LA COSTANTE DIELETTRICA DELL' ARIA FINO A 200 ATMOSFERE ¹⁾.

MEMORIA DI A. OCCHIALINI E E. BODAREU.

Con questo lavoro ci siamo proposti di iniziare una serie di ricerche sopra i gas compressi. Lo stesso argomento qui trattato era stato occasione di studio per uno di noi parecchi anni fa; ma la mancanza di mezzi adeguati nella misura delle costanti dielettriche ha impedito allora di raggiungere la necessaria precisione. Fu quindi deciso di istituire nuove ricerche. La loro preparazione, lunga di suo per le cure che esigea, è stata di molto ritardata, fra l'altro, dall'attesa che questo Istituto si provvedesse di apparecchi adatti. Nel frattempo il Sig. Tangl ha eseguito una ricerca identica sull'aria fino a 100 atmosfere ²⁾, sicchè ora il nostro lavoro viene in parte a sovrapporsi con quella ricerca. Ma, senza contare che la nostra indagine è spinta in un intervallo doppio di quello precedentemente studiato, essa è condotta con metodi così diversi, che, a nostro parere, non è inutile neanche là dove fummo preceduti.

I. Metodo di misura.

1. *Il metodo di misura della costante dielettrica.* — Il metodo da noi usato per la misura della c. d. dei gas è, all'infuori di poche modificazioni, quello usato dal Lebedew ³⁾ nelle sue ricerche sui vapori, e si fonda sul principio se-

¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico di Pisa diretto dal Professore A. Battelli.

²⁾ K. Tangl. *Ann. d. Phys.* 23, 559, 1907.

³⁾ Lebedew. *Ann. d. Phys.* 44, 288, 1891.

guente: si abbiano due condensatori dei quali le due armature inducenti siano cariche di segno opposto nello stesso tempo che le due armature indotte sono in comunicazione col suolo. Allora su queste ultime si indurranno cariche di segno contrario che saranno numericamente uguali se sarà soddisfatta una ben nota relazione fra i potenziali di carica e le capacità dei condensatori. L'uguaglianza in valore assoluto delle due cariche indotte potrà essere verificata con molta precisione connettendo fra loro e con un elettrometro le due armature indotte isolate dal suolo, e mettendo a terra invece la coppia delle armature inducenti. L'ago dell'apparecchio di misura resterà fermo quando la neutralizzazione delle cariche indotte sarà completa.

Supponiamo che questo sia verificato quando le armature dei due condensatori sono immerse nell'aria in condizioni normali; dopo sostituiamo completamente il dielettrico di uno dei condensatori con un altro che abbia una c. d. K volte più grande di quella dell'aria. Se le armature inducenti fossero di nuovo caricate agli stessi potenziali adoperati precedentemente, la neutralizzazione delle cariche indotte non potrebbe aver più luogo. A volere ancora questa neutralizzazione, bisogna ridurre il potenziale di carica del condensatore variato K volte più piccolo; sicchè chiamando π_0 e $\pi_0 - \Delta\pi$ rispettivamente il potenziale primitivo e quello ridotto, la costante dielettrica del mezzo in esame rispetto all'aria nelle condizioni normali risulterà

$$\frac{\pi_0}{\pi_0 - \Delta\pi}.$$

Se poi si volesse la c. d. K riferita al vuoto, allora si avrebbe

$$(1) \quad K = K_0 \frac{\pi_0}{\pi_0 - \Delta\pi},$$

dove K_0 è il valore della c. d. dell'aria nelle condizioni normali, quando si assuma uguale all'unità quella del vuoto.

Per comodità di calcolo giova trasformare la (1) nel seguente modo

$$\frac{K - K_0}{K_0} = \frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi}$$

$$K = K_0 + K_0 \frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi}$$

$$K = K_0 + \frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi} + (K_0 - 1) \frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi}.$$

Ora nelle nostre determinazioni $\pi_0 = 40$ volta circa, $\Delta \pi < 4$ volta, $K_0 = 1,00055$; quindi

$$(K_0 - 1) \frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi} < 0,00006.$$

E siccome il metodo che noi abbiamo adottato, come sarà spiegato in seguito, non comporta un'approssimazione superiore a 0,0001, così possiamo ritenere come valore della c. d. quello dato dalla formula

$$(2) \quad K = K_0 + \frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi}.$$

Le considerazioni precedenti si applicano soltanto quando l'induzione di un'armatura sull'altra avviene attraverso a un dielettrico omogeneo e completamente sostituibile. In pratica a sostegno delle armature sono necessari dielettrici solidi che renderebbero inapplicabile la relazione (1), quando non si prendessero precauzioni opportune. Il modo più semplice per superare questa difficoltà ci è parso di far sì che l'induzione avvenisse dentro una cavità metallica praticamente chiusa, nell'interno della quale non fosse traccia di dielettrici solidi.

Come si sia raggiunto questo scopo sarà esposto in seguito.

2. *Dispositivo sperimentale.* — Il dispositivo sperimentale istituito in conformità del metodo descritto, comprende due

condensatori, C C' (fig. 1) dei quali uno C' è costantemente mantenuto nell'aria a pressione ordinaria e sarà designato come *condensatore di confronto*, l'altro C è rinchiuso in un recipiente d'acciaio che può sopportare una pressione di parecchie centinaia di atmosfere e sarà chiamato *condensatore di misura*. Ambedue questi condensatori sono cilindrici e presso

Fig 1.

a poco della stessa capacità; le armature inducenti (esterne) possono essere connesse con i poli eteronimi di due batterie di pile B e B', oppure col suolo. Il cambiamento di comunicazioni si fa mediante un commutatore H che sarà descritto più tardi. Lo stesso commutatore mette a terra o isola le due armature indotte (interne), che sono riunite alla stessa coppia di quadranti di un elettrometro; precisamente quando le armature inducenti sono connesse alla batteria le indotte risultano a terra; mentre la manovra che isola le due armature indotte, mette a terra le inducenti.

Delle due batterie, quella in comunicazione col condensatore di confronto C' , ha il polo negativo costantemente a terra; l'altra ha il negativo connesso con l'armatura esterna del condensatore C di misura, mentre il polo positivo può spostarsi lungo una resistenza R percorsa da una corrente costante e con un estremo a terra.

La resistenza R è costituita da un filo uniforme, sicchè lungo di essa il potenziale varia proporzionalmente alla lunghezza. In tal modo il potenziale di carica del condensatore di misura può essere variato di piccole quantità perfettamente apprezzabili. A questa resistenza R daremo il nome di *riduttore di potenziale*.

La batteria B' connessa col condensatore di confronto non deve aver altro requisito che di essere costante; l'altra B deve per di più possedere una differenza di potenziale conosciuta. Si sono adoperate per questo due batterie di pile Weston di 40 elementi ciascuna, debitamente controllate. Conosciuta pure deve essere la differenza di potenziale agli estremi della resistenza R , e questa grandezza è stata volta per volta determinata direttamente mediante il potenziometro. La corrente costante che percorre la resistenza R è fornita da 4 pile Daniell.

3. — Riepilogando, per effettuare queste misure di costante dielettrica si sono adoperati i seguenti apparecchi:

- 1) Condensatore di confronto.
- 2) Condensatore di misura.
- 3) Commutatore.
- 4) Elettrometro.
- 5) Batterie di Pile Weston.
- 6) Riduttore di Potenziale.
- 7) Potenziometro.

Oltre a questi apparecchi occorre

- 8) Un densimetro.

per la misura delle densità.

II. Apparecchi usati.

4. *Condensatore di confronto.* — Sopra una tavoletta di legno sono state fissate quattro colonnette di ebanite che servono a sorreggere le due armature di un condensatore cilindrico (fig. 2). L'armatura esterna è rigidamente collegata alle

Fig. 2.

due colonne A A, quindi è fissa. L'armatura interna è sorretta per mezzo di due bacchette M, N di ottone dalle colonne B B, e può scorrere secondo il proprio asse. Con questa disposizione la capacità del condensatore può essere variata dentro certi limiti per renderla molto prossimamente uguale a quella del condensatore di misura. Due viti F, F servono per fissare l'armatura interna una volta raggiunta l'uguaglianza suddetta.

I diametri delle due armature sono di 42 e 38 mm. rispettivamente, e ambedue sono lunghe 44 cm. Tutto l'apparecchio è rinchiuso dentro una scatola metallica tenuta costantemente a terra. Le comunicazioni escono dalla scatola attraverso a blocchi di paraffina.

L'isolamento è tale che per scorgere una diminuzione di carica con di un elettroscopio a foglie d'oro sono necessarie parecchie ore. La rigidità dell'insieme è dimostrata dal fatto che la capacità del condensatore non è cambiata per tutto il tempo delle misure.

5. *Il condensatore di misura.* — Il condensatore di misura è stato rinchiuso dentro una granata di acciaio gentilmente fornitaci dalla R^a Marina. Esso è completamente affidato a un

largo tubo di ottone A A (fig. 3) che ne regge le armature cilindriche. A due colonnette di ebanite B, B avvitate alla faccia interna del tubo presso gli estremi è assicurata l'armatura interna, co-

Fig. 3.

stituita da un cilindro di ottone lungo 20 cm. e del diametro di 48 mm., che si prolunga con due bacchette pure di ottone; l'armatura esterna E E, costituita da una semplice canna di ottone del diametro di 52 mm. lunga 26 cm., è sorretta esternamente da blocchetti di ebanite C, C assicurati alla loro volta alla faccia interna del tubo di sostegno A A.

Le due armature e il tubo di sostegno hanno gli assi coincidenti. L'insieme costituisce un sistema rigido che può entrare comodamente nella cavità della granata.

Sul fianco della granata sono stati praticati due fori impanati nei quali si avvitano due pezzi di acciaio a foggia di premistoppa (fig. 4). Per questi due fori si sono stabilite le comunicazioni delle due armature con l'esterno. A tal fine ad ognuna delle armature è stato saldato a stagno un filo di rame sottile nel punto prospiciente al relativo foro d'uscita; il filo attaccato all'armatura interna deve attraversare l'armatura

esterna e il tubo di sostegno; l'altro deve passare attraverso al solo tubo di sostegno; i passaggi hanno luogo in fori abbastanza larghi per escludere qualunque pericolo di contatto. Ognuno di questi due fili è stato introdotto lungo il tubo di rame sottile *aa* (fig. 4) che era infilato e masticiato lungo l'asse di una bacchetta di ebanite *b*, serrata, a tenuta di pressione, mediante un ingrossamento *c* dentro il premistoppa. Quest'ultimo poi era avvitato nel corrispondente foro della granata e stretto contro una guarnizione a tenuta *d*. Dopo ciò si è teso il filo di comunicazione con l'armatura del condensatore, afferrandolo per l'estremità libera emergente dal tubo *aa*; e mediante una goccia di stagno depositata all'estremità esterna di questo si è assicurata la tenuta dell'aria per questa via.

Fig. 4.

Per impedire che l'induzione potesse avvenire attraverso alle colonne di ebanite che sorreggono l'armatura interna, sono stati disposti due diaframmi metallici *D, D* (fig. 3) assicurati al tubo *AA* e muniti di due fori per lasciar passare le bacchette metalliche che sorreggono l'armatura interna. In tal modo viene realizzata una cavità metallica praticamente chiusa, nell'interno della quale trovasi la parte dell'armatura che subisce l'induzione e dalla quale sono esclusi i dielettrici di sostegno. Così sono verificate le condizioni per le quali la (1) è valida.

6. *Commutatore*. — Il commutatore è costruito in modo che in una posizione mette a terra le due armature interne (indotte) dei condensatori e collega le due armature esterne con le batterie di carica, nell'altra posizione isola le due armature interne e mette a terra le esterne.

Esso è costituito essenzialmente di un sistema rigido *H* che è mobile intorno all'asse orizzontale *SS*, e che porta due

grossi fili FF e GG fissati a parallelepipedi di ebanite come è indicato nella figura 5. Gli estremi di questi fili sono di platino e sono ripiegati in modo da poter pescare ognuno in un pozzetto di mercurio. Precisamente, in una posizione del sistema H due estremi pescano nei sottostanti pozzetti, mentre gli altri due non toccano il mercurio; girando H si viene ad immergere questi ultimi nel mercurio dei rispettivi pozzetti, mentre si sollevano i primi.

Fig. 5.

Il movimento del sistema H comanda quello di una leva metallica N che porta ad un estremo un filo di platino, il quale può pescare in un pozzetto di mercurio C o può essere sollevato da questo a seconda della posizione della leva.

I cinque pozzetti di mercurio sono costituiti da bicchierini di vetro appoggiati sulla paraffina. Di questi, due A, A hanno il mercurio in comunicazione rispettivamente coi due poli delle batterie di carica (vedi fig. 1); invece i pozzetti B, B hanno il mercurio costantemente a terra insieme con la leva N che è ad essi collegata metallicamente. Il mercurio del quinto pozzetto C è in comunicazione con le due armature interne (indotte) dei condensatori e con una coppia di quadranti dell'elettrometro, mentre ognuna delle armature esterne (inducenti) è collegata con uno dei fili FF, GG.

Quando il sistema H è inclinato in modo da far pescare nei pozzetti A, A le punte sovrastanti (nel qual caso le due batterie sono connesse alle armature inducenti) la leva N resta abbassata per sollecitazione di una molla a spirale; quindi le due armature interne sono a terra. Quando il sistema è inclinato dall'altra parte, la leva N viene sollevata in modo da togliere la comunicazione del mercurio C con la terra, mentre immergendo nei pozzetti B, B le punte sovrastanti, mette al suolo le due armature inducenti. Le cose sono state disposte in modo che il sollevamento della leva C avvenga prima che sia soppressa la comunicazione delle batterie di carica con le armature inducenti. Così anche un imperfetto isolamento di queste armature non influirebbe sulle determinazioni.

7. *Elettrometro*. — Come elettrometro fu usato un Dolezalek a isolamento d'ambra e con fibra di bronzo fosforoso. L'isolamento dei quadranti era ottimo. L'ago veniva caricato per mezzo di una pila Zamboni all'incirca a 600 volta.

In queste condizioni la carica di una coppia di quadranti a $\frac{1}{100}$ di volta produce, quando l'altra coppia è a terra, una deviazione di 10 millimetri su di una scala distante m. 1,60.

Disposte le cose per la misura della costante dielettrica e caricato il condensatore di misura a 40 volta circa, la variazione di $\frac{1}{100}$ di volta di questo potenziale di carica produce una deviazione di 5 millimetri. Dunque nelle condizioni in cui si sono svolte le misure si potevano rivelare variazioni di potenziale di $\frac{1}{500}$ di volta, ossia variazioni di $\frac{1}{20000}$ del potenziale di carica o, se si vuole, della costante dielettrica.

8. *Batterie di Pile Weston*. — Le due batterie di carica dei condensatori erano prese dalla cassetta di 100 elementi Weston di tipo Krüger fornita dalla Casa Spindler e Hoyer. Queste pile si sono dimostrate di una perfetta costanza. La differenza di potenziale di una serie di 10 di questi elementi ci è risultata di 10,186 e uguale a quella indicata dal Dr. Krüger.

Così la differenza di potenziale della batteria di carica del condensatore di misura risulta 40,75 volta con l'approssimazione di 0,005 (V. § 10).

9. *Riduttore di potenziale.* — La resistenza R (fig. 1) che deve essere percorsa dalla corrente delle 4 pile Daniell e che serve a variare il potenziale di carica del condensatore di misura di quantità molto piccole e calcolabili è costituita da 100 spirali di filo di argentana del diametro di 0,2 mm. Queste spirali furono tagliate in modo che avessero la stessa resistenza di 9,25 ohm, e ciò è stato riscontrato con molta cura per mezzo di un ottimo ponte.

Tutte queste spirali sono connesse in serie coi capi saldati a tante lastrine di ottone disposte in due ordini e infisse nella paraffina (fig. 6). Le lastrine sono contrassegnate da numeri progressivi.

Fig. 6.

La prima e l'ultima lastrina sono collegate ai poli della batteria di quattro Daniell e al potenziometro. Il polo + della batteria di carica del condensatore di misura è riunito ad una pinza metallica che può serrare una qualunque delle lastrine. Così lo spostamento di questa pinza da una lastrina alla successiva porta nel potenziale di carica una variazione di $\frac{1}{100}$ della tensione misurata col potenziometro.

10. *Potenziometro.* — Il potenziometro che ci ha servito a misurare la tensione agli estremi del riduttore di potenziale è quello di grande modello fornito da Hartmann e Braun con campione Weston. Come galvanometro abbiamo usato una bus-

sola di Wiedemann. L'apparecchio permette di determinare la tensione con 6 cifre significative; noi ci siamo limitati a mantenerne quattro, facendo però in modo che l'errore non superasse la mezza unità dell'ultimo ordine conservato.

Le tensioni da noi misurate col potenziometro ai capi di R sono dell'ordine di 4 volta circa: quindi l'errore assoluto della determinazione riesce inferiore a 0,0005.

11. *Misura della densità dei gas.* — Contemporaneamente alla misura della costante dielettrica si è fatta la misura della densità. A tal fine il recipiente che contiene il condensatore di confronto è stato messo in comunicazione con un densimetro che uno di noi ha descritto diffusamente in una nota a parte⁴⁾. Per comprendere il significato delle misure che saranno riferite nel presente lavoro, ricordiamo che, secondo il metodo adottato, un volume v di gas compresso alla densità da determinare e separato in una camera (camera di compressione), è dilatato in un volume $V + v$; e dalla pressione H del gas così dilatato, oltre che dalla pressione h preesistente all'espansione nel volume V si deduce come valore della densità cercata

$$(3) \quad d = \frac{(V+v)}{v} - \frac{H}{76} \frac{1}{1+\alpha t} - \frac{V}{v} \frac{h}{76} \frac{1}{1+\alpha t},$$

dove t è la temperatura centigrada del gas, α il coefficiente di dilatazione dei gas. H e h sono misurati in cm.

Nelle presenti ricerche si hanno i seguenti valori delle costanti

$$\begin{aligned} V &= 921,75 \text{ cm}^3 \text{ a } 10^0,5; \text{ coeff. di dilat. cubica del rec.} \\ &\quad \text{(vetro)} = 0,00002549. \\ v &= 3,4770 \text{ cm}^3 \text{ a } 0^0; \text{ coeff. di dilat. cubica del rec.} \\ &\quad \text{(acciaio)} = 0,0000333. \end{aligned}$$

⁴⁾ Occhialini. « Un densimetro per alte pressioni ». *Nuovo Cimento*, Vol. 4, 1912.

III. Andamento delle esperienze e risultati.

12. *Modo di procedere nelle esperienze.* — Ogni determinazione esigea due gruppi di operazioni, quelle della densità e quelle della c. d.; e due sperimentatori le eseguivano contemporaneamente. Le misure si iniziavano quando si era sicuri dell'equilibrio di temperatura nel gas; a tal fine, dopo aver compresso il gas, o dopo averlo fatto uscire dal recipiente che racchiudeva il condensatore di misura, si aspettava sempre un tempo adeguato.

Non ripetiamo qui le operazioni necessarie per la misura della densità, perchè sono state esposte minuziosamente nella nota citata. Per la misura della c. d. lo sperimentatore che osservava la scala riflessa nello specchio dell'elettrometro, manovrava mediante cordicelle il commutatore, e sulla deviazione che assumeva l'apparecchio allorchè si effettuava la mescolanza delle cariche indotte, regolava lo spostamento dell'estremo della batteria lungo il riduttore di potenziale R (fig. 1). Per tentativi si arrivava a trovare due lastre successive alle quali corrispondevano deviazioni opposte dell'elettrometro. Allora si leggevano le due deviazioni suddette e subito dopo si determinava col potenziometro la tensione agli estremi del riduttore di potenziale. Tutti questi risultati si scrivevano nelle colonne di un quadro, insieme con i dati relativi alla densità.

Quando la pressione nell'interno del recipiente era quella atmosferica, si eseguiva la determinazione che si potrebbe chiamare di zero nella scala del riduttore R. Questa determinazione si eseguiva talvolta prima di incominciare le misure, talvolta dopo averle fatte tutte, quando cioè il condensatore veniva a ritrovarsi nelle condizioni iniziali. È stato riscontrato che il potenziale di carica alla pressione ordinaria rimaneva sempre costante quando non si operavano di proposito spostamenti nei condensatori. Così si aveva la sicurezza che durante la compressione il condensatore non subiva deformazioni permanenti. Per giungere a questo risultato si sono fatti molti vani tentativi nella costruzione del condensatore di misura, tentativi dei quali sarebbe eccessivamente lungo parlare.

Si è usato sempre procedere per densità decrescenti portando subito la pressione al massimo da raggiungere, e riducendola poi a grado a grado col far uscire il gas. Questo procedimento fu preferito a quello delle serie a pressioni crescenti perchè riusciva incomodo mettere in moto troppo spesso il compressore situato molto lontano dal laboratorio in cui si facevano le misure. L'aria è stata fatta passare attraverso a colonne di idrato calcico e di idrato sodico per privarla dell'umidità e dell'anidride carbonica. La perfetta secchezza dell'aria era controllata durante le misure in modo molto semplice; giacchè la minima traccia di umidità portava una diminuzione notevole nell'isolamento, sì da rendere incerte le misure.

Come temperatura del gas circondante il condensatore di misura si è assunta quella della camera di compressione del densimetro.

13. *Calcolo del potenziale di carica.* — Siano n e $n+1$ i numeri d'ordine dell'ultima spira per difetto e della prima per eccesso del riduttore di potenziale in una particolare determinazione (§ 12); i numeri si intendono contati a partire dal capo connesso al polo negativo e alla terra. Siano poi δ_n e δ_{n+1} i valori assoluti delle deviazioni dell'elettrometro corrispondenti alle due spire suddette. Il punto della $(n+1)^{\text{ma}}$ spira in corrispondenza del quale l'elettrometro rimarrebbe immobile può essere calcolato per interpolazione, e dista dal principio della spira stessa di una frazione di spira data da $\frac{\delta_n}{\delta_n + \delta_{n+1}}$; sicchè fra il principio del riduttore di potenziale R e il punto di equilibrio sono comprese

$$N = n + \frac{\delta_n}{\delta_n + \delta_{n+1}} \text{ spire.}$$

E siccome $\delta_n + \delta_{n+1} = 20$ mm. circa, e l'incertezza della lettura può essere al massimo di 1 millimetro, segue che l'errore massimo di cui può essere affetto N è 0,05.

Ora chiamiamo con P la tensione agli estremi di R . Il potenziale del polo positivo della batteria di carica quando l'elettrometro resta in riposo è

$$+ \frac{P}{100} N.$$

La differenza di potenziale agli estremi della batteria inducente è in valore assoluto 40,75 volta, quindi il potenziale dell'estremo negativo connesso all'armatura inducente è

$$- 40,75 + \frac{P}{100} N.$$

Per esempio se in una determinazione a pressione ordinaria è risultato che sulla 5^a lastrina si ha una deviazione dell'elettrometro in un senso di 16 divisioni della scala, mentre sulla 6^a lastrina se ne ha una di 3 divisioni nel senso opposto, bisogna porre

$$n = 5 \quad \delta_n = \delta_5 = 16 \quad \delta_{n+1} = \delta_6 = 3.$$

Se, d'altra parte, la determinazione potenziometrica ha fornito come valore di P volta 4,078, la formula precedente dà come potenziale di carica del condensatore di misura

$$- 40,75 + \frac{4,078}{100} \left(5 + \frac{16}{19} \right) = - 40,51.$$

Il calcolo del potenziale di carica comporta un'approssimazione di 0,005 (§ 8).

14. *Determinazione di $\Delta \pi$.* — Calcolato il potenziale π_0 relativo all'equilibrio quando il condensatore di misura era alla pressione ordinaria, e quello π relativo alla pressione generica, il valore $\Delta \pi$ è dato da

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \pi_0 - \pi = - 40,75 + \frac{P}{100} N_0 + 40,75 - \frac{P}{100} N = \\ &= \frac{P}{100} (N_0 - N). \end{aligned}$$

Sappiamo ora che N e N_0 sono approssimati a meno di 5 unità della seconda decimale (§ 13); quindi $N_0 - N$ comporta l'incertezza massima di 1 unità nella prima decimale: d'altra parte P è affetto al massimo da un errore di 0,0005 (§ 10), quindi l'errore assoluto di $\Delta \pi$ è

$$\delta \Delta \pi = \frac{P}{100} \delta (N_0 - N) + \frac{N_0 - N}{100} \delta P < \frac{4}{1000}.$$

15. *Approssimazione nel calcolo della costante dielettrica.*
— L'approssimazione data dalla formula (2)

$$K = K_0 + \frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi}$$

dipende soltanto dal termine $\frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi}$.

Ora si ha

$$\delta \frac{\Delta \pi}{\pi_0 - \Delta \pi} = \frac{(\pi_0 - \Delta \pi) \delta \Delta \pi + \Delta \pi \delta (\pi_0 - \Delta \pi)}{(\pi_0 - \Delta \pi)^2} < \frac{1}{5000}.$$

Quindi il valore della costante dielettrica ha un'incertezza che, anche nel caso più sfavorevole, non raggiunge 2 unità del 4° ordine decimale; noi conserveremo perciò quattro cifre decimali.

16. *Influenza delle deformazioni del condensatore.* — Una causa sistematica di errore si ha nelle deformazioni elastiche delle armature e dei sostegni per effetto della pressione. La compressione dei sostegni di ebanite è stata studiata da noi direttamente ed è risultata inferiore a 10^{-4} della lunghezza dei sostegni stessi. Questo accorciamento produce uno spostamento degli assi delle armature, e quindi una variazione relativa della capacità, che calcolata secondo la formula di W. Thomson ¹⁾ risulta di 0,000005, assolutamente trascurabile nel nostro ordine di approssimazione.

¹⁾ Vedi Wiedemann. *Elektricität*. I, pag. 106, 1893.

Per quanto si riferisce alla compressione delle armature, questa produce una diminuzione di capacità per due ragioni: 1°) perchè raccorcia la loro lunghezza; 2°) perchè aumenta il raggio r_2 dell'armatura esterna, mentre diminuisce quello r_1 dell'armatura interna. Assumendo come coefficiente di compressibilità lineare dell'ottone $0,3 \cdot 10^{-6}$, si ha che l'accorciamento delle armature per 200 atmosfere e per unità di lunghezza è $6 \cdot 10^{-8}$; e, data la proporzionalità fra la capacità e la lunghezza, risulta che la variazione relativa della capacità è di 0,00006.

La diminuzione di capacità conseguente alle variazioni dei raggi r_1 e r_2 delle due armature risulta dalla formula dei condensatori cilindrici

$$C = \frac{l}{2 \log \frac{r_2}{r_1}}.$$

Lo spessore delle armature è di 1 mm., quindi per 200 atmosfere i due raggi diventano $r_1 - 0,00006$ mm. e $r_2 + 0,00006$ e la capacità diventa

$$C' = \frac{l}{2 \log \frac{r_2 + 0,00006}{r_1 - 0,00006}}$$

ossia

$$\frac{C'}{C} = \frac{\log \frac{r_2}{r_1}}{\log \frac{r_2 + 0,00006}{r_1 - 0,00006}}.$$

Ponendo per $r_1 = 24$, $r_2 = 26$ si ha

$$\frac{C'}{C} = \frac{\log \frac{26}{24}}{\log \frac{26 + 0,00006}{25 - 0,00006}} = 0,99994.$$

Ciò porta una variazione relativa della capacità

$$\frac{C - C'}{C} = 0,00006,$$

che unita alla precedente dà 0,00012. Così verso 200 atmosfere la correzione dovuta alla deformazione del condensatore intacca l'ultima cifra conservata che va diminuita di un'unità.

Per pressioni inferiori a 150 la correzione non intaccherebbe le cifre conservate.

17. *Risultati numerici.* — Qui sotto riportiamo le tabelle dei risultati sperimentali. Queste tabelle comprendono i seguenti dati per ordine di scrittura

t_1 = Temperatura del gas compresso.

t_2 = Temperatura del gas dopo la dilatazione nel densimetro.

H = Pressione in cm. di Hg. del gas dopo la dilatazione.

h = Pressione iniziale nel volume V (nel nostro caso è stata sempre uguale alla pressione barometrica).

P = Tensione agli estremi del riduttore di potenziale.

N = Numero delle spire e frazione di spira comprese fra il principio del riduttore e il punto corrispondente all'equilibrio.

$\Delta\pi$ = Differenza fra il potenziale di carica a pressione ordinaria e quello a pressione generica.

π_0 = Potenziale di carica alla pressione ordinaria.

d = Densità calcolata secondo la formula (3).

K = Costante dielettrica rispetto al vuoto dato dalla formula (2).

Ogni tabella comprende i risultati delle misure eseguite comprimendo una sola volta l'aria nel recipiente. Si è ritenuto che il potenziale π_0 corrispondente alla pressione ordinaria coincidesse con quello corrispondente a 76 cm., giacchè il nostro metodo, con la sua sensibilità, permetterebbe di rivelare variazioni di pressione non minori di 0,1 atmosfera.

Siccome π_0 e $\Delta\pi$ sono ambedue negativi, non si ha nessun errore nel calcolo di K mettendo i loro valori assoluti. Perciò questi soltanto sono stati riportati nelle tabelle.

TABELLA I.

t_1	t_2	H	h	P	N	$\Delta \pi$	π_0	d	K
20,3	20,8	122,441	75,790	4,170	84,90	3,398	—	152,6	1,0917
20,3	20,8	122,419	75,790	4,170	84,80	3,394	—	152,5	1,0918
20,3	20,9	122,339	75,780	4,170	84,80	3,394	—	152,3	1,0917
20,4	21,0	122,270	75,780	4,173	84,70	3,393	—	152,2	1,0917
—	—	75,780	75,780	4,173	3,40	—	40,61	—	—

TABELLA II.

17,4	18,2	128,951	76,262	4,125	98,30	3,829	—	173,8	1,1049
17,5	18,5	128,881	76,262	4,116	98,50	3,828	—	173,4	1,1048
17,8	18,7	128,917	76,240	4,111	98,60	3,827	—	173,4	1,1048
17,8	19,0	117,824	76,240	4,110	80,30	3,074	—	137,1	1,0826
17,9	19,2	117,710	76,240	4,111	80,05	3,065	—	136,7	1,0824
18,0	19,3	104,998	76,240	4,115	59,15	2,208	—	94,94	1,0581
18,1	19,6	104,404	76,240	4,119	57,25	2,132	—	92,90	1,0561
18,3	19,8	93,815	76,240	4,120	38,40	1,346	—	58,29	1,0349
18,3	19,9	93,857	76,250	4,116	38,45	1,357	—	58,41	1,0352
—	—	76,250	76,250	4,116	5,50	—	40,52	—	—

TABELLA III.

t_i	t_a	H	h	P	N	$\Delta\pi$	π_0	d	K
—	—	76,032	76,032	4,078	5,80	—	40,52	—	—
17,1	17,7	128,866	76,032	4,078	99,70	3,831	—	174,6	1,1050
17,2	17,8	128,778	76,022	4,074	99,20	3,805	—	174,3	1,1042
17,3	18,1	118,140	76,022	4,084	81,50	3,093	—	139,2	1,0831
17,4	18,3	118,144	76,022	4,080	81,35	3,084	—	139,1	1,0830
17,5	18,4	104,106	76,012	4,076	57,90	2,125	—	93,06	1,0559
17,4	18,1	103,900	75,922	4,084	56,70	2,080	—	92,77	1,0547
17,5	18,3	93,379	75,922	4,089	38,30	1,331	—	58,13	1,0345
17,6	18,5	93,379	75,922	4,089	38,30	1,331	—	58,16	1,0345
—	—	75,922	75,922	4,090	5,70	—	40,52	—	—

TABELLA IV.

—	—	75,923	75,923	4,090	5,70	—	40,52	—	—
17,7	18,6	111,386	75,923	4,082	69,80	2,616	—	117,1	1,0696
17,8	18,7	111,303	75,923	4,084	69,70	2,614	—	116,8	1,0695
17,8	18,8	111,243	75,923	4,085	69,50	2,606	—	116,6	1,0693

TABELLA V.

t_1	t_2	H	h	P	N	$\Delta \pi$	π_0	d	K
16,6	17,1	128,238	76,033	4,087	98,40	3,786	—	172,3	1,1036
16,7	17,3	128,056	76,033	4,091	97,90	3,769	—	171,6	1,1031
16,8	17,5	117,388	76,033	4,092	80,30	3,050	—	136,9	1,0820
16,8	17,5	117,257	76,033	4,095	80,20	3,048	—	136,5	1,0819
16,9	17,7	104,766	76,033	4,096	58,75	2,170	—	95,38	1,0569
17,0	17,9	104,742	76,033	4,096	58,75	2,170	—	95,35	1,0569
17,1	18,2	93,679	76,033	4,097	38,80	1,354	—	58,84	1,0350
17,2	18,3	93,669	76,033	4,097	38,80	1,354	—	58,78	1,0350
—	—	76,033	76,033	4,097	5,65	—	40,51	—	—

TABELLA VI.

—	—	75,873	4,070	5,90	—	—	—	—	—
17,1	17,9	118,146	4,070	82,25	3,108	—	—	139,8	1,0836
17,2	18,2	118,144	4,068	82,10	3,100	—	—	139,6	1,0834
17,3	18,2	103,751	4,072	57,25	2,092	—	—	92,35	1,0552
17,4	18,3	103,747	4,080	57,15	2,091	—	—	92,30	1,0551
17,5	18,5	92,624	4,095	37,25	1,285	—	—	55,84	1,0333

18. — Ci riserbiamo di discutere in seguito la relazione fra costante dielettrica e densità: ma fin d'ora possiamo ammettere che dentro piccoli intervalli sia verificata la formula

$$\frac{K - 1}{d} = \text{costante}.$$

Di questa formula ci siamo serviti per riportare i valori della c. d. dati nelle tabelle precedenti ad alcuni punti fissi e precisamente alle densità di 60, 95, 115, 140, 150, 175. In tal modo abbiamo ottenuto le medie riportate nella seguente tabella che si riferisce a temperature comprese fra 17° e 20° C.

TABELLA VII (medie).

Densità <i>d</i>	Costante dielettrica <i>K</i>
60	1,0357
95	1,0567
115	1,0684
140	1,0839
150	1,0903
175	1,1053

19. *Influenza degli errori accidentali sulle misure della costante dielettrica.* — Abbiamo visto (§ 15) che la limitazione dell'esattezza proveniente dalla limitata sensibilità degli apparecchi è inferiore 2 unità del 4° ordine nelle misure di c. d. Ora restano da considerare gli errori che provengono da quel complesso di cause accidentali che sfuggono ad ogni apprezzamento.

Per questi non c'è che esaminare una serie di determinazioni relative alla stessa densità e dedurre l'error medio di ogni singola determinazione.

Alla densità 173,3 si sono ottenuti i seguenti valori di K

K	Scostamenti dalla media	quadrati
1,1046	+ 0,0003	0,00000009
1,1047	+ 4	16
1,1047	+ 4	16
1,1042	— 1	1
1,1037	— 6	36
1,1042	— 1	1
1,1040	— 3	9
<hr/> Media 1,1043		<hr/> 0,00000088

Error medio di ogni determinazione $\sqrt{\frac{0,00000088}{6}} < 0,0004$

» » della media $\sqrt{\frac{0,00000088}{6 \times 7}} < 0,00015$.

Di qui risulta che i valori della costante dielettrica che figurano nelle tabelle I . . . VI sono affetti da un errore che può raggiungere 4 unità del 4° ordine; ma che i valori delle medie (tabella VII) non raggiungono 2 unità dello stesso ordine come era risultato nell'analisi *a priori* fatta al § 15.

IV. Conclusioni.

20. *Indice di rifrazione e costante dielettrica.* — Mettiamo qui sotto a confronto i quadrati dell'indice di rifrazione trovati dal Magri ¹⁾ con i valori della costante dielettrica trovati dal Tangl ²⁾ e da noi alle diverse densità.

¹⁾ L. Magri. *N. Cim.* 7, p. 81, 1904.

²⁾ *l. c.*

d	K	n^2 (Magri)	K (Tangl)
60	1,0357	1,0357	1,0346
95	1,0567	1,0571	1,0553
115	1,0684	1,0692	—
140	1,0839	1,0847	—
150	1,0903	1,0907	—
175	1,1053	1,1061	—

I valori della $c. d.$ riescono costantemente inferiori ai corrispondenti valori dell'indice di rifrazione ma le differenze sono piccolissime e non superano mai 8 unità della quarta decimale. Quindi possiamo ritenere verificata la relazione di Maxwell con un' approssimazione finora non raggiunta.

21. *Costante dielettrica e densità.* — Fra le relazioni proposte per stabilire un legame tra la $c. d.$ e la densità ricordiamo quella di Clausius-Mossotti

$$\frac{K - 1}{K + 2} \frac{1}{d} = \text{costante},$$

la quale è stata dedotta in base alla teoria di Mossotti sulla costituzione dei dielettrici, ed è stata ritrovata dal Lorentz mediante le teorie elettroniche. Una formula approssimata della precedente è

$$\frac{K - 1}{d} = \text{costante}.$$

Nella seguente tabella riportiamo i valori di questi due rapporti alle diverse densità:

d	$\frac{K-1}{K+2} \cdot \frac{1}{d} \cdot 10^6$	$\frac{K-1}{d} \cdot 10^6$
60	196	596
95	195	597
115	194	595
140	194	599
150	195	602
175	194	602

L' uno e l' altro rapporto si mantengono costanti a meno dell' 1%. Ma il secondo mostra una tendenza a crescere che non si verifica nel primo. Ciò appare tanto più importante quando si ricordi che il Magri ha trovato una spiccata tendenza a crescere nel rapporto $\frac{n^2-1}{d}$ mentre ha riscontrato costante e uguale a 196 il rapporto $\frac{n^2-1}{n^2+1} \frac{1}{d} \cdot 10^6$.

Notevole poi è la coincidenza del valore del primo rapporto col numero 195 stabilito da Klemencic coi dati relativi alla pressione ordinaria.

Il contributo portato da ciascuno di noi nella presente ricerca è stato diviso come segue :

È dovuto all' Occhialini :

- 1°) la preparazione della ricerca, la scelta del metodo e degli apparecchi;
- 2°) la costruzione del condensatore di misura e delle parti soggette alla pressione ;
- 3°) la misura degli elementi per il calcolo della densità ;
- 4°) la discussione delle approssimazioni.

È dovuto al Bodareu :

- 1°) tutta la disposizione della parte elettrica ;

- 2°) la costruzione del commutatore e del riduttore di potenziale ;
- 3°) la misura degli elementi per il calcolo della costante dielettrica ;
- 4°) i calcoli della densità e della costante dielettrica.

Concludendo, compiamo il gradito dovere di ringraziare l' On. Prof. Battelli per i larghi mezzi di ricerca che ha messo a nostra disposizione.

Istituto Fisico di Pisa

Ottobre 1912.