11. *Zur Theorie des Abtropfens. Nachtrag und
weitere Belege;
von Theodor Lohnstein.*

I.

Am Schlusse meiner Arbeit zur Theorie des Abtropfens hatte ich erwähnt, daß ich die daselbst mitgeteilte Tab. 2 inzwischen einer weiteren Durchrechnung unterzogen habe, durch welche eine noch genauere Kenntnis des Ganges der dort eingeführten Funktionen ermöglicht wird. Dies wurde dadurch erreicht, daß die Meridiankurve des hängenden Tropfens noch für die Werte des Parameters $h = 0,25; 0,6; 0,7; 1,1$ und $1,4$ in der erforderlichen Ausdehnung berechnet wurde. Für einzelne der in der ersten Abhandlung gegebenen Zahlenwerte wurden dadurch kleine Änderungen bedingt. Der Wert des Parameters h , für den der erste Wendepunkt der Kurve mit dem Endpunkt des ersten Quadranten zusammenfällt, ergab sich aus der erneuten Rechnung zu $1,7996$, kann also, wenn man auf drei Stellen nach dem Komma abkürzt, zu $1,800$ angesetzt werden; die zugehörigen Koordinaten $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ändern sich auf $0,6484$ bez. $1,0284$. — Der Wert r/a , der dem absoluten Maximum des hängenden Tropfens entspricht, wurde jetzt zu $2,273$ (anstatt $2,261$), der Ausdruck für das Gewichtsmaximum selbst zu $18,84 \alpha^{3/2} / \sigma^{1/2}$ (anstatt $18,83 \alpha^{3/2} / \sigma^{1/2}$), der zugehörige Wert des Parameters h zu $1,117$ (anstatt $1,124$) und endlich der entsprechende Funktionswert $f(r/a)$ zu $0,933$ (anstatt $0,937$) ermittelt. Man sieht, daß die Änderungen nur unbedeutend sind, und daß somit durch Berechnung noch weiterer Meridiankurven eine erhebliche Steigerung der Genauigkeit nicht herbeigeführt werden würde.

Wir lassen jetzt die vervollständigte Tab. 2 folgen. Sie ist um eine Kolumne vermehrt, welche das Verhältnis

$$\bar{v} \left(\frac{r}{a} \right) / f \left(\frac{r}{a} \right),$$

d. h. das Verhältnis des „Tropfenmeniskus“ zum abfallenden Tropfen, enthält. Sämtliche Zahlen sind auf drei Stellen nach dem Komma abgerundet.

Tabelle.

$\frac{r}{a}$	V_m	$\bar{V}$	$f = V_m - \bar{V}$	$\bar{V}/f$
0,0	1,000	0,000	1,000	0,000
0,1	0,812	0,007	0,805	0,009
0,2	0,769	0,028	0,741	0,038
0,3	0,758	0,050	0,708	0,071
0,4	0,769	0,090	0,679	0,133
0,5	0,785	0,128	0,657	0,195
0,6	0,807	0,164	0,643	0,255
0,7	0,835	0,198	0,637	0,311
0,8	0,864	0,235	0,629	0,374
0,9	0,894	0,271	0,623	0,435
1,0	0,924	0,304	0,620	0,500
1,1	0,953	0,350	0,603	0,581
1,2	0,982	0,364	0,618	0,589
1,3	1,003	0,368	0,635	0,579
1,4	1,015	0,354	0,661	0,536
1,5	1,021	0,383	0,638	0,600
1,6	1,031	0,397	0,634	0,626
1,7	1,036	0,388	0,648	0,599
1,8	1,040	0,368	0,672	0,548
1,9	1,026	0,350	0,676	0,518
2,0	1,013	0,313	0,700	0,447
2,1	0,991	0,206	0,785	0,263
2,2	0,960	0,102	0,858	0,119
2,273	0,933	0,000	0,933	0,000

Zur Ergänzung vorstehender Tabelle dienen folgende Angaben: Für das Intervall von $x = 0$ bis $x = 0,1$ ist

$$V_m = 1 - 1,139 x^{2/3} + 0,487 x + \frac{2}{3} x^2,$$

$$\bar{V} = \frac{2}{3} x^2,$$

$$f(x) = 1 - 1,139 x^{2/3} + 0,487 x.$$

$$\text{Tropfenvolumen} = r \pi a^2 f\left(\frac{r}{a}\right),$$

$$\text{Kapillaritätskonstante } \alpha = \frac{1}{2} a^2 \sigma \text{ (}\sigma \text{ spez. Gew.)},$$

$$\text{Tropfengewicht} = 2 r \pi \alpha f\left(\frac{r}{a}\right).$$

Den größten Fehler in den Zahlen dieser Tabelle veranschlage ich auf $\pm 0,005$, eine Unsicherheit, die nicht so groß ist, um nicht den numerischen Gang der tabulierten Funktionen noch deutlich hervortreten zu lassen. Bezüglich dieses ist zu bemerken, daß V_m ein Minimum und ein Maximum, $\bar{V}$ zwei einander ziemlich nahe liegende Maxima mit dazwischen liegendem flachem Minimum hat, während f zwei Minima und ein dazwischen liegendes wenig ausgeprägtes Maximum und endlich $\bar{V}/f$ zwei Maxima mit dem zugehörigen ebenfalls flachen Minimum aufweist. Die Zahlen der Kolumne für f , auf die es für die physikalische Praxis am meisten ankommt, sind nach dem Bemerkten mit einer Unsicherheit von noch nicht 1 Proz. behaftet, eine Genauigkeit, die in Anbetracht der mannigfaltigen Fehlerquellen experimenteller Art, die bei der Bestimmung der Kapillaritätskonstanten aus Tropfengewichten mit unterlaufen, durchaus genügend erscheint.

II.

Die schwerwiegendste dieser Fehlerquellen besteht darin, daß eine stillschweigende Voraussetzung unserer Theorie, die unendlich langsame Bildung des Tropfens, in den Versuchen niemals erfüllt sein kann, und zwecks richtiger Würdigung der Versuchsergebnisse früherer Beobachter müssen wir auf diese Fehlerquelle etwas näher eingehen. Der naheliegende Gedanke, den Einfluß der *Geschwindigkeit der Tropfenfolge* auf die Tropfengröße theoretisch zu verfolgen, dürfte allerdings an den mathematischen Schwierigkeiten scheitern, doch finden sich in der Literatur bereits Angaben genug, die eine empirische Beurteilung dieses Einflusses erlauben. So ließ Hagen¹⁾ von demselben Satz kreisförmiger Messingscheibchen Tropfen destillierten Wassers abfallen, die sich in drei Versuchsreihen in Intervallen von $1\frac{1}{2}$, bez. 1 und $\frac{2}{3}$ Sek. aufeinander folgten; setzt man die durchschnittliche Tropfengröße der ersten Versuchsreihe gleich 1, so erhielt Hagen in den drei Reihen die durchschnittlichen Tropfengrößen 1,000; 1,024; 1,045.

Eschbaum²⁾ teilt folgenden Versuch mit:

50 Tropfen Wasser in 80 Sek. ($2r = 6,63$ mm) wiegen

1) E. Hagen, Abhandl. d. Berl. Akad. 1845.

2) F. Eschbaum, Ber. d. Deutsch. Pharmaz. Gesellsch. p. 98. 1900.

4,909 g; bei 50, 30, 25 Sek. Ausflußzeit wog dieselbe Tropfenzahl 5,0 bez. 5,01 und 5,04 g. Die durchschnittlichen Tropfengrößen verhielten sich in diesen Versuchen also wie 1,000:1,019:1,021:1,027.

Endlich sollen hier noch einige Versuche Quinckes¹⁾ erwähnt werden. Quincke fand: Ein Rohr vom Durchmesser $2r = 2,478$ mm lieferte bei langsamem Tropfen Wassertropfen vom Gewicht 0,0422 g; bei schnellem Tropfen solche vom Gewicht 0,0450 g. Das Verhältnis der Zeitfolgen wird nicht angegeben. Ein Rohr vom Durchmesser 0,493 mm ferner gab bei langsamem Abfluß Tropfen vom Gewicht 0,0097 g, beim schnellen Tropfen solche vom Gewicht 0,0170 g; während sich also die beiden Tropfen im ersten Versuchspaar wie 1:1,066 verhalten, finden wir im zweiten Versuchspaar dieses Verhältnis wie 1:1,75, d. h. eine ganz erhebliche Ungleichheit der Tropfen.

Mag sich nun auch vielleicht in die Wiedergabe des letzten Versuches seitens des Autors ein Versehen eingeschlichen haben, so lehren doch die angeführten Daten übereinstimmend, daß der Beschleunigung der Tropfenfolge eine erhebliche Vergrößerung der Tropfen entspricht, und wir werden daher nur diejenigen Versuche früherer Untersucher bei der jetzt folgenden Vergleichung unserer Theorie mit der Erfahrung berücksichtigen, bei denen eine relativ langsame Tropfenfolge eingehalten wurde. Ferner werden wir uns auf solche Flüssigkeiten bez. geschmolzene Metalle beschränken, bei denen gleichzeitig Bestimmungen der Kapillaritätskonstanten nach einer anderen Methode vorliegen.

III.

Von besonderer Wichtigkeit für unsere Theorie sind die ausgedehnten Versuche, die J. Traube²⁾ zur Bestimmung von Tropfenmenisken anstellte. Er bediente sich dabei eines ähnlichen Apparates, wie man ihn zur Ermittlung der Reibungskonstante nach dem Vorgange Poiseuilles benutzt. Die Volumina der Tropfenmenisken und Tropfen wurden den zu ihrer Bildung nötigen Zeiten proportional gesetzt, was bei der verwendeten Versuchsanordnung jedenfalls annähernd dem

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 135. p. 638. 1868.

2) J. Traube, Journ. f. prakt. Chem. 34. p. 515—538. 1886.

Vorgang entsprach. Zur Untersuchung gelangten wässrige Lösungen von Alkoholen und Fettsäuren. Es ist im Wesen der Versuchsanordnung begründet, daß sämtliche beobachteten Tropfen sich sehr langsam bilden mußten, so daß hier die besprochene Fehlerquelle wohl ganz zu vernachlässigen ist. Die Versuche wurden angestellt an zwei Abtropfflächen von den Durchmessern $2r = 6,05$ mm und $2r = 4,0$ mm.

In den nachstehenden Tabellen, in denen die Kolumne a^2 aus Traubeschen Steighöhenversuchen unter der Annahme des Randwinkels $\vartheta = 0$ gewonnen ist, sind die Ergebnisse dieser Versuche und ihrer Vergleichung mit der theoretischen Berechnung niedergelegt.

1. Methylalkohol.

 $2r = 6,05$ mm.

Proz.-Geh. d. Lösung	a^2	$\frac{r}{a}$	V_m	f	$\bar{V}$	$\bar{V}/f$ ber.	$\bar{V}/f$ beob.
20	9,908	0,961	0,912	0,621	0,291	0,469	0,487
40	8,040	1,067	0,944	0,608	0,336	0,553	0,514
60	7,106	1,135	0,963	0,608	0,355	0,584	0,557
80	6,432	1,193	0,980	0,617	0,363	0,588	0,568

 $2r = 4,0$ mm.

20	9,908	0,635	0,816	0,641	0,175	0,273	0,296
40	8,040	0,705	0,836	0,637	0,199	0,313	0,369
60	7,106	0,750	0,850	0,633	0,217	0,343	0,393
80	6,432	0,789	0,861	0,630	0,231	0,367	0,401

2. Äthylalkohol.

 $2r = 6,05$ mm.

20	8,04	1,067	0,943	0,607	0,336	0,553	0,519
40	6,493	1,187	0,978	0,616	0,362	0,588	0,565
60	6,135	1,221	0,987	0,622	0,365	0,587	0,579
80	5,977	1,237	0,990	0,624	0,366	0,587	0,615

 $2r = 4,0$ mm.

20	8,04	0,705	0,836	0,637	0,199	0,313	0,349
40	6,493	0,783	0,859	0,630	0,229	0,364	0,426
60	6,135	0,807	0,868	0,628	0,240	0,382	0,413
80	5,977	0,818	0,875	0,627	0,248	0,396	0,373

3. Propylalkohol.

$2r = 6,05 \text{ mm.}$

Proz.-Geh. d. Lösung	a^2	$\frac{r}{a}$	V_m	f	$\bar{V}$	$\bar{V}/f$ ber.	$\bar{V}/f$ beob.
10	7,129	1,134	0,963	0,608	0,355	0,584	0,518
30	5,522	1,287	0,999	0,633	0,366	0,578	0,563
50	5,610	1,277	0,998	0,631	0,367	0,582	0,563

$2r = 4,0 \text{ mm.}$

10	7,129	0,749	0,849	0,633	0,216	0,341	0,361
30	5,522	0,851	0,879	0,626	0,253	0,404	0,404
50	5,610	0,844	0,877	0,626	0,251	0,401	0,485

4. Isobutylalkohol.

$2r = 6,05 \text{ mm.}$

4	7,125	1,117	0,957	0,606	0,351	0,579	0,579
8	5,202	1,325	1,006	0,641	0,365	0,569	0,622

$2r = 4,0 \text{ mm.}$

4	7,125	0,739	0,846	0,626	0,220	0,351	0,398
8	5,202	0,875	0,897	0,624	0,273	0,438	0,509

5. Isoamylalkohol.

$2r = 6,05 \text{ mm.}$

1	8,129	1,061	0,941	0,608	0,333	0,548	0,505
2	6,126	1,222	0,987	0,622	0,365	0,587	0,578

$2r = 4,0 \text{ mm.}$

1	8,129	0,702	0,836	0,637	0,199	0,313	0,370
2	6,126	0,808	0,866	0,629	0,237	0,377	0,413

6. Ameisensäure.

$2r = 6,05 \text{ mm.}$

10	12,653	0,850	0,879	0,626	0,253	0,404	0,421
30	10,597	0,931	0,903	0,622	0,281	0,452	0,490
50	9,208	0,997	0,923	0,620	0,303	0,489	0,492
100	6,265	1,206	0,983	0,619	0,364	0,588	0,588

7. Essigsäure.
 $2r = 6,05 \text{ mm.}$

Proz.-Geh. d. Lösung	a^2	$\frac{r}{a}$	V_m	f	$\bar{V}$	$\bar{V}/f$ ber.	$\bar{V}/f$ beob.
10	11,039	0,921	0,900	0,621	0,279	0,449	0,481
30	8,624	1,030	0,933	0,612	0,321	0,524	0,549
50	7,458	1,108	0,955	0,604	0,351	0,581	0,575
70	6,559	1,181	0,976	0,615	0,361	0,587	0,577
100	5,265	1,318	1,005	0,640	0,365	0,570	0,634

8. Propionsäure.
 $2r = 6,05 \text{ mm.}$

10	9,003	1,008	0,926	0,615	0,311	0,505	0,521
30	6,925	1,150	0,967	0,610	0,357	0,585	0,564
50	6,406	1,195	0,981	0,617	0,364	0,590	0,618

9. Buttersäure.
 $2r = 6,05 \text{ mm.}$

10	6,236	1,211	0,984	0,620	0,364	0,587	0,593
30	5,719	1,265	0,996	0,630	0,366	0,581	0,628
50	5,761	1,26	0,995	0,628	0,367	0,584	0,600

10. Isobuttersäure.
 $2r = 6,05 \text{ mm.}$

10	5,936	1,241	0,991	0,625	0,366	0,586	0,593
----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Um die Beweiskraft der in vorstehenden Tabellen niedergelegten Versuche zu würdigen, hat man zu berücksichtigen, daß die bei letzteren angewandte Methode der Beobachtung einer besonders großen Schärfe nicht fähig war. So ist die von Traube bei der 40 proz. Methylalkohollösung an der Tropffläche vom Durchmesser 6,05 mm gefundene Zahl 0,514 als Mittelwert aus einer Anzahl von Einzelversuchen gewonnen, deren Ergebnisse zwischen $\bar{V}/f=0,44$ und $\bar{V}/f=0,56$ schwanken; bei dem entsprechenden Versuche an der kleineren Tropffläche, dessen Mittelzahl 0,369 ist, variieren die zu diesem führenden Einzelzahlen von 0,29 bis 0,45. In Anbetracht dieser immerhin nicht unerheblichen Unsicherheit, mit der die auf die Tropfenmenisken bezüglichen Versuchszahlen Traubes behaftet sind, wird man die Übereinstimmung zwischen den Versuchen und der hier aufgestellten Theorie gewiß als eine durchaus befriedigende anerkennen; wenigstens halten sich die Differenzen

überall innerhalb der Größenordnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers.

IV.

In einer weiteren Reihe von Versuchen ermittelte Traube¹⁾ mit dem erwähnten Apparat lediglich die Tropfengröße für die Lösungen von Alkoholen und Fettsäuren. Er verfuhr so, daß er ein bestimmtes Volumen, 7,96 ccm, unter einer konstanten Druckhöhe ausfließen ließ und die auf dieses Volumen entfallenden Tropfen zählte. Seine Beobachtungen erstreckten sich auf drei Tropfflächen mit den Durchmessern $2r=6,05$ mm, $2r=4,0$ mm und $2r=2,5$ mm. Da für eine Flüssigkeit bei der getroffenen Versuchsanordnung die zum Ausfließen des Volumens 7,96 ccm erforderliche Zeit in allen drei Fällen die gleiche war, die Zahl der Tropfen aber mit abnehmender Abtropffläche zunimmt, so mußte die Tropfgeschwindigkeit in den beiden letzten Fällen eine erheblich größere sein als im ersten, und sich demnach auch die hieraus entspringende Fehlerquelle entsprechend stärker bemerkbar machen.²⁾ In der Tat lieferte auch die Berechnung sämtlicher mit den kleineren Tropfflächen angestellter Versuche ausgesprochen zu große Werte für die Kapillaritätskonstanten. Wir verzichten daher auf ihre Wiedergabe und beschränken uns lediglich auf die Verwertung der der Tropffläche $2r=6,05$ mm zugehörigen Versuche.

1. Äthylalkohol.

Prozentgehalt der Lösung	Spezifisches Gewicht s	Zahl der Tropfen auf 7,96 cm ³	Daraus ber. $a^2 f \left(\frac{r}{a} \right)$	Daraus ber. a^2	a^2 aus Steighöhen	$a = \frac{1}{2} a^2 s$ aus Tropfen	$a = \frac{1}{2} a^2 s$ aus Steighöhen
99,65	0,7906	232	3,61	5,75	5,679	2,27	2,24
20	0,969	169	4,96	8,172	8,04	3,96	3,90
40	0,9355	209,5	3,997	6,500	6,493	3,04	3,04
60	0,8913	215,5	3,886	6,247	6,135	2,79	2,73
80	0,8424	222	3,773	6,026	5,977	2,54	2,52

1) J. Traube, Journ. f. prakt. Chem. 34. p. 304—306. 1886.

2) Unsere in dem vorigen Aufsatz ausgesprochene Vermutung über den Grund dieser Abweichungen in dem speziellen Falle des Wassers ist daher in dem obigen Sinne zu berichtigen.

2. Propylalkohol.

Prozentgehalt der Lösung	Spezifisches Gewicht ρ	Zahl der Tropfen auf 7,96 cm ³	Daraus ber. $a^2 f \left(\frac{r}{a} \right)$	Daraus ber. a^2	a^2 aus Steighöhen	$a = \frac{1}{2} a^2 s$ aus Tropfen	$a = \frac{1}{2} a^2 s$ aus Steighöhen
10	0,9840	188	4,454	7,35	7,129	3,62	3,51
30	0,9510	246	3,405	5,36	5,522	2,55	2,63
50	0,9141	239	3,504	5,56	5,610	2,54	2,56
70	0,8697	232	3,61	5,75	5,777	2,50	2,51

3. Isobutylalkohol.

100	0,8029	235	3,564	5,67	5,709	2,28	2,29
4	0,9922	188,5	4,442	7,33	7,125	3,64	3,54
8	0,9869	250,5	3,344	5,209	5,202	2,57	2,57

4. Isoamylalkohol.

100	0,8121	232	3,61	5,75	5,948	2,34	2,42
1	0,9967	166	5,046	8,27	8,129	4,12	4,05
2,5	0,9946	230,5	3,633	5,79	5,693	2,83	2,83

5. Ameisensäure.

10	1,0168	107,5	7,792	12,45	12,653	6,33	6,48
30	1,0700	128,75	6,503	10,47	10,597	5,60	5,67
50	1,1159	149	5,621	9,12	9,208	5,29	5,34

6. Essigsäure.

10	1,0125	125	6,10	10,79	11,039	5,46	5,59
30	1,0379	160	5,235	8,552	8,624	4,44	4,48
50	1,0576	182,5	4,589	7,598	7,458	4,02	3,94
70	1,0689	205	4,085	6,631	6,559	3,54	3,51

7. Propionsäure.

10	1,0075	152	5,51	8,96	9,003	4,51	4,53
30	1,0214	196	4,273	7,005	6,925	3,58	3,54
50	1,0267	212	3,951	6,393	6,406	3,28	3,29

8. Buttersäure.

10	1,0036	214	3,914	6,313	6,236	3,17	3,13
30	1,0047	234	3,579	5,683	5,719	2,86	2,87
50	1,0008	235	3,564	5,674	5,761	2,84	2,88

9. Isobuttersäure.

Prozentgehalt der Lösung	Spezifisches Gewicht ρ	Zahl der Tropfen auf 7,96 cm ³	Daraus ber. $a^2 f \left(\frac{r}{a} \right)$	Daraus ber. a^2	a^2 aus Steighöhen	$\alpha = \frac{1}{2} a^2 s$ aus Tropfen	$\alpha = \frac{1}{2} a^2 s$ aus Steighöhen
5	1,0006	173	4,843	7,99	7,911	4,00	3,96
10	1,0035	227	3,690	5,894	5,936	2,96	2,98
15	1,0039	237	3,534	5,61	5,690	2,82	2,86
20	1,0037	243	3,447	5,445	5,512	2,73	2,76
10. Isovaleriansäure.							
2	0,9987	177	4,731	7,82	7,73	3,90	3,86
4	0,9991	225	3,723	5,956	5,982	2,98	2,99

Das Ergebnis der vorstehenden Versuchsreihen ist, wie man sieht, ein für unsere Theorie sehr günstiges; die aus den Versuchen mit Hilfe unserer Tabelle berechneten Kapillaritätskonstanten stimmen innerhalb der durch die Beobachtungsfehler gegebenen Grenzen durchaus mit den durch die Steighöhenmethode gewonnenen Werten überein.

V.

Wir wollen im Anschluß hieran noch die Versuche einiger anderer Forscher zur Berechnung von Kapillaritätskonstanten verwerten.

Hagen gibt in der schon oben erwähnten Abhandlung eine Tabelle für destilliertes Wasser, das er von kreisrunden Messingscheibchen in Intervallen von $1\frac{1}{2}$ Sek. abtropfen ließ; wir haben die dort in Pariser Linien und Grangewichten angegebenen Zahlen mit Hilfe der Relationen $1'' = 2,256$ mm und 1 Gran = $0,06168$ g auf modernes Maß umgerechnet und dadurch folgende Tabelle erhalten, in der G das Gewicht des einzelnen Tropfens bedeutet.

$2r$ (Linien)	r (Millimeter)	$G/2r\pi$ (Gran)	$G/2r\pi$ mg	$f \left(\frac{r}{a} \right)$	α
0,62	0,700	0,208	5,689	0,751	7,58
0,88	0,993	0,206	5,634	0,728	7,79
1,20	1,354	0,194	5,305	0,694	7,64
1,70	1,918	0,187	5,113	0,659	7,76
2,42	2,730	0,182	4,978	0,638	7,80

Hier wären die ebenfalls oben erwähnten Versuche Quinckes an Wasser anzuschließen. Quincke fand bei langsamem Tropfen (ohne Angabe des Zeitintervalles):

$$1. \quad 2r = 2,478 \text{ mm}, \quad G = 0,0422 \text{ g},$$

daraus

$$G/2r\pi = 5,428 \text{ mg/mm.}$$

Wir finden damit

$$f\left(\frac{r}{a}\right) = 0,705 \quad \text{und} \quad \alpha = 7,69 \text{ mg/mm.}$$

$$2. \quad 2r = 0,493 \text{ mm}, \quad G = 0,0097 \text{ g};$$

daraus

$$G/2r\pi = 6,259 \text{ mg/mm.}$$

Wir finden damit

$$f\left(\frac{r}{a}\right) = 0,849 \quad \text{und} \quad \alpha = 7,38 \text{ mg/mm.}$$

Quincke¹⁾ hat ferner einige Tropfenversuche mit *Brom* (spezifisches Gewicht = 3,18) angestellt und durch gleichzeitige Steighöhenbestimmungen kontrolliert; er findet:

$$1. \quad 2r = 0,8407 \text{ mm}, \quad G = 0,0088 \text{ g}, \quad G/2r\pi = 3,335 \text{ mg/mm.}$$

$$2. \quad 2r = 0,6998 \text{ mm}, \quad G = 0,00744 \text{ g}, \quad G/2r\pi = 3,385 \text{ mg/mm.}$$

$$3. \quad 2r = 0,4934 \text{ mm}, \quad G = 0,0053 \text{ g}, \quad G/2r\pi = 3,420 \text{ mg/mm.}$$

Wir finden daraus

$$1. \quad f = 0,722, \quad a^2 = 2,902 \text{ mm}^2, \quad \alpha = 4,614 \text{ mg/mm},$$

$$2. \quad f = 0,738, \quad a^2 = 2,883 \text{ mm}^2, \quad \alpha = 4,584 \text{ mg/mm},$$

$$3. \quad f = 0,774, \quad a^2 = 2,778 \text{ mm}^2, \quad \alpha = 4,416 \text{ mg/mm},$$

Im Mittel ergaben also diese Versuche $a^2 = 2,854 \text{ mm}^2$, während Quincke in zwei Steighöhenversuchen $a^2 = 2,712$ und $a^2 = 2,943$, im Mittel also $a^2 = 2,828 \text{ mm}^2$ erhielt.

Zum Schluß sollen noch die Bestimmungen Quinckes an einigen geschmolzenen Metallen, die von Siedentopf²⁾ später nach der Methode der ruhenden Tropfen aufgenommen wurden, neu berechnet werden. Es handelt sich um Zinn, Kadmium, Blei und Wismut. Die Tabellen, in denen wir die Versuchsdaten Quinckes mit unserer ergänzenden Berechnung wiedergeben, bedürfen nach dem Früheren keiner Erläuterung mehr.

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 135. p. 636. 1868.

2) H. Siedentopf, Wied. Ann. 61. p. 235. 1897.

1. Zinn. ($s_{230} = 7,144$ nach Quincke.)

$2r$ (mm)	G (Gramm)	$G/2r\pi$ (Milligramm)	$f\left(\frac{r}{a}\right)$	$\alpha = \frac{1}{2}a^2s$
0,665	0,1200	57,41	0,834	68,85
0,642	0,1245	61,69	0,840	73,48
0,549	0,0976	56,52	0,851	66,50
0,470	0,0800	54,25	0,861	62,89
0,437	0,0900	65,39	0,874	74,99
0,395	0,0720	58,08	0,879	65,98
0,311	0,0640	65,62	0,897	73,25

Als Mittelwert finden wir $\alpha = 69,42$ mg/mm.

2. Kadmium.

Hier gibt Quincke die Einzelzahlen wohl infolge eines Versehens nicht an; in der Tabelle auf p. 642 (l. c.) findet sich nur für α im Sinne Quinckes, d. h. den Mittelwert des Quotienten $G/2r\pi$, die Zahl 70,65 mg angeführt. Da zu den Versuchen vermutlich Röhren von ähnlichem Kaliber wie bei den anderen Metallen benutzt sind, so haben wir als Zahlenwert des Faktors $f(r/a)$ die wohl nahe zutreffende Mittelzahl 0,85 zugrunde gelegt. Es ergab sich in dieser Weise

$$\alpha = 83,1 \text{ mg/mm.}$$

3. Blei. ($s_{380} = 10,952$ nach Quincke.)

$2r$	G	$G/2r\pi$	$f\left(\frac{r}{a}\right)$	α
0,579	0,0840	46,17	0,815	56,66
0,543	0,0754	44,20	0,819	53,96
0,288	0,0422	46,61	0,876	53,26

Mittelwert: $\alpha = 54,63$ mg/mm.

4. Wismut. ($s_{265} = 9,709$ nach Quincke.)

$2r$	G	$G/2r\pi$	$f\left(\frac{r}{a}\right)$	α
0,8650	0,1150	42,31	0,782	54,11
0,5265	0,0598	36,16	0,817	44,32
0,4288	0,0500	37,57	0,839	44,74
0,3609	0,0450	39,69	0,855	46,39

Mittelwert: $\alpha = 47,39$ mg/mm.

Siedentopf findet der Reihe nach für Zinn, Kadmium, Blei¹⁾ und Wismut bei den betreffenden Schmelztemperaturen die Werte $\alpha = 62,43$; $84,85$; $53,98$; $43,02$ mg/mm. Die Übereinstimmung ist immerhin noch eine leidliche.

Alles in allem glauben wir durch das beigebrachte Versuchsmaterial unsere Theorie der Tropfenbildung ausreichend begründet zu haben. Mit Benutzung der oben (p. 607) gegebenen Tabelle wird man daher künftig die Tropfenmethode in ausgedehnterem Umfang als bisher zur Ermittlung der Kapillaritätskonstanten heranziehen dürfen. Man muß sich dabei allerdings stets gegenwärtig halten, daß die entwickelte statische Theorie des Abtropfens nur für sehr langsame Tropfenbildung gilt, und daher die Versuche so einrichten, daß die Schnelligkeit der Tropfenfolge ein bestimmtes Maß nicht überschreitet. Als untere Grenze des zulässigen Tropfenintervalles dürften etwa 2 Sek. zu betrachten sein; wenn man sie einhält, wird man auch mit der Tropfenmethode brauchbare Werte für die Kapillaritätskonstanten bekommen.

Berlin, im Mai 1906.

1) Für Blei gibt Siedentopf selbst 51,94 an; aus der von ihm mitgeteilten Zahl $\alpha^2 = 9,778$ und $s_{325} = 11,041$ findet man jedoch die im Text gegebene Zahl 53,98, so daß also bei Siedentopf wohl ein Rechenfehler vorliegt.

(Eingegangen 21. Mai 1906.)