gleichungen, welche die Transversalschwingungen vollkommen bestimmen. Die Bedingung 1^o gäbe acht weitere Gleichungen zur Bestimmung der vorkommenden Longitudinalschwingungen; da sie aber nicht beobachtet werden können, berücksichtige ich sie nicht weiter.

Die Gleichheit der Verschiebungen gilt für $x = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma'' \sin \alpha'' &= (\sigma_1 \cos \varphi_1 + \sigma' \cos \varphi') \sin \alpha' \\ 0 &= \sigma_1 \sin \varphi_1 + \sigma' \sin \varphi' \\ -\sigma'' \cos \alpha'' &= (\sigma_1 \cos \varphi_1 - \sigma' \cos \varphi') \cos \alpha' \\ 0 &= \sigma_1 \sin \varphi_1 - \sigma' \sin \varphi' \end{aligned}$$

woraus:

$$\varphi_1 = \varphi' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\sigma' = \frac{\sigma''}{2} \left(\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} + \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha'} \right) = \sigma'' \frac{\sin(\alpha'' + \alpha')}{\sin 2\alpha'} \quad . \quad (17)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma''}{2} \left(\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} - \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha'} \right) = \sigma'' \frac{\sin(\alpha'' - \alpha')}{\sin 2\alpha'} \quad . \quad (18)$$

und mit Benutzung dieser Werthe giebt die Gleichheit der Verschiebungen für $x = d$ [γ und γ' in der Bedeutung von (10) und (11)]:

$$\sigma_0 \cos(\gamma + \varphi_0) + \sigma \cos(\gamma - \varphi) = \frac{\sigma''}{2} \frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha} \cos \gamma'$$

$$\sigma_0 \sin(\gamma + \varphi_0) - \sigma \sin(\gamma - \varphi) = -\frac{\sigma''}{2} \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha'} \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \sin \gamma'$$

$$\sigma_0 \cos(\gamma + \varphi_0) - \sigma \cos(\gamma - \varphi) = -\frac{\sigma''}{2} \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \cos \gamma'$$

$$\sigma_0 \sin(\gamma + \varphi_0) + \sigma \sin(\gamma - \varphi) = \frac{\sigma''}{2} \frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \sin \gamma'$$

woraus:

$$\sigma_0 \cos(\gamma + \varphi_0) = \frac{\sigma''}{2} \cos \gamma' \left(\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\sigma_0 \sin(\gamma + \varphi_0) = \frac{\sigma''}{2} \sin \gamma' \left[\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha'} \right] \quad (20)$$

$$\sigma \cos(\gamma - \varphi) = \frac{\sigma''}{2} \cos \gamma' \left(\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\sigma \sin(\gamma - \varphi) = \frac{\sigma''}{2} \sin \gamma' \left[\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha'} \right] \quad (22)$$

Die Formeln (16) bis (18) geben die Beziehungen zwischen der einfallenden, zurückgeworfenen und gebrochenen Wellenebene an der Gränze zweier Mittel, die Formeln (19) bis (22) die Beziehungen zwischen der im ersten Mittel einfallenden und zurückgeworfenen und der ins dritte Mittel gebrochenen Wellenebene. Die Formeln (16) und (18) stimmen mit Fresnel's Formeln für das in der Einfallsebene polarisirte Licht.

5. Die Formeln (12) bis (15) und (19) bis (22) nehmen eine für die Rechnung bequemere Form an, wenn man folgende Hilfsgrößen einführt:

$$\operatorname{tg} m = \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha} \quad . \quad (25) \quad \operatorname{tg} n = \frac{\sin 2\alpha''}{\sin 2\alpha'} \quad . \quad . \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad . \quad (27) \quad \operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{tg} \alpha''}{\operatorname{tg} \alpha'} \quad , \quad . \quad . \quad (28)$$

Aus den Formeln (12) bis (15) wird dann:

$$s \cos(\gamma - f) = s'' \cos \gamma' \frac{\cos(m-n)}{2 \cos m \cos n}$$

$$s \sin(\gamma - f) = s'' \sin \gamma' \frac{\sin(m+n)}{2 \cos m \cos n}$$

$$s_0 \cos(\gamma + f_0) = s'' \cos \gamma' \frac{\cos(m+n)}{2 \cos m \cos n}$$

$$s_0 \sin(\gamma + f_0) = s'' \sin \gamma' \frac{\sin(m-n)}{2 \cos m \cos n}$$

und aus den Formeln (19) bis (22):

$$\sigma \cos(\gamma - \varphi) = \sigma'' \cos \gamma' \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{\cos(\mu - \nu)}{2 \cos \mu \cos \nu}$$

$$\sigma \sin(\gamma - \varphi) = \sigma'' \sin \gamma' \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{\sin(\mu + \nu)}{2 \cos \mu \cos \nu}$$

$$\sigma_0 \cos(\gamma + \varphi_0) = -\sigma'' \cos \gamma' \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{\cos(\mu + \nu)}{2 \cos \mu \cos \nu}$$

$$\sigma_0 \sin(\gamma + \varphi_0) = -\sigma'' \sin \gamma' \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{\sin(\mu - \nu)}{2 \cos \mu \cos \nu}$$

In der Regel wird jedoch s und σ gegeben seyn außer

den Winkeln α , α' und α'' ; dann findet man das Uebrige durch folgende Formeln:

$$\operatorname{tg}(\gamma - f) = \operatorname{tg} \gamma' \frac{\sin(m+n)}{\cos(m-n)} \quad . \quad . \quad (29)$$

$$\operatorname{tg}(\gamma + f_0) = \operatorname{tg} \gamma' \frac{\sin(m-n)}{\cos(m+n)} \quad . \quad . \quad (30)$$

$$s'' = s \frac{2 \cos m \cos n}{\cos(m-n)} \frac{\cos(\gamma-f)}{\cos \gamma'} = s \frac{2 \cos m \cos n}{\sin(m+n)} \frac{\sin(\gamma-f)}{\sin \gamma'} \quad (31)$$

$$s_0 = s \frac{\cos(m+n)}{\cos(m-n)} \frac{\cos(\gamma-f)}{\cos(\gamma+f_0)} = s \frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)} \frac{\sin(\gamma-f)}{\sin(\gamma+f_0)} \quad (32)$$

$$\operatorname{tg}(\gamma - \varphi) = \operatorname{tg} \gamma' \frac{\sin(\mu+\nu)}{\cos(\mu-\nu)} \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

$$\operatorname{tg}(\gamma + \varphi_0) = \operatorname{tg} \gamma' \frac{\sin(\mu-\nu)}{\cos(\mu+\nu)} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \sigma \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha''} \frac{2 \cos \mu \cos \nu}{\cos(\mu-\nu)} \frac{\cos(\gamma-\varphi)}{\cos \gamma'} \\ &= \sigma \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha''} \frac{2 \cos \mu \cos \nu}{\sin(\mu+\nu)} \frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin \gamma'} \quad . \quad . \quad (35) \end{aligned}$$

$$\sigma_0 = -\sigma \frac{\cos(\mu+\nu)}{\cos(\mu-\nu)} \frac{\cos(\gamma-\varphi)}{\cos(\gamma+\varphi_0)} = -\sigma \frac{\sin(\mu-\nu)}{\sin(\mu+\nu)} \frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin(\gamma+\varphi_0)} \quad (36)$$

Die Formeln (29) bis (36) liegen allen folgenden zu Grunde.

6. Die Formeln (7) bis (9) und (16) bis (18) geben Fresnel's Formeln wieder für die Brechung und Zurückwerfung des Lichts an der Gränze zweier Mittel. Es liegt in der Natur der Sache, anzunehmen, daß die Aenderung von λ oder α an der Gränze nicht plötzlich erfolge, sondern daß ein allmählicher Uebergang stattfinde. Einem solchen stetigen Uebergang wird wenigstens einigermassen genügt, wenn man zwischen die zwei verschiedenen Mittel eine Schicht einschaltet von sehr geringer Dicke, welche in ihren optischen Eigenschaften die Mitte zwischen beiden hält. Zu diesem Zweck lassen sich unmittelbar die Formeln (29) bis (36) benutzen, wenn man d sehr klein nimmt im Verhältniß zu λ . Nur ist eine Annahme zu machen über den Winkel α' in der Uebergangsschicht.

Da es sich darum handelt, Resultate zu erhalten, die

mit den Beobachtungen Jamin's (Pogg. Ann. Ergänzungsband 3, S. 263) verglichen werden können, so wählte ich beispielsweise die Beobachtungen am Flintglas. Ich bestimmte den Werth von γ' aus dem Verhältniß der Amplituden des in und senkrecht zu der Einfallsebene schwingenden und unter dem Polarisationswinkel zurückgeworfenen Lichts oder aus dem von Jamin beobachteten Werth von K . (Die Dicke der Uebergangsschicht ergibt sich daraus: $d = 0,0143 \lambda'$.) Ferner setzte ich α' dem arithmetischen Mittel aus α und α'' gleich.

Ich finde dann nach Jamin's Bezeichnung:

Incidenz	$\frac{\delta}{\pi}$		Differenz	ω				Differenz
	beob.	berech.		beob.	berech.	beob.	berech.	
53	1,026	1,028	+ 0,002	10°	5'	10°	5'	0'
54	1,036	1,034	— 0,002	8	27	8	40	+ 13
55	1,039	1,042	+ 0,003	7	0	7	12	+ 12
56	1,043	1,054	+ 0,011	5	26	5	43	+ 17
57	1,064	1,074	+ 0,010	4	3	4	17	+ 14
58	1,108	1,113	+ 0,005	2	45	2	52	+ 7
59	1,217	1,232	+ 0,015	1	30	1	32	+ 2
60	1,640	1,630	— 0,010	1	13	1	8	— 5
61	1,877	1,842	— 0,035	2	45	2	12	— 33
62	1,923	1,906	— 0,017	4	5	3	39	— 26
63	1,939	1,933	— 0,006	5	46	5	10	— 36
64	1,947	1,948	+ 0,001	7	5	6	43	— 22

Man sieht, daß Beobachtung und Berechnung so gut stimmt, als dies bei Cauchy's Formeln der Fall ist.

Der Umstand, daß starke elliptische Polarisation bei großen Brechungsquotienten sich findet, hing dann damit zusammen, daß bei stärkerer Brechung eine dickere Uebergangsschicht nöthig ist, als bei schwacher Brechung.

Die Formeln (29) bis (36) geben unter allen Umständen, wenn α von 0 bis 90° zunimmt, eine Zunahme der Differenz der Phase des *senkrecht* zur Einfallsebene schwingenden Lichts und der Phase des *in* der Einfallsebene schwin-

genden. Diefes ist die von Jamin »positiv« genannte Reflexion. Um die negative Reflexion zu erklären, müßte in den obigen Formeln $\operatorname{tg} \gamma'$ auch negativ seyn können, was bei dem Werth von γ' nicht wohl denkbar ist, so lange d sehr klein bleibt. (Die absoluten Werthe stimmen z. B. bei Wasser so gut mit den Beobachtungen, wie die nach Cauchy's Formeln berechneten.) Aber auch die Erklärung Jamin's für die negative Reflexion hat, glaube ich, sehr wenig Wahrscheinlichkeit für sich.

7. Nimmt man an, das dritte Mittel sey dasselbe wie das erste, so ist:

$$\alpha'' = \alpha$$

$$n = \frac{1}{2}\pi - m \quad v = \frac{1}{2}\pi - \mu$$

und die Formeln (29) bis (36) werden jetzt:

$$\operatorname{tg}(\gamma - f) = \frac{\operatorname{tg} \gamma'}{\sin 2m} \quad \operatorname{tg}(\gamma + f_0) = \infty$$

$$s'' = s \frac{\cos(\gamma - f)}{\cos \gamma'} \quad s_0 = -s \cos 2m \sin(\gamma - f)$$

$$\operatorname{tg}(\gamma - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \gamma'}{\sin 2\mu} \quad \operatorname{tg}(\gamma + \varphi_0) = \infty$$

$$\sigma'' = \sigma \frac{\cos(\gamma - \varphi)}{\cos \gamma'} \quad \sigma_0 = \sigma \cos 2\mu \sin(\gamma - \varphi)$$

oder wenn man die Amplituden bloß als Functionen von γ' , m und μ will:

$$s'' = s \frac{\sin 2m}{\cos \gamma' \sqrt{\sin^2 2m + \operatorname{tg}^2 \gamma'}} \quad s_0 = -s \cos 2m \frac{\operatorname{tg} \gamma'}{\sqrt{\sin^2 2m + \operatorname{tg}^2 \gamma'}}$$

$$\sigma'' = \sigma \frac{\sin 2\mu}{\cos \gamma' \sqrt{\sin^2 2\mu + \operatorname{tg}^2 \gamma'}} \quad \sigma_0 = \sigma \cos 2\mu \frac{\operatorname{tg} \gamma'}{\sqrt{\sin^2 2\mu + \operatorname{tg}^2 \gamma'}}$$

Die Amplituden sind Functionen von

$$\gamma' = \frac{2\pi d \cos \alpha'}{\lambda'}$$

Es ergeben sich darnach zwei wesentlich verschiedene Erscheinungen, je nachdem d im Verhältniß zu λ' sehr groß ist oder nicht, oder je nachdem das zweite Mittel eine dicke oder dünne Platte ist. Bei dicken Platten wird eine kleine Aenderung von α' oder λ' genügen, damit $\frac{2d \cos \alpha'}{\lambda'}$

um eine halbe Einheit zunehme oder $\operatorname{tg} \gamma'$ alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufe, also die Amplituden ihre Maxima und Minima erreichen. Bei dünnen Platten ist eine bedeutende Aenderung von α' oder λ' nöthig, damit $\operatorname{tg} \gamma'$ alle möglichen Werthe annehme.

Bei *dünnen* Platten wird das reflectirte Licht Null, wenn $s_0 = 0$ und $\sigma_0 = 0$ und dies ist der Fall für $\operatorname{tg} \gamma' = 0$ oder:

$$d \cos \alpha' = K \cdot \frac{\lambda'}{2}$$

wo K eine beliebige ganze Zahl ist. Es ist dies das bekannte Gesetz für Newton's Ringe. Dann ist:

$$\gamma - f = \gamma - \varphi = 0$$

und:

$$s'' = s, \quad \sigma'' = \sigma$$

die Amplitude und Phase des durchgelassenen Lichtes ist gleich den des einfallenden.

Das zurückgeworfene Licht wird ein Maximum, wenn $\operatorname{tg} \gamma' = \infty$. Dann ist:

$$\begin{aligned} s'' &= s \sin 2m & s_0 &= -s \cos 2m \\ \sigma'' &= \sigma \sin 2\mu & \sigma'' &= \sigma \cos 2\mu \end{aligned}$$

$$d \cos \alpha' = (2K + 1) \frac{\lambda'}{4}.$$

Fällt natürliches Licht ein, so ist $s = \sigma$, das zurückgeworfene und durchgelassene Licht ist theilweise polarisirt, und es sind die Intensitäten des zurückgeworfenen und durchgelassenen polarisirten Lichtes gleich, weil:

$$\begin{aligned} s_0^2 - \sigma_0^2 &= s^2 (\cos^2 2m - \cos^2 2\mu) \\ &= s^2 (\sin^2 2\mu - \sin^2 2m) = \sigma''^2 - s''^2 \end{aligned}$$

Arago hat dieses Gesetz aufgestellt (*Oeuvres* T. 10, p. 14 et 15).

Für den Polarisationswinkel ist $m = 45^\circ$, also $s'' = s$ und $s_0 = 0$, d. h. das senkrecht zur Einfallsebene schwingende Licht wird nicht zurückgeworfen, sondern ganz durchgelassen (Arago an derselben Stelle).

Fällt natürliches Licht ein, so ist $s^2 = \sigma^2 = \frac{1}{2}$, wenn die Intensität des einfallenden Lichtes zur Einheit genommen wird. Dann ergibt sich:

$$s''^2 + \sigma''^2 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 2m}{\sin^2 2m + \operatorname{tg}^2 \gamma'} (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma') + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 2\mu}{\sin^2 2\mu + \operatorname{tg}^2 \gamma'} (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma')$$

$$s_0'^2 + \sigma_0'^2 + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 2m}{\sin^2 2m + \operatorname{tg}^2 \gamma'} \operatorname{tg}^2 \gamma' + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 2\mu}{\sin^2 2\mu + \operatorname{tg}^2 \gamma'} \operatorname{tg}^2 \gamma'$$

woraus:

$$s''^2 + \sigma''^2 + s_0'^2 + \sigma_0'^2 = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma'}{\sin^2 2m + \operatorname{tg}^2 \gamma'} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 2m}{\sin^2 2m + \operatorname{tg}^2 \gamma'} \\ + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma'}{\sin^2 2\mu + \operatorname{tg}^2 \gamma'} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 2\mu}{\sin^2 2\mu + \operatorname{tg}^2 \gamma'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

d. h. die Farbenerscheinungen dünner Platten in zurückgeworfenem und durchgelassenem Licht sind complementar (Arago, *Oeuvres* T. 10, p. 14).

8. Bei dicken Platten, wo d sehr groß gegen λ' ist, sieht man Newton's Ringe weder bei homogenem noch bei weißem Licht. Diefes rührt daher, daß die Aenderung von γ' sehr schnell vor sich geht, während α' und λ' nur langsam sich ändern. Hat man homogenes Licht, d. h. ist λ' constant, so liegen Ringe von entgegengesetzten Intensitäten so nahe an einander, daß das Auge die einzelnen nicht mehr unterscheiden kann; hat man weißes Licht, so fallen außerdem bei constantem α' Ringe von sehr wenig verschiedener Farbe auf einander, der eine mit der größten, der andere mit der kleinsten Intensität.

Ist z. B. $d = 1^{\text{mm}}$, $\lambda' = 0,0005^{\text{mm}}$, so ändert sich

$$\frac{2d \cos \alpha'}{\lambda'} = 4000 \cdot \cos \alpha'$$

um eine Einheit, wenn $\cos \alpha'$ um $\frac{1}{4000}$ seines Werths sich ändert, was im ungünstigsten Fall ($\alpha' = 90^\circ$) eine Aenderung von nicht ganz einer Minute ausmacht: man würde also innerhalb eines Schwinkels von einer Minute einen hellen und einen dunkeln Ring sehen.

Ist dagegen α' constant, so ändert sich jener Ausdruck um eine Einheit, wenn λ' bei senkrechter Incidenz um $0,0000001^{\text{mm}}$ zunimmt, bei $\alpha' = 89^\circ$ um $0,000017$, bei streifender Incidenz um seine eigene Größe. Abgerechnet dieser äußersten Fälle wird also λ' immer in den Gränzen derselben Farbe für das Auge bleiben.

Daraus ergibt sich, daß man bei dicken Platten das einfache Licht in Lichtbündel abtheilen kann, innerhalb welcher γ' von einem Vielfachen von 2π zum nächsten zunimmt, und deren Intensität als das arithmetische Mittel der Intensitäten aller einzelnen Strahlen mit den verschiedenen Werthen von γ' sich betrachten läßt. Denkt man sich diese Intensitäten als Ordinaten einer Curve, je zwei in dem unendlich kleinen Abstand $d\gamma'$ von einander, und quadriert man diese Curve, so wird das Resultat die mittlere Intensität multiplicirt mit einer Constanten seyn.

Man hat nun für die Intensität eines *einfallenden* Lichtbündels, wo s und σ constant ist:

$$\int_{2K\pi}^{2(K+1)\pi} s^2 d\gamma' = 2\pi s^2, \quad \int_{2K\pi}^{2(K+1)\pi} \sigma^2 d\gamma' = 2\pi \sigma^2$$

für die Intensität eines *zurückgeworfenen* Lichtbündels:

$$\int_{2K\pi}^{2(K+1)\pi} s_0^2 d\gamma' = s^2, \quad \int_{2K\pi}^{2(K+1)\pi} \cos^2 2m \frac{\text{tg}^2 \gamma'}{\sin^2 2m + \text{tg}^2 \gamma'} d\gamma'$$

m ist Function von α' , also auch von γ' , wenn man homogenes Licht hat: bei weißem Licht kann man für jedes Lichtbündel α' constant nehmen und bloß λ' sich ändern lassen, m ist dann constant. Aber auch bei homogenem Licht wird man m als constant annehmen können, da seine Aenderung innerhalb der Gränzen des Integrals sehr klein ist. Man hat also für beide Fälle, wenn man $\text{tg } \gamma' = x$ setzt:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(\sin^2 2m + x^2)(1+x^2)} &= \int \frac{dx}{(1+x^2)\cos^2 2m} - \text{tg}^2 2m \int \frac{dx}{\sin^2 2m + x^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 2m} \arctg x - \frac{\sin 2m}{\cos^2 2m} \arctg \frac{x}{\sin 2m} \\ &= \frac{\gamma'}{\cos^2 2m} - \frac{\sin 2m}{\cos^2 2m} (\gamma - f) \quad (\text{s. 7.}) \end{aligned}$$

Folglich, da $\gamma - f$ dieselben Gränzen hat, wie γ' :

$$\int_{2K\pi}^{2(K+1)\pi} s_0^2 d\gamma' = s^2 \cdot 2\pi (1 - \sin 2m).$$

Ganz ebenso ergibt sich:

$$\int_{2K\pi}^{2(K+1)\pi} \sigma_0^2 d\gamma' = \sigma^2 \cdot 2\pi (1 - \sin 2\mu)$$

Für die Intensität eines durchgelassenen Lichtbündels hat man:

$$\int_{2K\pi}^{2(K+1)\pi} s''^2 d\gamma' = s^2 \sin^2 2m \int_{2K\pi}^{3(K+1)\pi} \frac{d\gamma'}{\cos^2 \gamma' (\sin^2 2m + \tan^2 \gamma')} = s^2 \cdot 2\pi \sin 2m$$

und ebenso:

$$\int_{2K\pi}^{2(K+1)\pi} \sigma''^2 d\gamma' = \sigma^2 \cdot 2\pi \sin 2\mu$$

Fällt natürliches oder unter dem Azimut 45° polarisirtes Licht ein, so ist $s = \sigma$, und wenn man $2\pi s^2$ zur Einheit der Intensität nimmt, so sind die verschiedenen Intensitäten:

für normal zur Einfallsebene schwingendes Licht:

zurückgeworfen: $1 - \sin 2m$, durchgelassen: $\sin 2m$;

in der Einfallsebene schwingendes Licht:

zurückgeworfen: $1 - \sin 2\mu$, durchgelassen: $\sin 2\mu$.

(Auf dasselbe Resultat kommt man aus den Formeln Neumann's, Pogg. Ann. Bd. 99, S. 240, wenn man für eine Platte die Substitution von r ausführt.)

Da:

$$(1 - \sin 2m) - (1 - \sin 2\mu) = \sin 2\mu - \sin 2m$$

so folgt, dafs bei auffallendem natürlichem Licht die Intensität des polarisirten zurückgeworfenen und durchgelassenen Lichtes gleich ist. (Arago, *Oeuvres* T. 7, p. 323.)

Arago hat die Intensität des an einer planparallelen Glasplatte zurückgeworfenen und durchgelassenen Lichts gemessen (*Oeuvres* T. 10, p. 207), aber ohne den Brechungsquotienten des Glases zu geben. Die sicherste Bestimmung nach der Art der Beobachtung ist die für die gleiche Intensität des zurückgeworfenen und durchgelassenen Lichts bei dem Einfallswinkel $78^\circ 52'$, und es findet sich daraus

nach den obigen Formeln der Brechungsquotient $n=1,497$. Ist das zurückgeworfene Licht das p fache des durchgelassenen, so ist nach den Formeln:

$$(1 - \sin 2m) + (1 - \sin 2\mu) = p (\sin 2m + \sin 2\mu)$$

$$\frac{2}{p+1} = \sin 2m + \sin 2\mu$$

und es ergeben sich folgende Resultate:

Einfallswinkel	p berechnet	p beobachtet von Arago
85° 28'	3,44	4
82 59	1,95	2
78 52	1,00	1
72 43	0,48	0,5
63 32	0,22	0,25

9. Arago und Airy haben beobachtet, daß eine Glaslinse auf einen Metallspiegel geprefst, Ringe erzeugt, die zu beiden Seiten des Polarisationswinkels des Glases complementäre Erscheinungen zeigen, wenn das Licht vorher oder nachher senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, (Pogg. Ann. Bd. 22, S. 611 und Bd. 26, S. 123.)

Auch dies liegt in den Formeln (29) bis (36). An der Berührungsstelle ist $d=0$, also $\gamma'=0$, und von da an nimmt γ' mit d zu. Um zu beurtheilen, ob die Mitte hell oder dunkel sey, handelt es sich nur darum, ob die Intensitäten von $\gamma'=0$ an bei zunehmendem γ' abnehmen oder wachsen. Für dieselben α ändern sich die Amplituden stetig mit γ' und nehmen entweder beständig zu oder beständig ab, wenn γ' von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst. Also wird die Mitte hell oder dunkel, je nachdem die Intensität für $\gamma'=0$ größer oder kleiner ist als die für $\gamma'=\frac{1}{2}\pi$.

Es ist aber, wenn $\left(\frac{s''}{s}\right)_0$ und $\left(\frac{s''}{s}\right)_{\frac{\pi}{2}}$ die Werthe von

$\frac{s''}{s}$ bedeuten für $\gamma'=0$ und $\gamma'=\frac{\pi}{2}$, und ebenso für die übrigen Amplituden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{s''}{s}\right)_0 &= \frac{2 \cos m \cos n}{\cos(m-n)} & \left(\frac{s_0}{s}\right)_0 &= \frac{\cos(m+n)}{\cos(m-n)} \\ \left(\frac{s''}{s}\right)_{\frac{\pi}{2}} &= \frac{2 \cos m \cos n}{\sin(m+n)} & \left(\frac{s_0}{s}\right)_{\frac{\pi}{2}} &= \frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)} \end{aligned}$$

also im zurückgeworfenen Licht, welches senkrecht zur Einfallsebene schwingt:

Ringe mit heller Mitte, wenn $\frac{\cos^2(m+n)}{\cos^2(m-n)} > \frac{\sin^2(m-n)}{\sin^2(m+n)}$
 dunkler

$$\text{oder } (1 - \operatorname{tg}^2 m)(1 - \operatorname{tg}^2 n) \underset{<}{>} 0.$$

Für Glas, Luft, Metall ist $\alpha'' < \alpha < \alpha'$, folglich für klein α :

$$\operatorname{tg} n < 1, \operatorname{tg} m > 1, \text{ dunkle Mitte;}$$

beim Polarisationswinkel des Glases wird $\operatorname{tg} m = 1$, und nachher:

$$\operatorname{tg} n < 1, \operatorname{tg} m < 1, \text{ helle Mitte;}$$

noch später wird auch $\operatorname{tg} n = 1$ werden, und die Mitte wieder dunkel.

Weiter findet man:

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)_0 = \frac{\cos(\mu+\nu)}{\cos(\mu-\nu)} \quad \left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(\mu-\nu)}{\sin(\mu+\nu)}$$

also im zurückgeworfenen Licht, welches in der Einfallsebene schwingt:

Ringe mit heller Mitte, wenn $(1 - \operatorname{tg}^2 \mu)(1 - \operatorname{tg}^2 \nu) \underset{<}{>} 0$
 dunkler

es ist aber unter allen Umständen $\operatorname{tg} \mu > 1$ und $\operatorname{tg} \nu < 1$, also stets dunkle Mitte.

10. Die Formeln (29) bis (36) sind nicht mehr brauchbar, wenn *vollständige Zurückwerfung* eintritt, weil dann, wenn es an der Gränze des zweiten und dritten Mittels geschieht, keine Welle in dem dritten Mittel entsteht. Man hat dann im dritten Mittel für ζ'' , ξ'' , η'' allgemeinere Integrale, als die bisherigen, zu setzen, nämlich:

$$\begin{aligned}\xi'' &= \sigma'' \sin \alpha'' e^{2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha''}{\lambda''} \right) \sqrt{-1}} \\ \eta'' &= \sigma'' \cos \alpha'' e^{2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha''}{\lambda''} \right) \sqrt{-1}} \\ \zeta'' &= s'' e^{2\pi \left(K + \frac{x \cos \alpha''}{\lambda''} \right) \sqrt{-1}}\end{aligned}$$

wobei, wenn n der Brechungsexponent zwischen dem zweiten und dritten Mittel ist,

$$\sin \alpha'' = n \sin \alpha' > 1, \quad \cos \alpha'' = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha'} = \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha' - 1} \cdot \sqrt{-1}.$$

Die reellen Theile dieser Ausdrücke geben die wirklichen Bewegungen; also, wenn $q = \frac{1}{\lambda''} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha' - 1}$ ist.

$$\begin{aligned}\xi'' &= \sigma'' n \sin \alpha' \cdot e^{2\pi q x} \cos 2\pi K \\ \eta'' &= -\sigma'' \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha' - 1} \cdot e^{2\pi q x} \sin 2\pi K \\ \zeta'' &= s'' \cdot e^{2\pi q x} \cos 2\pi K.\end{aligned}$$

Mit diesen Werthen erhält man für *normal* zur Einfallsebene schwingendes Licht:

für $x = 0$, wegen Gleichheit der Verschiebungen und Spannungen:

$$\begin{aligned}s'' &= s_1 \cos f_1 + s' \cos f' & 0 &= s_1 \sin f_1 + s' \sin f' \\ q s'' \frac{\lambda''^2}{\lambda' \cos \alpha'} &= -s_1 \sin f_1 + s' \sin f' & 0 &= s_1 \cos f_1 + s' \cos f'\end{aligned}$$

und daher:

$$s' \cos f' = s_1 \cos f_1 = \frac{s''}{2}, \quad s' \sin f' = -s_1 \sin f_1 = q \frac{s''}{2} \frac{\lambda''^2}{\lambda' \cos \alpha'}$$

also, wenn man den Amplituden nur absolute Werthe giebt:

$$1) \ s' = s_1, \quad 2) \ \operatorname{tg} f' = -\operatorname{tg} f_1 = q \frac{\lambda''^2}{\lambda' \cos \alpha'} = \frac{n \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha' - 1}}{\cos \alpha'}$$

Mit Benutzung dieser Werthe giebt für $x = d$ die Gleichheit der Verschiebungen und Spannungen:

$$\begin{aligned}
2s' \cos(\gamma' - f') &= s \cos(\gamma - f) + s_0 \cos(\gamma + f_0) \\
0 &= -s \sin(\gamma - f) + s_0 \sin(\gamma + f_0) \\
0 &= s \cos(\gamma - f) - s_0 \cos(\gamma + f_0) \\
2s' \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha} \sin(\gamma' - f') &= s \sin(\gamma - f) + s_0 \sin(\gamma + f_0)
\end{aligned}$$

und daraus erhält man:

$$\begin{aligned}
s \cos(\gamma - f) &= s_0 \cos(\gamma + f_0) = s' \cos(\gamma' - f') \\
s \sin(\gamma - f) &= s_0 \sin(\gamma + f_0) = s' \sin(\gamma' - f') \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha}
\end{aligned}$$

also:

$$3) s = s_0, \quad 4) \operatorname{tg}(\gamma - f) = \operatorname{tg}(\gamma + f_0) = \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha} \operatorname{tg}(\gamma' - f'), \quad f_0 = -f.$$

Das auffallende und zurückgeworfene Licht hat gleiche Amplituden und den Phasenunterschied $2f$.

Für das in der Einfallsebene schwingende Licht giebt für $x = 0$ die Gleichheit der Verschiebungen.

$$\begin{aligned}
\sigma'' n \sin \alpha' &= (\sigma_1 \cos \varphi_1 + \sigma' \cos \varphi') \sin \alpha' \\
0 &= \sigma_1 \sin \varphi_1 + \sigma' \sin \varphi' \\
0 &= \sigma_1 \cos \varphi_1 - \sigma' \cos \varphi' \\
-\sigma'' \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha' - 1} &= (\sigma_1 \sin \varphi_1 - \sigma' \sin \varphi') \cos \alpha'
\end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned}
\sigma' \cos \varphi' &= \sigma_1 \cos \varphi_1 = n \frac{\sigma''}{2} \\
\sigma' \sin \varphi' &= -\sigma_1 \sin \varphi_1 = \frac{\sigma''}{2} \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha' - 1}}{\cos \alpha'}
\end{aligned}$$

also:

$$5) \sigma' = \sigma_1, \quad \varphi' = -\varphi_1, \quad 6) \operatorname{tg} \varphi' = \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha' - 1}}{n \cos \alpha'}$$

Vermittelst dieser Werthe erhält man für $x = d$ wegen Gleichheit der Verschiebungen:

$$\begin{aligned}
2\sigma' \sin \alpha' \cos(\gamma' - \varphi') &= \sin \alpha [\sigma_0 \cos(\gamma + \varphi_0) + \sigma \cos(\gamma - \varphi)] \\
0 &= \sigma_0 \sin(\gamma + \varphi_0) - \sigma \sin(\gamma - \varphi) \\
0 &= \sigma_0 \cos(\gamma + \varphi_0) - \sigma \cos(\gamma - \varphi) \\
2\sigma' \cos \alpha' \sin(\gamma' - \varphi') &= \cos \alpha [\sigma_0 \sin(\gamma + \varphi_0) + \sigma \sin(\gamma - \varphi)]
\end{aligned}$$

woraus:

$$\sigma \sin(\gamma - \varphi) = \sigma_0 \sin(\gamma + \varphi_0) = \sigma' \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \sin(\gamma' - \varphi')$$

$$\sigma \cos(\gamma - \varphi) = \sigma_0 \cos(\gamma + \varphi_0) = \sigma' \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \cos(\gamma' - \varphi')$$

und daher:

$$7) \quad \sigma = \sigma_0, \quad \gamma - \varphi = \gamma + \varphi_0,$$

$$8) \quad \operatorname{tg}(\gamma - \varphi) = \operatorname{tg}(\gamma + \varphi_0) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} (\gamma' - \varphi')$$

Die von Fresnel aufgestellte Formel für den Phasenunterschied bei vollständig zurückgeworfenem Licht ergibt sich aus den Werthen von φ_1 und f_1 . Man findet für diesen Unterschied aus 2) und 6);

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - f_1) = \operatorname{tg}(\gamma' - \varphi') = \frac{\cos \alpha' \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha' - 1}}{n \sin^2 \alpha'}.$$

Die Formeln 4) und 8) geben den Phasenunterschied des zurückgeworfenen Lichtes im ersten Mittel oder, wenn man wieder d sehr klein gegen λ' nimmt, den Phasenunterschied im vollständig zurückgeworfenen Licht für den Fall, daß man keinen plötzlichen Uebergang vom einen ins andere Mittel annimmt.

IV. Ueber die Messung der Inclinations-Variationen mittelst der Induction weicher Eisenstäbe; von Dr. J. Lamont.

Die Anwendung des weichen Eisens zu Inclinations-Bestimmungen ist ursprünglich von Brugmans in Vorschlag gebracht worden, blieb jedoch völlig unbeachtet, bis Lloyd, ohne von den längst in Vergessenheit verfallenen Arbeiten Brugmans' irgend eine Kenntniß zu haben, im Jahre 1843 mit demselben Vorschlage auftrat. Gleich nachdem Lloyd die erste Anzeige veröffentlicht hatte, fing ich an,