RICERCHE SULLA DEFORMAZIONE DELLE QUADRICHE.

Memoria di **Luigi Bianchi** (Pisa).

Adunanza del 13 maggio 1906.

Le ricerche che espongo nel presente lavoro apportano nuovi complementi alla teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche, in particolare agli studi sulla deformazione delle quadriche rotonde e dei paraboloidi che ho sviluppato in due Memorie recenti *). Una prima parte del presente scritto tratta delle superficie (reali) applicabili sul paraboloide a parametri puramente immaginari (positivi):

$$(1) \quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2\sqrt{-1} \cdot z$$

ed estende alle deformate di questo paraboloide i metodi di trasformazione esposti nella Memoria (B) per i paraboloidi reali. Le formole relative a questo nuovo caso vengono qui dedotte da quelle per le trasformazioni di BÄCKLUND per le superficie a curvatura costante negativa dello spazio ellittico, utilizzando il nuovo metodo di WEINGARTEN per la ricerca di classi di superficie applicabili.

Con un procedimento analogo, si potrebbero dedurre le formole della Memoria (B) per le trasformazioni delle deformate dei paraboloidi reali da quelle delle trasformazioni di BÄCKLUND per le superficie di curvatura costante, immerse in uno spazio ellittico od iperbolico, ma col ds^2 indefinito.

Ritornando all'attuale paraboloide (1), è da notarsi il caso del paraboloide rotondo $p = q$. Le sue deformate formano la classe completa delle superficie, già determinate da WEINGARTEN nelle sue prime ricerche, che sono le evolute delle superficie coi raggi principali di curvatura legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = \text{sen}(r_1 + r_2),$$

e le superficie corrispondenti dello spazio ellittico sono quelle a curvatura assoluta nulla.

*) (A) *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie III, t. XIV (1905), pp. 1-73].

(B) *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi* [Annali di Matematica, serie III, t. XII (1906), pp. 263-344].

Nel testo verranno citate come *Memoria (A)* e *Memoria (B)*.

Nella seconda parte dò una nuova estensione alla teoria delle trasformazioni delle deformate delle quadriche, dimostrando che *esistono classi di congruenze rettilinee W colle due falde della superficie focale applicabili sopra due quadriche diverse*. Fino ad ora le congruenze W , che davano l'elemento essenziale geometrico per le trasformazioni, avevano le due falde focali applicabili *sulla medesima quadrica*. Colla nuova estensione effettuiamo il passaggio dalle deformate di una quadrica alle deformate di un'altra quadrica. In questi primi studi stabilisco una relazione di siffatta natura, fra le superficie applicabili sulle quadriche di rotazione attorno all'asse focale e le deformate (reali) di quelle quadriche immaginarie di DARBOUX che sono tangenti al circolo immaginario all'infinito. In particolare, si passa così dalle deformate del paraboloide rotondo alla classe di superficie, determinata da WEINGARTEN, coll'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + (2u + 2v + e^{2u})dv^2,$$

e caratterizzate da DARBOUX come applicabili sopra un paraboloide immaginario tangente al circolo all'infinito.

Dimostro poi l'esistenza, nella solita generalità, di congruenze W colle due falde applicabili sopra una medesima quadrica di DARBOUX, e da ultimo considero l'esempio semplicissimo, ma istruttivo, delle congruenze le cui due falde focali sono quadriche proiettive.

§ 1.

Le superficie pseudosferiche dello spazio ellittico e le deformate del paraboloide a parametri immaginari.

Nello spazio ellittico, la cui curvatura K_0 poniamo per semplicità $= +1$, consideriamo una superficie pseudosferica Σ , la cui curvatura (relativa) $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ sia costante negativa $= -\frac{1}{a^2}$. Riferiamo la superficie Σ alle sue linee di curvatura u, v e, applicando le formole generali della geometria ellittica (cfr. i §§ 213-215 delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II), avremo dapprima le formole seguenti: Essendo θ una funzione di u, v , soluzione della equazione del 2° ordine

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = (1 - a^2) \sin \theta \cos \theta,$$

l'elemento lineare di Σ sarà dato da

$$(3) \quad ds^2 = a^2 (\cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2)$$

e le curvature principali avranno i valori

$$(4) \quad \frac{1}{\rho_1} = -\frac{\cot \theta}{a}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{a}.$$

Indicando poi con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di WEIERSTRASS di un punto mo-

bile sopra Σ , con $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$, quelle del piano tangente e con $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ quelle dei due piani principali, ricordiamo che il determinante

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

è ortogonale destrorso ($= +1$) e per gli elementi di ciascuna sua colonna valgono le formole fondamentali seguenti:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = a \cos \theta \cdot \eta, & \frac{\partial \xi}{\partial u} = \sin \theta \cdot \eta, & \frac{\partial \eta}{\partial u} = -a \cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot \xi + \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot \zeta, & \frac{\partial \zeta}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot \eta, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = a \sin \theta \cdot \zeta, & \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\cos \theta \cdot \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \zeta, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} = -a \sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot \xi - \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \eta. \end{cases}$$

Applicando ora il metodo di WEINGARTEN esteso alla geometria ellittica *), deduciamo dalle superficie pseudosferiche Σ una classe di superficie S dello spazio euclideo applicabili l'una sull'altra nel modo seguente. Le tre espressioni

$$(7) \quad dy_i = x_i dx_0 + a^2 \xi_i d\xi_0$$

sono tre differenziali esatti in forza delle (6), e interpretando y_1, y_2, y_3 come coordinate cartesiane ortogonali di un punto mobile nello spazio euclideo, questo punto (y_1, y_2, y_3) descrive una superficie S d'elemento lineare fisso

$$(8) \quad ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 = (1 - x_0^2) dx_0^2 - 2a^2 x_0 \xi_0 dx_0 d\xi_0 + a^4 (1 - \xi_0^2) d\xi_0^2.$$

Possiamo scrivere

$$ds_i^2 = dx_0^2 + a^4 d\xi_0^2 - (x_0 dx_0 + a^2 \xi_0 d\xi_0)^2,$$

e, ponendo

$$X = x_0, \quad Y = a^2 \xi_0, \quad Z = i \frac{x_0^2 + a^2 \xi_0^2}{2},$$

si vede che questo ds_i appartiene al paraboloide:

$$X^2 + \frac{Y^2}{a^2} + 2iZ = 0$$

con parametri puramente immaginari (vedi *Lezioni*, vol. II, pag. 251). Esprimendo le (7) per le variabili u, v , si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial u} = a(\cos \theta \cdot x_i + a \sin \theta \cdot \xi_i) \eta_0 \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} = a(\sin \theta \cdot x_i - a \cos \theta \cdot \xi_i) \zeta_0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

*) Cfr. la mia Memoria: *Alcune ricerche di geometria non euclidea* [Annali di Matematica, serie III, t. II (1899), pp. 95-126].

e da queste derivando otteniamo per le (6):

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 y_i}{\partial u^2} = a(\cos \theta. x_i + a \sin \theta. \xi_i) \frac{\partial \eta_0}{\partial u} - a(\sin \theta. x_i - a \cos \theta. \xi_i) \frac{\partial \theta}{\partial u} \eta_0 + a^2 \eta_i \eta_0, \\ \frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v} = a(\cos \theta. x_i + a \sin \theta. \xi_i) \frac{\partial \eta_0}{\partial v} - a(\sin \theta. x_i - a \cos \theta. \xi_i) \frac{\partial \theta}{\partial v} \eta_0, \\ \frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v} = a(\sin \theta. x_i - a \cos \theta. \xi_i) \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + a(\cos \theta. x_i + a \sin \theta. \xi_i) \frac{\partial \theta}{\partial u} \zeta_0, \\ \frac{\partial^2 y_i}{\partial v^2} = a(\sin \theta. x_i - a \cos \theta. \xi_i) \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} + a(\cos \theta. x_i + a \sin \theta. \xi_i) \frac{\partial \theta}{\partial v} \zeta_0 + a^2 \zeta_i \zeta_0; \end{cases}$$

dove l'eguaglianza dei due valori per $\frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v}$ risulta dalle (6) e dimostra appunto che le condizioni d'integrabilità pel sistema (9) sono soddisfatte. Dalle (10) calcoliamo la seconda forma quadratica fondamentale per la S ,

$$D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2,$$

nel modo seguente. Pei coseni di direzione Y_1, Y_2, Y_3 della normale alla S abbiamo dalle (9):

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2 - \xi_0^2}} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2 - \xi_0^2}} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix},$$

$$Y_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2 - \xi_0^2}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix},$$

e calcolando dalle (10) i valori

$$D = \sum_{i=1}^3 Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial u^2}, \quad D' = \sum_{i=1}^3 Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \sum_{i=1}^3 Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial v^2},$$

col ricordare che il determinante (5) è ortogonale destrorso, troviamo:

$$(11) \quad D = - \frac{a^2 \eta_0 \zeta_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - \xi_0^2}}, \quad D' = 0, \quad D'' = \frac{a^2 \eta_0 \zeta_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - \xi_0^2}}.$$

Essendo dunque $D' = 0$, $D = -D''$, vediamo che le linee (u, v) di S , corrispondenti alle linee di curvatura di Σ , tracciano sopra S un sistema coniugato anti-isotermo. Facilmente si dimostrerebbe poi che questo sistema coniugato di S è quello che si conserva coniugato nella corrispondenza per applicabilità della S sul paraboloide immaginario.

§ 2.

Le trasformazioni di Bäcklund delle superficie Σ e le corrispondenti delle superficie S .

Applicando alla superficie pseudosferica Σ dello spazio ellittico una trasformazione di BÄCKLUND B_σ , si ottiene una nuova superficie pseudosferica Σ' , che forma insieme con Σ le due falde di una congruenza (pseudosferica), nella quale è costante $= \sigma$ l'an-

golo dei due piani focali, ed è pure costante la distanza τ dei due fuochi e legata a σ dalla relazione

$$(12) \quad \text{sen } \tau = a \text{ sen } \sigma^*).$$

Indicando con accenti le quantità relative alla Σ' , le formole pel passaggio da Σ a Σ' sono le seguenti. Le funzioni θ , θ' , soluzioni della (2), sono legate dalle relazioni del 1° ordine:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta'}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = a \cot \tau \cos \theta \text{ sen } \theta' - \cot \sigma \text{ sen } \theta \cos \theta', \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = -a \cot \tau \text{ sen } \theta \cos \theta' + \cot \sigma \cos \theta \text{ sen } \theta', \end{cases}$$

e per gli elementi relativi a Σ' abbiamo le formole:

$$(14) \quad \begin{cases} x' = \cos \tau \cdot x + \text{sen } \tau \cos \theta' \cdot \eta + \text{sen } \tau \text{ sen } \theta' \cdot \zeta, \\ \xi' = \cos \sigma \cdot \xi + \text{sen } \sigma \text{ sen } \theta' \cdot \eta - \text{sen } \sigma \cos \theta' \cdot \zeta, \\ \eta' = -\text{sen } \tau \cos \theta \cdot x - \text{sen } \sigma \text{ sen } \theta \cdot \xi + (\cos \tau \cos \theta \cos \theta' + \cos \sigma \text{ sen } \theta \text{ sen } \theta') \cdot \eta \\ \quad + (\cos \tau \cos \theta \text{ sen } \theta' - \cos \sigma \text{ sen } \theta \cos \theta') \cdot \zeta, \\ \zeta' = -\text{sen } \tau \text{ sen } \theta \cdot x + \text{sen } \sigma \cos \theta \cdot \xi + (\cos \tau \text{ sen } \theta \cos \theta' - \cos \sigma \cos \theta \text{ sen } \theta') \cdot \eta \\ \quad + (\cos \tau \text{ sen } \theta \text{ sen } \theta' + \cos \sigma \cos \theta \cos \theta') \cdot \zeta. \end{cases}$$

Ora, come abbiamo dedotto colle (9) dalla Σ , per quadrature, una deformata S del paraboloide immaginario, così ne deduciamo una seconda S' dalla Σ' colle formole analoghe:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial y'_i}{\partial u} = a(\cos \theta' x'_i + a \text{ sen } \theta' \xi'_i) \cdot \eta'_0, \\ \frac{\partial y'_i}{\partial v} = a(\text{sen } \theta' x'_i - a \cos \theta' \xi'_i) \cdot \zeta'_0, \end{cases}$$

le quali, a causa delle (14), possono anche scriversi:

$$(15^*) \quad \begin{cases} \frac{\partial y'_i}{\partial u} = a(\cos \tau \cos \theta' \cdot x_i + a \cos \sigma \text{ sen } \theta' \cdot \xi_i + \text{sen } \tau \cdot \eta_i) \cdot \eta'_0, \\ \frac{\partial y'_i}{\partial v} = a(\cos \tau \text{ sen } \theta' \cdot x_i - a \cos \sigma \cos \theta' \cdot \xi_i + \text{sen } \tau \cdot \zeta_i) \cdot \zeta'_0. \end{cases}$$

Le due deformate S , S' del paraboloide immaginario sono definite, per quadrature, dalle rispettive (9) e (15) o (15*), a meno di una traslazione nello spazio per ciascuna. Ci proponiamo ulteriormente di dimostrare che, fissate in modo arbitrario le costanti additive in y_1 , y_2 , y_3 , si possono fissare quelle in y'_1 , y'_2 , y'_3 in guisa che S , S' vengano a costituire le due falde focali della congruenza formata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti (y_1, y_2, y_3) , (y'_1, y'_2, y'_3) , che sarà una congruenza W .

*) Per questa e per le seguenti formole nel testo, vedi la mia Memoria: *Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazi di curvatura costante* [Annali di Matematica, serie III, t. X (1904), pp. 95-145]. Cfr. in particolare il § 3.

§ 3.

**Le trasformazioni delle superficie applicabili
sul paraboloide immaginario.**

Per raggiungere il nostro scopo applicheremo il procedimento indicato in generale nella Memoria (B), § 12, cercando di determinare due funzioni l, m di u, v tali che sussistano le formole

$$(16) \quad y'_i = y_i + l \frac{\partial y_i}{\partial u} + m \frac{\partial y_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Basta ora identificare le derivate di y'_i date dalle (15*) con quelle che si traggono dalle (16), osservando le (10), § 1, per dedurne i valori di l, m :

$$l = \operatorname{sen} \sigma \frac{\eta'_0}{\eta_0}, \quad m = \operatorname{sen} \sigma \frac{\zeta'_0}{\zeta_0};$$

le (16) diventano quindi:

$$(17) \quad y'_i = y_i + \operatorname{sen} \tau [(\cos \theta x_i + a \operatorname{sen} \theta \xi_i) \eta'_0 + (\operatorname{sen} \theta x_i - a \cos \theta \xi_i) \zeta'_0].$$

Si verifica facilmente che le derivate delle y'_i calcolate da queste, avendo riguardo alle (6) ed alle analoghe per la superficie Σ' , combinano appunto con quelle fornite dalle (15*). Così, appena nota la S , le (17) fanno conoscere in termini finiti la superficie S' e le assegnano una tale posizione nello spazio che il punto (y'_i) di S' corrispondente al punto (y_i) di S giace nel piano tangente alla S in questo punto. Per dimostrare inversamente che (y_i) giace nel piano tangente in (y'_i) alla S' osserviamo che sussistono le identità

$$\begin{aligned} (\cos \theta x_i + a \operatorname{sen} \theta \xi_i) \eta'_0 + (\operatorname{sen} \theta x_i - a \cos \theta \xi_i) \zeta'_0 \\ = (\cos \theta' x'_i + a \operatorname{sen} \theta' \xi'_i) \eta_0 + (\operatorname{sen} \theta' x'_i - a \cos \theta' \xi'_i) \zeta_0, \end{aligned}$$

come segue dalle (14) e dalle identità

$$x_i x_0 + \xi_i \xi_0 + \eta_i \eta_0 + \zeta_i \zeta_0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Per ciò le (17) possono sciversi:

$$y_i = y'_i - \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{\eta_0}{\eta'_0} \frac{\partial y'_i}{\partial u} + \frac{\zeta_0}{\zeta'_0} \frac{\partial y'_i}{\partial v} \right),$$

e sotto questa forma dimostrano appunto che il punto (y_i) giace nel piano tangente in (y'_i) alla S' . Dunque le congiungenti i punti corrispondenti $(y_i), (y'_i)$ generano una congruenza di cui le superficie S, S' sono le due falde focali. Poichè inoltre il sistema (u, v) è coniugato anti-isotermo, tanto sopra S quanto sopra S' , si corrispondono sulle due falde focali tutti i sistemi coniugati, e la nostra congruenza è quindi una congruenza W . c. d. d.

Ora supponiamo data una qualunque deformata (reale) S del paraboloide a parametri immaginari. Ne risulterà determinata una corrispondente superficie pseudosferica

Σ dello spazio ellittico [Annali di Matematica, s. III, t. II (1899)], e poichè questa ammette ∞^2 trasformate di BÄCKLUND, avremo il teorema finale:

Ogni superficie (reale) S applicabile sul paraboloide immaginario

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2iz$$

appartiene, come prima falda della superficie focale, ad una doppia infinità di congruenze rettilinee W , le cui seconde falde sono applicabili sul paraboloide stesso.

Come si vede, è questo il medesimo teorema fondamentale che ho dimostrato nella Memoria (B) per le deformate dei parabolidi reali. In modo simile si potrebbe dimostrare il secondo teorema fondamentale (B), ricorrendo al teorema di permutabilità per le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche nello spazio ellittico.

Osserviamo ancora il caso particolare notevole ove si tratti del paraboloide rotondo (immaginario). Le sue deformate reali sono le evolute delle superficie di WEINGARTEN coi raggi principali di curvatura legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = \text{sen}(r_1 + r_2).$$

Il teorema superiore dimostra che esistono classi di congruenze W le cui due falde focali sono superficie di questa natura. Rammentando la costruzione di DARBOUX che fa dipendere queste superficie da quelle di traslazione con curve generatrici a torsione costante, eguali e di segno contrario, si potrebbe ricercare il significato delle nostre trasformazioni rispetto alle curve di torsione costante.

§ 4.

Il paraboloide rotondo ed il paraboloide immaginario di Weingarten.

Le congruenze W , che abbiamo introdotto fin qui nella teoria della deformazione delle quadriche, avevano le due falde focali applicabili sulla medesima quadrica. Ci proponiamo ora di stabilire l'esistenza di congruenze W colle due falde focali applicabili sopra quadriche *diverse*. Cominceremo dal dimostrare che in tale relazione stanno le deformate del paraboloide rotondo reale colle superficie, già determinate da WEINGARTEN, d'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + (2u + 2v + e^{2u}) dv^2,$$

e che DARBOUX ha caratterizzate *) come applicabili sul paraboloide immaginario

$$(18) \quad y_1(y_1 + iz_1) + x_1 = 0$$

tangente al circolo immaginario all'infinito. Per abbreviare chiameremo questa quadrica *il paraboloide di WEINGARTEN*.

Ponendo il parametro p del paraboloide rotondo $= 1$, ne scriveremo le equazioni

*) Vedi DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, pag. 334.

sotto la forma

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

ed avremo pel suo elemento lineare:

$$(19) \quad ds^2 = (\alpha^2 + 1)d\alpha^2 + 2\alpha\beta d\alpha d\beta + (\beta^2 + 1)d\beta^2.$$

Analogamente, se pel paraboloide (18) di WEINGARTEN poniamo

$$x_1 = \frac{\beta_1^2 - \alpha_1^2}{2}, \quad z_1 - iy_1 = \alpha_1 - \beta_1, \quad z_1 + iy_1 = 2\alpha_1,$$

il suo elemento lineare ds_1 prenderà la forma

$$(20) \quad ds_1^2 = (\alpha_1^2 + 2)d\alpha_1^2 - 2(\alpha_1\beta_1 + 1)d\alpha_1 d\beta_1 + \beta_1^2 d\beta_1^2.$$

Noi consideriamo le superficie S_1 reali, che per valori reali dei parametri α_1, β_1 , soggetti alla disequaglianza

$$2\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 1 > 0,$$

hanno l'elemento lineare (20); a queste superficie intendiamo riferirci quando parliamo delle deformate del paraboloide di WEINGARTEN.

Bisogna ora ricordare che la determinazione di ogni deformata S del paraboloide rotondo si ottiene nel modo seguente *). Essendo $\omega(u, v)$ una soluzione della equazione

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0,$$

si consideri il seguente sistema differenziale per le quattro funzioni incognite $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ di u, v :

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\operatorname{sen} \omega \cdot \lambda, & \frac{\partial \beta}{\partial u} = \cos \omega \cdot \lambda, & \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \operatorname{sen} \omega \cdot \alpha - \cos \omega \cdot \beta - \frac{\partial \omega}{\partial v} \mu, & \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} \lambda, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \cos \omega \cdot \mu, & \frac{\partial \beta}{\partial v} = \operatorname{sen} \omega \cdot \mu, & \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \mu, & \frac{\partial \mu}{\partial v} = \cos \omega \cdot \alpha + \operatorname{sen} \omega \cdot \beta + \frac{\partial \omega}{\partial u} \lambda; \end{cases}$$

questo sistema lineare è completamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$\mu^2 - \lambda^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \text{cost.}$$

Se prendiamo una quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ di soluzioni del sistema (A) tale che ne risulti

$$(A^*) \quad \mu^2 - \lambda^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 1,$$

avremo definita intrinsecamente una deformata S del paraboloide rotondo, sulla quale le linee (u, v) tracciano un sistema isoterma-coniugato coi seguenti valori pei coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale:

$$D = D'' = \frac{\lambda \mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}, \quad D' = 0.$$

*) Vedi la mia prima memoria: *Sulla deformazione dei paraboloidi* [Annali di Matematica, s. III, t. IX (1904), pp. 247-309].

In modo analogo, riferendoci ai risultati generali stabiliti al § 5 della memoria sopra citata, determiniamo intrinsecamente ogni superficie S_1 d'elemento lineare (20) nel modo seguente. Se $\theta(u, v)$ è una soluzione dell'equazione di LIOUVILLE

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + e^{-2\theta} = 0,$$

abbiamo il sistema *completo* di equazioni differenziali per le quattro funzioni incognite $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1$ di u, v :

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \cosh \theta \cdot \lambda_1, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial u} = \sinh \theta \cdot \lambda_1, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = (\beta_1 - \alpha_1) \sinh \theta - \beta_1 \cosh \theta - \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu_1, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda_1, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \sinh \theta \cdot \mu_1, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial v} = \cosh \theta \cdot \mu_1, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \mu_1, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial v} = (\beta_1 - \alpha_1) \cosh \theta - \beta_1 \sinh \theta - \frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda_1. \end{array} \right.$$

Questo sistema possiede l'integrale quadratico

$$2\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \lambda_1^2 - \mu_1^2 = \text{cost.}$$

e se prendiamo una tale quaderna $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ di soluzioni che si abbia

$$(B^*) \quad 2\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \lambda_1^2 - \mu_1^2 = 1,$$

ne risulta definita intrinsecamente una delle nostre superficie S_1 , sulla quale le linee u, v tracciano un sistema isoterma-coniugato coi valori

$$D_1 = D_1' = \frac{\lambda_1 \mu_1}{\sqrt{2\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 1}}, \quad D_1'' = 0$$

per i coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale.

§ 5.

Le trasformazioni intrinseche per le superficie S_1, S_1' .

Ora poniamo in relazione le due equazioni a derivate parziali (21) e (22) e i corrispondenti sistemi (A), (B) colle formole seguenti. Indicando con σ una costante arbitraria, consideriamo il sistema simultaneo di equazioni del 1° ordine

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = e^{-\theta} \sin(\omega - \sigma), \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} = e^{-\theta} \cos(\omega - \sigma), \end{array} \right.$$

dalle quali eliminando θ segue per ω l'equazione (21), ed eliminando ω segue invece per θ l'equazione (22) di LIOUVILLE. Ne risulta che se per ω poniamo nelle (23) una

soluzione delle (21), esse diventano compatibili per la funzione incognita θ , e la soluzione generale θ delle (23), che contiene oltre σ una nuova costante arbitraria, viene a soddisfare la (22). Similmente, ponendo nelle (23) per θ una soluzione della (22), abbiamo un sistema completamente integrabile per ω che viene a soddisfare alla (21).

Ciò posto, siano ω , θ due tali soluzioni, rispettivamente delle (21), (22), legate fra loro dalle (23), e prendiamo una quaderna qualsiasi $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ di soluzioni del sistema (A). Dimostriamo che le seguenti formole di sostituzione lineare

$$(C) \quad \begin{cases} \alpha_i = \cos \sigma \cdot \alpha + \sin \sigma \cdot \beta + \cosh \theta \cdot \lambda - \sinh \theta \cdot \mu, \\ \beta_i = \cos \sigma \cdot \alpha + \sin \sigma \cdot \beta + \sinh \theta \cdot \lambda - \cosh \theta \cdot \mu, \\ \lambda_i = \sin \omega \cdot \alpha - \cos \omega \cdot \beta - e^{-\theta} \sin(\omega - \sigma)(\lambda + \mu), \\ \mu_i = -\cos \omega \cdot \alpha - \sin \omega \cdot \beta + e^{-\theta} \cos(\omega - \sigma)(\lambda + \mu) \end{cases}$$

fanno passare ad una corrispondente quaderna del sistema (B). Questo si prova derivando effettivamente le (C) ed osservando le (A) e le (23); si vede allora che le (B) risultano identicamente verificate.

Ora le (C), risolte rapporto ad $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, danno il sistema equivalente:

$$(C^*) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \sigma \cdot (\alpha_i - \beta_i) + \sin \omega \cdot \lambda_i - \cos \omega \cdot \mu_i, \\ \beta = \sin \sigma \cdot (\alpha_i - \beta_i) - \cos \omega \cdot \lambda_i - \sin \omega \cdot \mu_i, \\ \lambda = \sinh \theta \cdot \alpha_i + (\cosh \theta - 2 \sinh \theta) \beta_i - e^{-\theta} [\sin(\omega - \sigma) \cdot \lambda_i - \cos(\omega - \sigma) \cdot \mu_i], \\ \mu = \cosh \theta \cdot \alpha_i + (\sinh \theta - 2 \cosh \theta) \beta_i + e^{-\theta} [\sin(\omega - \sigma) \cdot \lambda_i - \cos(\omega - \sigma) \cdot \mu_i]. \end{cases}$$

Da queste formole segue facilmente l'identità

$$\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2 - \mu^2 = \lambda_i^2 + \mu_i^2 - 2\beta_i^2 + 2\alpha_i\beta_i,$$

onde risulta ulteriormente che se la quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ soddisfa l'equazione in termini finiti (A*), la quaderna derivata $(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i)$ soddisferà alla sua volta la (B*).

Se partiamo dunque da una data deformata S del paraboloide rotondo e, prese le corrispondenti funzioni $\omega, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ di u, v , scegliamo una qualunque soluzione θ delle (23), indi mediante le (C) calcoliamo $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i$, avremo definita intrinsecamente una deformata S_i del paraboloide di WEINGARTEN. Di due tali deformate S, S_i del paraboloide rotondo e del paraboloide di WEINGARTEN, rispettivamente diremo che sono trasformate l'una dell'altra per mezzo di una B_σ .

§ 6.

Le congruenze W colle due falde focali S, S_i .

Colle formole precedenti noi abbiamo soltanto definita *intrinsecamente* la relazione fra le due superficie S, S_i trasformate per una B_σ . Ora vogliamo dimostrare che le superficie S, S_i di una tale coppia possono ogni volta collocarsi nello spazio in guisa che le congiungenti i loro punti corrispondenti $(x, y, z), (x_i, y_i, z_i)$ (corrispondenti ai medesimi valori di u, v) tocchino nel primo punto la S , nel secondo la S_i . Seguiremo

per ciò la via stessa indicata al § 12 della Memoria (B), e supponendo di avere già fissata la S nello spazio conosceremo x, y, z in funzione di u, v e cercheremo se si possono prendere per x_1, y_1, z_1 espressioni del tipo

$$x_1 = x + l \frac{\partial x}{\partial u} + m \frac{\partial x}{\partial v}$$

colle analoghe per y_1, z_1 , dove l, m siano convenienti funzioni di u, v . Mediante considerazioni simili a quelle svolte nella Memoria (B) (§ 14), troviamo

$$l = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad m = \frac{\mu_1}{\mu},$$

cioè

$$(24) \quad x_1 = x + \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Indicando con X, Y, Z i coseni di direzione della normale alla S , dalla derivazione delle (24) otteniamo:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = L \frac{\partial x}{\partial u} + M \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\mu \lambda_1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}} X, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\lambda \mu_1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}} X, \end{cases}$$

dove i coefficienti L, M, P, Q hanno i valori seguenti:

$$(26) \quad \begin{cases} L = \frac{\lambda_1}{\lambda} \left(\frac{\beta \cos \omega - \alpha \sin \omega}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \lambda - e^{-\theta} \sin(\omega - \sigma) \right), \\ M = \frac{\lambda_1}{\mu} \left(\frac{\beta \sin \omega + \alpha \cos \omega}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \lambda + e^{-\theta} \cos(\omega - \sigma) \right), \\ P = \frac{\mu_1}{\lambda} \left(\frac{\beta \cos \omega - \alpha \sin \omega}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \mu + e^{-\theta} \sin(\omega - \sigma) \right), \\ Q = \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{\beta \sin \omega + \alpha \cos \omega}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \mu - e^{-\theta} \cos(\omega - \sigma) \right). \end{cases}$$

Con calcoli del tutto simili a quelli eseguiti ai §§ 15, 16 della Memoria (B), si dimostra ora che la superficie luogo del punto (x_1, y_1, z_1) definita dalle (24) ha precisamente le equazioni intrinseche della nostra superficie S_1 . Osserviamo poi che dalle (26) seguono le identità:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_1} L - \frac{\mu}{\mu_1} P &= \frac{\lambda_1}{\lambda}, \\ \frac{\lambda}{\lambda_1} M - \frac{\mu}{\mu_1} Q &= \frac{\mu_1}{\mu}, \end{aligned}$$

le quali traggono seco le altre

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\mu}{\mu_1} \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Per ciò le (24) possono scriversi anche

$$(24^*) \quad x_i = x - \frac{\lambda}{\lambda_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\mu}{\mu_i} \frac{\partial x_i}{\partial v},$$

e ne risulta che le nostre formole assegnano appunto alle due superficie S, S_i una tale posizione relativa nello spazio che le rende le due falde focali della congruenza W generata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti.

Ciò posto, se supponiamo dapprima data la deformata S del paraboloide rotondo, saranno determinate le funzioni $\omega, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ di u, v e integrando le equazioni (23), lineari in e^θ , determineremo la funzione θ con due costanti arbitrarie. Le formole (24) daranno quindi ∞^2 trasformate S_i applicabili sul paraboloide di WEINGARTEN, che in effetto si riconosce facilmente essere tutte distinte, onde concludiamo:

α) Ogni deformata S del paraboloide reale rotondo appartiene, come prima falda della superficie focale, ad ∞^2 congruenze W , le cui seconde falde S_i sono applicabili sul paraboloide immaginario di WEINGARTEN.

Se invece supponiamo data una S_i , le sue trasformate S formano solo una semplice infinità, perchè se ω e σ si accrescono di una medesima costante, la S non cangia; dunque:

β) Ogni deformata (reale) S_i del paraboloide di WEINGARTEN appartiene, come prima falda focale, ad ∞^1 congruenze W , le cui seconde falde focali sono applicabili sul paraboloide rotondo.

§ 7.

Le quadriche di rotazione e le quadriche di Darboux.

I risultati a cui siamo pervenuti per le deformate del paraboloide rotondo possono estendersi alle altre quadriche di rotazione attorno all'asse focale (quadriche di GUICHARD), come ora ci proponiamo di dimostrare.

A tale scopo seguiremo qui una via, più breve, che utilizza le relazioni stabilite dai teoremi di GUICHARD fra le deformate delle quadriche di rotazione e le superficie di curvatura media (o di curvatura totale) costante. Nel caso particolare che questa curvatura media sia nulla otterremo così nuovamente i teoremi del § precedente pel paraboloide rotondo.

Porremo a base dei calcoli seguenti i risultati stabiliti nel Cap. X delle *Lezioni* (vol. II, §§ 303 e seg^{ti}), che converrà brevemente ricordare *). Partiamo da una superficie Σ di curvatura totale costante K che riferiamo alle sue linee di curvatura (u, v) , e sia

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

*) Per maggiori sviluppi vedi la mia memoria: *Sulla deformazione delle congruenze*, etc. [Annali di Matematica, s. III, t. VI (1901), pp. 117-164].

il quadrato del suo elemento lineare. Al § 310 delle *Lezioni* (vol. II, pag. 244) vi abbiamo coordinato un sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali, al quale possiamo dare la forma lineare (omogenea) seguente:

$$(D) \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = (\gamma - 1)K\sqrt{E} \cdot \varphi - \gamma \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cdot w - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \lambda, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \sqrt{E} \cdot \lambda, \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cdot \lambda; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = (\gamma - 1)K\sqrt{G} \cdot \varphi - \gamma \frac{\sqrt{G}}{r_1} \cdot w - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \lambda, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sqrt{G} \cdot \mu, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} \cdot \mu, \end{cases}$$

dove γ indica una costante arbitraria, diversa però da 1, e λ, μ, φ, w sono quattro funzioni incognite di u, v . Questo sistema (D) è illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$(D^*) \quad \lambda^2 + \mu^2 + (1 - \gamma)K\varphi^2 + \gamma w^2 = c \quad (\text{costante}).$$

Se $(\lambda, \mu, \varphi, w)$ è una qualunque quaderna di soluzioni del sistema (D), sappiamo (*Lezioni*, vol. II, §§ 305, 306) che la superficie $\bar{S}$ inviluppo dei piani normali alle linee $\varphi = \text{cost.}$ sopra Σ ha l'elemento lineare fisso:

$$(27) \quad d\bar{s}^2 = \frac{(\gamma-1)^2 \varphi^2 dw^2 - 2\gamma(\gamma-1)\varphi w d\varphi dw + [\gamma(\gamma-1)w^2 + (\gamma-1)K\varphi^2 + c]d\varphi^2}{(\gamma-1)^2 K^2 \varphi^4}.$$

A causa della omogeneità delle (D) possiamo moltiplicare la costante c per un fattore positivo qualsiasi; l'elemento lineare (27) dipende quindi solo dal segno di c . Questo elemento lineare appartiene alla quadrica (immaginaria) di equazione

$$(28) \quad y^2 + z^2 = \frac{x^2}{\gamma - 1} + c(y - iz)^2 - \frac{1}{(\gamma - 1)K},$$

che è una delle quadriche a centro considerate da DARBOUX, tangenti al circolo immaginario all'infinito: questa diremo una *quadrica Q* di DARBOUX.

Conviene poi ricordare le formole

$$(29) \quad \bar{x} = x - \frac{1}{(\gamma - 1)K\varphi}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \gamma w X_3)$$

colle analoghe per $\bar{y}, \bar{z}$, le quali danno le coordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del punto di $\bar{S}$ corrispondente al punto (x, y, z) di Σ . Inoltre, se si indicano con $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ i coseni di direzione della normale a $\bar{S}$ si ha, a meno di un fattore di proporzionalità,

$$(30) \quad \bar{X} \equiv \mu X_1 - \lambda X_2, \quad \bar{Y} \equiv \mu Y_1 - \lambda Y_2, \quad \bar{Z} \equiv \mu Z_1 - \lambda Z_2.$$

Prendasi ora una quaderna *speciale* (Λ, M, Φ, W) di soluzioni del sistema (D), per la quale la costante c nella (D*) risulti nulla, cioè sia:

$$\Lambda^2 + M^2 + (1 - \gamma)K\Phi^2 + \gamma W^2 = 0.$$

In tal caso, la corrispondente superficie $\bar{S}$ è applicabile sopra una superficie di rotazione e la sua complementare, che indicheremo con S_0 , è la deformata di una quadrica di rotazione di GUICHARD, reale od immaginaria secondo che K è positiva o negativa. Le coordinate (x_0, y_0, z_0) del punto di S_0 corrispondente al punto (x, y, z) di Σ , e i coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale a S_0 , sono dati dalle formole

$$(31) \quad x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X, \quad y_0 = y - \frac{\Phi}{W} Y, \quad z_0 = z - \frac{\Phi}{W} Z,$$

$$(32) \quad X_0 \equiv \Lambda X_1 + M X_2 + W X_3, \quad Y_0 \equiv \Lambda Y_1 + M Y_2 + W Y_3, \quad Z_0 \equiv \Lambda Z_1 + M Z_2 + W Z_3.$$

Riguardiamo ora come corrispondenti due punti $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ (x_0, y_0, z_0) di $\bar{S}, S_0$ che corrispondono al medesimo punto (x, y, z) di Σ ; poichè ai sistemi coniugati sopra Σ corrispondono, tanto sopra $\bar{S}$ quanto sopra S_0 , i sistemi coniugati, vediamo che: *la detta corrispondenza fra i punti di $\bar{S}, S_0$ conserva i sistemi coniugati.*

§ 8.

Le nuove congruenze W .

Arriviamo ora al punto essenziale della nostra ricerca, proponendoci la questione seguente: È possibile stabilire fra le due quaderne $(\lambda, \mu, \varphi, w)$, (Λ, M, Φ, W) di soluzioni del sistema (D) , tali relazioni che le due corrispondenti superficie $\bar{S}, S_0$ risultino le due falde focali della congruenza formata dalle rette che ne congiungono i punti corrispondenti?

Occorre e basta per ciò che siano soddisfatte le due condizioni:

$$(33) \quad \begin{cases} \bar{X}(x_0 - \bar{x}) + \bar{Y}(y_0 - \bar{y}) + \bar{Z}(z_0 - \bar{z}) = 0 \\ X_0(x_0 - \bar{x}) + Y_0(y_0 - \bar{y}) + Z_0(z_0 - \bar{z}) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo in queste i valori (29), (30), (31) e (32), vediamo che la prima è identicamente verificata *), mentre la seconda si traduce nella seguente relazione bilineare fra i due sistemi di soluzioni:

$$(E) \quad \Lambda \lambda + M \mu + (1 - \gamma) K \Phi \varphi + \gamma W w = 0.$$

Ora, per due quaderne qualsiasi di soluzioni del sistema (D) , il primo membro della (E) risulta una costante, a causa delle equazioni differenziali (D) stesse. Basterà dunque che la (E) sia soddisfatta dai valori *iniziali* di queste due quaderne per un sistema iniziale (u_0, v_0) di valori delle variabili indipendenti u, v . Indicando questi valori iniziali coll'apposizione dell'indice *zero*, la (E) equivale adunque all'altra

$$(E^*) \quad \Lambda_0 \lambda_0 + M_0 \mu_0 + (1 - \gamma) K \Phi_0 \varphi_0 + \gamma W_0 w_0 = 0.$$

*) Questo risulta anche *a priori* dall'osservare che il piano tangente alla $\bar{S}$ passa per la normale di Σ e contiene quindi il punto corrispondente di S .

Per proseguire nel modo più semplice la nostra discussione, giova ora la seguente rappresentazione geometrica. I valori iniziali $(\lambda_0, \mu_0, \varphi_0, w_0)$ individuando le quaderne $(\lambda, \mu, \varphi, w)$ e quindi la superficie $\bar{S}$, se interpretiamo $\lambda_0, \mu_0, \varphi_0, w_0$ come coordinate omogenee di un punto $\bar{P}$ nello spazio, potremo riguardare questo punto $\bar{P}$ come immagine della superficie $\bar{S}$.

La condizione (E^*) esprime evidentemente che i due punti $(\lambda_0, \mu_0, \varphi_0, w_0)$, $(\Lambda_0, M_0, \Phi_0, W_0)$, del nostro spazio rappresentativo, sono coniugati rispetto alla quadrica

$$(34) \quad \Lambda^2 + M^2 + (1 - \gamma)K\Phi^2 + \gamma W^2 = 0;$$

ed è da notarsi in particolare che ogni punto $(\Lambda_0, M_0, \Phi_0, W_0)$ situato su questa quadrica è l'immagine di una superficie S_0 . Così: nella nostra rappresentazione i punti $(\lambda_0, \mu_0, \varphi_0, w_0)$ dello spazio rappresentano individualmente le ∞^3 superficie $\bar{S}$ applicabili sulla quadrica Q di DARBOUX, mentre i punti $(\Lambda_0, M_0, \Phi_0, W_0)$ situati sulla quadrica (34) rappresentano le ∞^2 superficie S_0 applicabili sulla quadrica di rotazione di GUICHARD.

Tornando ora alla rappresentazione geometrica della condizione (E^*) , vediamo che, se $(\Lambda_0, M_0, \Phi_0, W_0)$ è un punto qualunque della quadrica (34), il punto $(\lambda_0, \mu_0, \varphi_0, w_0)$ può avere una posizione arbitraria nel piano tangente in $(\Lambda_0, M_0, \Phi_0, W_0)$ alla detta quadrica; dunque si ha il teorema:

α') Ogni deformata S_0 di una quadrica di rotazione di GUICHARD appartiene, come prima falda focale, ad ∞^2 congruenze W , le cui seconde falde focali sono applicabili sopra una medesima quadrica Q di DARBOUX.

Prendiamo ora invece ad arbitrio una superficie $\bar{S}$ applicabile sopra una quadrica Q di DARBOUX che sia rappresentata da un punto $\bar{P}$ esterno alla quadrica (34). Il piano polare di $\bar{P}$ sega questa quadrica in una conica reale, di cui ciascun punto è immagine di una superficie S_0 che insieme con $\bar{S}$ forma le due falde focali di una congruenza W . Abbiamo quindi l'altro teorema:

β') Ogni superficie $\bar{S}$ applicabile sulla quadrica Q di DARBOUX appartiene, come prima falda focale, ad ∞^1 congruenze W , le cui seconde falde focali sono applicabili sulla quadrica di rotazione di GUICHARD.

Come si vede, questi due teoremi α'), β') sono per le quadriche a centro i medesimi come i teoremi α), β) già dimostrati al § 6 per i paraboloidi.

§ 9.

Suddistinzione dei vari tipi.

Andiamo ora a suddividere nei risultati precedenti i vari casi che possono presentarsi a seconda del segno della curvatura K e di quello della costante c .

1° CASO: K positiva. — Poniamo per semplicità $K = 1$. Dovendo la nostra qua-

drica rappresentativa (34) essere reale, le costanti γ , $1 - \gamma$ hanno segno contrario, cioè $0 < \gamma < 1$ o $\gamma > 1$. In ogni caso la quadrica (34) è a punti ellittici ed ogni punto $(\lambda_0, \mu_0, \varphi_0, w_0)$ esterno alla quadrica rende positiva l'espressione $\lambda_0^2 + \mu_0^2 + (1 - \gamma)\varphi_0^2 + \gamma w_0^2$; così la costante c è necessariamente positiva e si può fare $= 1$.

La quadrica di rotazione su cui sono applicabili le superficie S_0 ha in ogni caso il semi-asse principale (focale) $= 1$ ed è un ellissoide se $\gamma < 1$, un iperboloide (a due falde) se $\gamma > 1$. Indicando con b la lunghezza del semi-asse secondario abbiamo

$$\gamma = 1 - \frac{1}{b^2} \text{ per l'ellissoide, } \quad \gamma = 1 + \frac{1}{b^2} \text{ per l'iperboloide.}$$

Sostituendo questi valori di γ nella (27) e facendovi inoltre $K = 1$, $c = 1$, si ha il $\bar{ds}^2$ comune a tutte le attuali superficie $\bar{S}$ applicabili sulla quadrica Q di DARBOUX di equazione

$$(35) \quad y^2 + z^2 \pm b^2 z^2 = (y - iz)^2 \pm b^2.$$

Consideriamo ora per es., per fissare le idee, il caso dell'ellissoide, e siano S_0 , S'_0 due diverse deformate dell'ellissoide, provenienti dalla medesima superficie Σ di curvatura $K = +1$. Nella rappresentazione del § precedente S_0 , S'_0 hanno per immagini due punti della quadrica (34), e tutti i punti della retta polare della corda per quei due punti sono immagini di una superficie $\bar{S}$, applicabile sulla quadrica Q di DARBOUX di equazione (35), che è una trasformata contigua tanto di S_0 quanto di S'_0 . Abbiamo dunque il seguente notevole teorema:

γ) Due deformate S_0 , S'_0 dell'ellissoide (iperboloide) di GUICHARD, provenienti da una medesima superficie Σ a curvatura $K = +1$ *), ammettono ∞^1 trasformate comuni $\bar{S}$ applicabili l'una sull'altra e sulla quadrica Q di DARBOUX.

Nello stesso modo si dimostra l'altro teorema:

γ) Tre tali deformate S_0 , S'_0 , S''_0 dell'ellissoide (iperboloide) ammettono una trasformata comune $\bar{S}$ applicabile sulla quadrica Q di DARBOUX.

2° CASO: K negativa. — Qui poniamo $K = -1$. L'equazione della quadrica (34) diventa

$$(34^*) \quad \Lambda^2 + M^2 + (\gamma - 1)\Phi^2 + \gamma W^2 = 0$$

ed è necessariamente [per la realtà della quadrica (34*)] $\gamma < 1$. Distinguiamo ora tre casi:

a) γ positiva (< 1). La quadrica (34*) è ancora a punti ellittici, la costante c può avere unicamente il segno positivo e le superficie $\bar{S}$ sono applicabili sopra un'unica quadrica Q di DARBOUX. Quanto alle S_0 sono le deformate del seno iperbolico.

b) γ negativa. In tal caso la (34*) è a punti iperbolici e tutti i punti dello spazio

*) Ciò equivale a dire che nel rotolamento della quadrica di rotazione sull'una o sull'altra delle superficie applicabili S_0 , S'_0 uno dei due fuochi descrive la medesima superficie a curvatura media costante.

rappresentativo sono perciò *esterni* alla quadrica. La costante c può essere positiva, negativa o nulla, e la quadrica Q di DARBOUX affetta tre forme differenti. Nell'ultimo caso ($c = 0$) la $\bar{S}$ è applicabile sul catenoide accorciato, e su questa superficie di rotazione sono pure applicabili tutte le superficie S_0 .

c) $\gamma = 0$. Allora tanto le superficie S_0 come le $\bar{S}$ sono applicabili sulla logaritmica di rotazione e le nostre congruenze W hanno le due falde applicabili su questa superficie. Più in generale si potrebbe dimostrare l'esistenza di congruenze W colle due falde focali applicabili sopra una medesima superficie di rotazione *complementare* di una pseudosferica. Le superficie pseudosferiche complementari delle due falde di una tale congruenza W sono allora trasformate di BÄCKLUND l'una dell'altra.

§ 10.

Caso del paraboloide rotondo e del paraboloide di Weingarten.

Vogliamo ancora dimostrare come il metodo tenuto nei §§ precedenti per le deformate delle quadriche rotonde a centro può applicarsi anche al caso del paraboloide, per ritrovare così nuovamente i teoremi α , β del § 6.

Per ciò, in luogo di una superficie di curvatura costante, prendiamo ora una superficie Σ d'area minima, che sia definita dalle formole

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2), \quad r_1 = -e^{2\theta}, \quad r_2 = e^{2\theta},$$

i parametri u, v essendo quelli delle linee di curvatura.

Consideriamo il seguente sistema di equazioni lineari omogenee (cfr. *Lezioni*, vol. II, pag. 335):

$$(F) \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = (me^{\theta} - e^{-\theta})w + me^{-\theta}\varphi - \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu, & \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda, & \frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{\theta}\lambda, & \frac{\partial w}{\partial u} = e^{-\theta}\lambda, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu, & \frac{\partial \mu}{\partial v} = (me^{\theta} + e^{-\theta})w - me^{-\theta}\varphi - \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{-\theta}\mu, & \frac{\partial w}{\partial v} = -e^{-\theta}\mu, \end{cases}$$

dove m è una costante e λ, μ, φ, w sono quattro funzioni incognite di u, v .

Questo sistema (F) è illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$(F^*) \quad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2m\varphi w = c \quad (c \text{ costante}).$$

Ora se $(\lambda, \mu, \varphi, w)$ è una quaderna qualsiasi di soluzioni del sistema (F), la superficie $\bar{S}$ involuppo dei piani normali alle linee $\varphi = \text{cost.}$ sulla superficie minima Σ ha l'elemento lineare (*Lezioni*, vol. II, pag. 235):

$$d\bar{s}^2 = \frac{m^2 w^2 d\varphi^2 + 2mw(w - m\varphi)d\varphi dw + (c + m^2 \varphi^2)dw^2}{m^2 w^4},$$

che appartiene al paraboloide di WEINGARTEN. Per l'attuale superficie $\bar{S}$ le formole corrispondenti alle (29), (30) del § 7 sono le seguenti:

$$(36) \quad \begin{cases} \bar{x} = x - \frac{1}{mw} [\lambda X_1 + \mu X_2 + (w - m\varphi)X_3], \\ \bar{X} \equiv \mu X_1 - \lambda X_2. \end{cases}$$

Se consideriamo poi una quaderna *speciale* di soluzioni (Λ, M, Φ, W) , per la quale la costante c nella (F^*) sia nulla:

$$\Lambda^2 + M^2 + W^2 - 2m\Phi W = 0,$$

la corrispondente superficie $\bar{S}$ è applicabile sopra una superficie di rotazione, e la sua complementare S_0 , definita dalle formole

$$(37) \quad \begin{cases} x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3, \\ X_0 \equiv \Lambda X_1 + M X_2 + W X_3, \end{cases}$$

risulta applicabile sul paraboloide reale rotondo

$$x^2 + y^2 = 2mz$$

di parametro m .

Ora se ci proponiamo, pel caso attuale, la medesima questione come al principio del § 8, troviamo che è necessario e basta pel nostro scopo che si verifichi la condizione

$$\Lambda_0 \lambda_0 + M_0 \mu_0 + W_0 w_0 - m(\Phi_0 w_0 + W_0 \varphi_0) = 0,$$

dopo di che le due superficie $\bar{S}$, S_0 saranno le due falde della congruenza W formata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti.

Dopo ciò ricorrendo, come al § 8, alla rappresentazione geometrica rispetto alla quadrica

$$\Lambda^2 + M^2 + W^2 - 2m\Phi W = 0,$$

troviamo che valgono ancora i teoremi $\alpha')$, $\beta')$ di quel paragrafo, ove attualmente la quadrica rotonda diventa il paraboloide e quella di DARBOUX il paraboloide di WEINGARTEN. Si ritrovano così nuovamente i risultati del § 6, espressi dai teoremi $\alpha)$ e $\beta)$.

Osserviamo poi che considerazioni del tutto simili a quelle svolte nel § precedente dimostrano che i teoremi $\gamma)$ e $\delta)$ valgono ancora nel caso attuale.

§ 11.

Congruenze W con falde focali applicabili su quadriche di Darboux.

Le deformate delle quadriche (a centro) di DARBOUX, provenienti da superficie pseudosferiche, oltre ad appartenere come prime falde focali a congruenze W le cui seconde falde sono deformate di superficie di rotazione (§ 9), appartengono ancora ciascuna a ∞^2 congruenze W con seconde falde applicabili sulla quadrica stessa di DARBOUX. Questo abbiamo già dimostrato al § 25 della Memoria (B) pel caso in cui γ sia positiva < 1 ; ora faremo vedere che la stessa dimostrazione si applica al caso generale.

Supponendo la superficie Σ al § 7 di curvatura $K = -1$, potremo porre:

$$\sqrt{E} = \cos \theta, \quad \sqrt{G} = \sin \theta, \quad r_1 = -\operatorname{tg} \theta, \quad r_2 = \cot \theta$$

e le formole (D), § 7, diventano:

$$(D_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = (1 - \gamma) \cos \theta. \varphi - \gamma \sin \theta. w + \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cos \theta. \lambda, \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \sin \theta. \lambda, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = (1 - \gamma) \sin \theta. \varphi + \gamma \cos \theta. \mu - \frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sin \theta. \mu, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = -\cos \theta. \mu. \end{array} \right.$$

Indichiamo, come al § 7, con $\bar{S}$ la superficie applicabile sulla quadrica di DARBOUX, dedotta mediante la quaderna $(\lambda, \mu, \varphi, w)$ dalla superficie pseudosferica Σ colle formole (29), § 7.

Ora consideriamo una trasformata pseudosferica Σ_1 di Σ per mezzo di una trasformazione B_σ di BÄCKLUND, riferendoci alle formole già riportate al § 3 della Memoria (B). Dalla quaderna $(\lambda, \mu, \varphi, w)$ di soluzioni del sistema (D_1) relativo alla superficie Σ , noi passiamo ad una quaderna corrispondente $(\lambda_1, \mu_1, \varphi_1, w_1)$ pel sistema (D_1) costruito per la Σ_1 colle seguenti formole di sostituzione lineare:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = A\lambda + B\mu + (1 - \gamma) \cos \sigma \cos \theta. \varphi - \gamma \cos \sigma \sin \theta. w, \\ \mu_1 = C\lambda + D\mu + (1 - \gamma) \cos \sigma \sin \theta. \varphi + \gamma \cos \sigma \cos \theta. w, \\ \varphi_1 = \cos \sigma \cos \theta_1. \lambda + \cos \sigma \sin \theta_1. \mu + \varphi, \\ w_1 = \cos \sigma \sin \theta_1. \lambda - \cos \sigma \cos \theta_1. \mu - \sin \sigma w. \end{array} \right.$$

Ed ora, come prima S da Σ , deduciamo dalla Σ_1 , per mezzo della quaderna $(\lambda_1, \mu_1, \varphi_1, w_1)$, una nuova deformata S_1 della quadrica di DARBOUX colle formole corrispondenti alle (29):

$$\bar{x}_1 = x_1 + \frac{1}{(\gamma - 1)\varphi_1} (\lambda_1 X_1^{(1)} + \mu_1 X_2^{(1)} + \gamma w_1 X_3^{(1)}).$$

Come al § 25 della Memoria (B) si vedrà che sussistono le due relazioni:

$$\sum (\mu X_1 - \lambda X_2)(\bar{x} - \bar{x}_1) = 0, \quad \sum (\mu_1 X_1^{(1)} - \lambda_1 X_2^{(1)})(\bar{x} - \bar{x}_1) = 0,$$

le quali esprimono che la congruenza generata dalle congiungenti i punti corrispondenti di S, S_1 ammette (S, S_1) per falde della superficie focale ed è una congruenza W .

Di qui risulta la proprietà che volevamo stabilire: *Ogni deformata di una quadrica Q di DARBOUX, proveniente da una superficie pseudosferica, appartiene come prima falda focale ad ∞^2 congruenze W , le cui seconde falde sono applicabili sulla quadrica stessa.*

La classe già considerata nella Memoria (B) corrisponde ai valori:

$$C = -1, \quad \gamma = \frac{1}{p}, \quad 1 - \gamma = \frac{1}{q}$$

e le superficie corrispondenti sono *coniugate in deformazione* delle deformate improprie del paraboloide iperbolico [cfr. (B), § 24].

Qui vogliamo ancora osservarne una seconda classe, corrispondente ai valori:

$$C = 1, \quad \gamma = \frac{1}{p}, \quad \gamma - 1 = \frac{1}{q},$$

che hanno per coniugate in deformazione le superficie d'elemento lineare

$$(39) \quad ds^2 = (p - \alpha^2) d\alpha^2 - 2\alpha \wp d\alpha d\wp + (q - \wp^2) d\wp^2.$$

Queste non sono altro che le superficie applicabili sul paraboloide a parametri puramente immaginari

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2i\chi \quad \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1 \right),$$

delle cui trasformazioni abbiamo trattato ai §§ 1, 3. Paragonando le congruenze W , colle due falde focali applicabili su questo paraboloide, con quelle le cui falde focali sono le deformate della quadrica Q coniugata in deformazione, troviamo un risultato pienamente conforme al teorema finale del § 25 della Memoria (B).

§ 12.

Congruenze W le cui falde focali sono quadriche proiettive.

Terminerò coll'addurre un esempio singolarmente semplice di congruenze W le cui due falde focali sono applicabili sopra quadriche, anzi sono effettivamente superficie del 2° ordine. Risolviamo per ciò la seguente questione elementare: *Trasformare proiettivamente una data quadrica Q in un'altra Q' per modo che le congiungenti i punti corrispondenti tocchino le due quadriche.* La congruenza formata da queste congiungenti avrà allora per falde focali le due quadriche Q , Q' e sarà una congruenza W , perchè la proiettività conserva i sistemi coniugati.

La risoluzione analitica del nostro problema è semplicissima. Riferiamo la quadrica Q ad un tetraedro autoconiugato scrivendone l'equazione sotto la forma canonica

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

e siano

$$(40) \quad y_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

le formole della richiesta collineazione. Dovremo esprimere: 1° che ogni piano tangente a Q in un suo punto (x_i) passa pel punto corrispondente (y_i) ; 2° la condizione duale che ogni punto (x_i) di Q giace sul piano corrispondente al piano tangente in (x_i) . La prima condizione porta che per ogni punto (x_i) di Q si abbia

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0$$

e quindi:

$$a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad \text{per } i \neq k; \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44}.$$

La seconda condizione esige poi ulteriormente che il valor comune dei coefficienti

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ sia zero. Ne risulta che: la più generale omografia richiesta è quella che ha un modulo di sostituzione emisimmetrico.

Intanto abbiamo il risultato: *Ogni quadrica Q appartiene, come prima falda focale, ad ∞^5 congruenze W la cui seconda falda è una quadrica proiettiva a Q .*

Si può fare la semplice osservazione (suggeritami dal collega prof. NICCOLETTI) che le ∞^5 proiettività così trovate si compongono, ciascuna, della polarità rispetto alla quadrica Q e di un sistema nullo arbitrario. Anzi la considerazione geometrica diretta dimostra subito che le omografie così composte, e queste soltanto, risolvono il nostro problema.

In fine osserveremo che, per le note relazioni fra i sistemi nulli (i complessi lineari) ed i movimenti infinitesimi dello spazio, possiamo formulare il risultato ottenuto nel modo seguente:

Si consideri la quadrica data Q in relazione con un movimento infinitesimo arbitrario; le congruenze rettilinee cercate si ottengono tirando in ogni punto M di Q quella tangente che è perpendicolare alla direzione secondo cui si sposta M nel detto movimento infinitesimo.

Se scriviamo l'equazione della quadrica Q (supposta a centro) riferita agli assi principali:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

e prendiamo l'espressione più generale di un movimento infinitesimo nella notazione di LIE:

$$Xf = (\gamma y - \beta z + a)p + (\alpha z - \gamma x + b)q + (\beta x - \alpha y + c)r$$

con $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ costanti arbitrarie, troviamo di qui immediatamente per le formole della collineazione cercata:

$$x = \frac{1}{A} \frac{\gamma y' - \beta z' + a}{ax' + by' + cz'}, \quad y = \frac{1}{B} \frac{\alpha z' - \gamma x' + b}{ax' + by' + cz'}, \quad z = \frac{1}{C} \frac{\beta x' - \alpha y' + c}{ax' + by' + cz'}.$$

Pisa, 23 aprile 1906.

LUIGI BIANCHI.