Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales,*)

Von

AXEL HARNACK †.

§ 1.

Definition des Integrales.

Besitzt die Function $u + iv$ einer complexen Variablen z am Rande eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden, ebenen Gebietes, in dessen Innern die Function regulär ist, die Werthe $U + iV$, so stellt das Integral

$$(1) \quad \frac{1}{2i\pi} \int \frac{U + iV}{z - \rho e^{i\alpha}} dz,$$

erstreckt in positivem Umlauf (d. h. die eingeschlossene Fläche bleibt zur Linken) über alle Randpunkte z , den Werth der Function $u + iv$ für alle inneren Punkte dar. Dieselbe muss dabei „im allgemeinen gleichmässig stetig“ in die Randwerthe übergehen. Das ebene Gebiet nehmen wir als einblättriges an.

Durch Zerlegen des Integrales in seinen reellen und imaginären Bestandtheil erhält man die Gleichungen:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\cos \varepsilon}{l} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l},$$
$$v = -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi} \int V \frac{\cos \varepsilon}{l} d\sigma.$$

Hier bedeutet $d\sigma$ das Bogenelement der Randcurve, l die positiv genommene Entfernung des Elementes $d\sigma$ von dem betrachteten Punkte

*) A. d. Berichten der k. sächs. Ges. d. W. v. Jahre 1885. Wir glauben, dass es unseren Lesern willkommen ist, wenn wir nachstehend die drei in den Berichten der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlichten Arbeiten Axel Harnack's zum Abdruck bringen. Sie enthalten die letzten Untersuchungen unseres so frühe der Wissenschaft entrissenen Mitarbeiters.

Die Redaction.

$x + iy = \rho e^{i\alpha}$, für welchen die Werthe u und v ermittelt werden sollen, und ε den Winkel, welchen die nach innen gerichtete Normale des Elementes $d\sigma$ mit der Geraden l (in der Richtung von $d\sigma$ nach dem Punkte (x, y)) bildet. Die Grösse $\frac{\cos \varepsilon}{1} d\sigma$ ist die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ vom Punkte (x, y) aus, und wird von Herrn C. Neumann mit $(d\sigma)_x$ bezeichnet. Dieser Werth ist überall positiv, wenn die Fläche nur von einer Randcurve begrenzt ist, die überdies stets ihre convexe Seite nach aussen richtet, und weder nach innen gerichtete Spitzen noch Ecken besitzt, oder allgemeiner, wenn keine Tangente der Randcurve in das Innere der Fläche eintritt. In allen anderen Fällen wird $(d\sigma)_x$ wenigstens für gewisse Gebiete von x auch negativ. Es tritt dies ein, sobald die Fläche des vom Punkte x und dem Bogenelemente $d\sigma$ gebildeten Dreiecks beim Durchlaufen des Elementes $d\sigma$ zur Rechten bleibt; $(d\sigma)_x$ soll daher der *algebraische* scheinbare Winkel heissen.

Auch das Differential $\frac{dl}{l}$ kann durch $d\sigma$ ausgedrückt werden. Bezeichnet man nämlich mit ε' den Winkel zwischen der positiven Richtung des Bogenelementes und der Richtung l , so ist in allen Fällen, auch dem Zeichen nach: $dl = -\cos \varepsilon' d\sigma$.

Der Kürze wegen werde ich indessen im Folgenden stets die Form benutzen:

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l}, \\ v &= -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi} \int V(d\sigma)_x. \end{aligned}$$

§ 2.

Die Relationen zwischen den Functionen U und V .

Die Functionen u und v sind nicht unabhängig von einander, denn sie genügen für jeden Punkt (x, y) im Innern des Gebietes den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Functionen, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, werde ich zwei conjugirte Functionen nennen; man hat dabei noch zu unterscheiden, welche Function den reellen, und welche den imaginären Bestandtheil der complexen Function bildet.

Auch die Functionen U und V können daher an den Randcurven eines Gebietes nicht willkürlich gewählt werden; vielmehr müssen zwischen den Randwerthen U und denen der conjugirten Function V ,

und folglich auch zwischen den vier Integralen der Gleichungen (2) Relationen bestehen. Dieselben sollen zuerst ermittelt werden. Setzt man

$$(3) \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x, & u_2 &= \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l}, \\ v_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l}, & v_2 &= \frac{1}{2\pi} \int V(d\sigma)_x, \end{aligned}$$

so ist

$$u_1 + iv_1 = \frac{1}{2i\pi} \int U \frac{dz}{z - q e^{i\alpha}}, \quad u_2 + iv_2 = \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dz}{z - q e^{i\alpha}}.$$

Demnach sind $u_1 + iv_1$ und $u_2 + iv_2$ Functionen einer complexen Variablen, und daraus folgt, dass sich diese Functionen aus ihren Randwerthen ebenso darstellen lassen müssen, wie u und v . Bezeichnet man also mit U_1, V_1, U_2, V_2 die Werthe, welche u_1, v_1, u_2, v_2 am Rande annehmen, so ist

$$U = U_1 + U_2, \quad V = V_1 + V_2$$

und es bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi} \int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int V_1 \frac{dl}{l}, \\ u_2 &= \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi} \int U_2(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int V_2 \frac{dl}{l}, \\ v_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l} = -\frac{1}{2\pi} \int U_1 \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi} \int V_1(d\sigma)_x, \\ v_2 &= \frac{1}{2\pi} \int V(d\sigma)_x = -\frac{1}{2\pi} \int U_2 \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi} \int V_2(d\sigma)_x. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, indem man für U und V die obigen Werthe einführt,

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int U_2(d\sigma)_x &= \frac{1}{2\pi} \int V_1 \frac{dl}{l}, \\ -\frac{1}{2\pi} \int U_2 \frac{dl}{l} &= \frac{1}{2\pi} \int V_1(d\sigma)_x. \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in den einen Ausdruck vereinigen:

$$\frac{1}{2i\pi} \int \frac{(U_2 - iV_1)}{z - q e^{i\alpha}} dz = 0.$$

Derselbe lehrt, dass ein complexes Integral dieser Art im Inneren eines beliebigen Gebietes allenthalben Null sein kann, ohne dass die im Zähler stehende Function verschwindet. Diese Function ist aber nicht als Randwerth einer „Function einer complexen Variablen“ zu betrachten, und deshalb ist das Integral nicht als ein „Integral von Cauchy“ zu bezeichnen.

Bei der Ableitung der Gleichungen (4) ist vorausgesetzt, dass die Functionen $u_1, u_2, \dots$ im allgemeinen gleichmässig in bestimmte Randwerthe übergehen, was noch zu beweisen ist. Zu dem Zwecke muss die Function

$$u_1 = \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x$$

nebst der conjugirten

$$v_1 = -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l}$$

näher untersucht werden. Ich beschränke mich dabei auf den Fall, dass U längs des Randes eine eindeutige und stetige Function ist. Auch soll der Rand von Curven gebildet sein, die bis auf einzelne Eckpunkte überall eine bestimmte, sich stetig ändernde Tangente besitzen, und die weder unendlich viele Wendungen machen, noch sich selbst oder unter einander durchschneiden. Alsdann sind die Functionen u_1 und v_1 im Inneren des Gebietes allenthalben stetig, und dasselbe gilt für die ersten partiellen Ableitungen, zwischen denen die bekannten Relationen bestehen, wie direct aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} [(d\sigma)_x] = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dl}{l} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} [(d\sigma)_x] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dl}{l} \right)$$

hervorgeht. Es werde nun am Rande ein bestimmter Punkt s betrachtet. Um diesen Punkt s als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis mit beliebig kleinem Radius, der durch seine äussersten Schnittpunkte auf dem Rande den Bogen σ' bestimmt. Ein Element dieses Bogens werde mit $d\sigma'$ bezeichnet, während alle übrigen Randelemente $d\sigma''$ heissen mögen. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma')_x + \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma'')_x.$$

Der Werth der Function U im Punkte s heisse U_s . Im ersten Integral der rechten Seite unterscheiden sich sämtliche Werthe von U von dem Werthe U_s um eine Grösse, deren Betrag durch Verkleinerung von σ' kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig gewählte Grösse δ . Zufolge der Stetigkeit von U kann diese obere Grenze δ gleichzeitig für alle Punkte s fixirt werden. Also ist

$$\frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma'')_x + \frac{1}{2\pi} U_s \int (d\sigma')_x \pm \left(< \delta \frac{1}{2\pi} \int \text{abs}(d\sigma')_x \right).$$

Das Integral $\int (d\sigma')_x$ giebt, mit Unterscheidung positiver und negativer Elemente, den Winkel an, unter welchem der Bogen σ' von dem inneren Punkte x aus gesehen wird. Rückt der Punkt x in den Randpunkt s , so geht dieser Winkel in denjenigen über, unter welchem der Bogen σ' vom Punkte s aus gesehen wird. Drehrichtung und

Grösse dieses Winkels, der durch ω bezeichnet werden soll, ergibt sich unzweideutig aus dem Grenzprocess. Kehrt die Randcurve an der Stelle s ihre concave Seite nach innen, so ist er ein überstumpfer Winkel, an einer convexen Stelle dagegen ein stumpfer oder spitzer.

Der Uebergang in den Werth ω ist für alle Randpunkte s ein gleichmässig stetiger, d. h. man kann nicht nur um jeden Punkt s einen Kreis angeben, so dass der scheinbare Winkel des Bogens σ' für alle Punkte x im Innern dieses Kreises von dem Werthe ω beliebig wenig abweicht, sondern es lässt sich auch für den Radius dieses Kreises die nämliche obere Grenze bei allen Werthen s bestimmen.

Der Nachweis dieser Behauptung folgt aus elementaren Betrachtungen, wenn man beachtet, dass die vom Punkte s ausgehenden Schenkel des Winkels ein gleichschenkliges Dreieck mit der Sehne des Bogens σ' bestimmen.

Das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma'')_x = \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\cos \varepsilon}{l} d\sigma''$$

ändert sich stetig, und zwar gleichmässig. Denn es erstreckt sich nur über solche Bogenelemente, für welche l niemals Null wird, auch wenn der Punkt x in den Punkt s hineinrückt. Demnach wird der Werth dieses Integrales schliesslich gleich

$$\frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma'')_x$$

und so erhält man vorläufig das Resultat: Rückt der innere Punkt x in den Randpunkt s , so wird

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \omega U_s + \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma'')_s \pm \left(< \delta \frac{1}{2\pi} \int \text{abs}(d\sigma')_x \right). \end{aligned}$$

In dieser Formel ist $\int \text{abs}(d\sigma')_x$ jedenfalls eine endliche Grösse; denn entweder ist der Grenzwert dieses Integrales gleich ω , falls der Bogen σ' seine concave Seite nach innen kehrt, oder er ist grösser als ω , aber endlich, weil der Bogen nicht unendlich viele Wendungen macht. Es ist ferner

$$\int U(d\sigma'')_s = \int U(d\sigma)_s - \int U(d\sigma')_s$$

und das zweite Integral der rechten Seite wird gleich $U_s \int (d\sigma')$, bis auf eine Grösse, die wiederum kleiner ist als

$$\delta \int \text{abs}(d\sigma')_s.$$

Da nun die Grösse δ durch Verkleinerung von σ' beliebig klein gemacht werden kann, so folgt, dass

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x &= \\ &= \frac{1}{2\pi} U_s \lim \omega - \frac{1}{2\pi} U_s \lim \int (d\sigma')_s + \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_s, \end{aligned}$$

ist. In einem gewöhnlichen Curvenpunkte, in welchem die Tangenten, vor- und rückwärts genommen, den Winkel π bilden, ist

$$\lim \omega = \pi, \quad \lim \int (d\sigma')_s = 0,$$

also

$$\lim \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_s.$$

In einem Eckpunkte der Curve, in welchem die Tangenten den Winkel α bilden, ist

$$\lim \omega = 2\pi - \alpha, \quad \lim \int (d\sigma')_s = 0,$$

also

$$\lim \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi} (2\pi - \alpha) U_s + \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_s.$$

Auch diese Grenzübergänge erfolgen nach Ausschluss der Eckpunkte durch beliebig kleine Umgebungen mit gleichmässiger Stetigkeit, wie aus dem Mittelwerthsatz der Differentialrechnung hervorgeht. Damit ist die ursprüngliche Behauptung vollständig bewiesen.

Zu einer Randfunction U gehört also eine bestimmte Function der Randpunkte, nämlich $\frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_s$. Ich werde diese Function mit $\frac{1}{2} P_s$, oder auch kürzer mit $\frac{1}{2} P$ bezeichnen, und P die zugeordnete Function von U nennen *).

Es ist für einen regulären Randpunkt

$$(5) \quad \lim_{x=s} \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x = \lim u_1 = U_1 = \frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2} P_s.$$

Dagegen für Eckpunkte mit der Winkelöffnung α , die aber im Folgenden nicht weiter berücksichtigt werden sollen:

$$(5a) \quad \lim \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x = \lim u_2 = U_1 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U_s + \frac{1}{2} P_s.$$

*) Von dieser zugeordneten Function handelt Herr C. Neumann bei der Theorie der Doppelbelegungen im 4. Capitel seines Buches: „Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential“ (Leipzig, 1877). Der Beweis des Satzes von der gleichmässigen Convergenz ist jedoch daselbst nicht mitgetheilt (vergl. die Bemerk. pag. 152 daselbst).

Die zugeordnete Function ist eine stetige Function von s , solange keine Eckpunkte auf dem Rande vorhanden sind (Neumann, a. a. p. 139 und 150).

Dieselben Betrachtungen gelten auch für die Function

$$v_2 = \frac{1}{2\pi} \int V(d\sigma)_x,$$

wobei wiederum V als eine stetige Function vorausgesetzt wird. Es ist für einen regulären Randpunkt s

$$(6) \quad \lim_{x=s} \frac{1}{2\pi} \int V(d\sigma)_x = \lim v_2 = V_2 = \frac{1}{2} V_s + \frac{1}{2} Q_s.$$

Q bedeutet die der Function V zugeordnete Function, d. h. es ist

$$Q_s = \frac{1}{\pi} \int V(d\sigma)_s.$$

Für die zu u_1 und v_2 conjugirten Functionen

$$v_1 = -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l} \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l}$$

lässt sich der Nachweis, dass sie stetig nach bestimmten Randwerthen V_1 und U_2 convergiren, nicht in derselben directen Weise führen. Da aber

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2$$

ist, so folgt, weil u und v der Voraussetzung nach in die bestimmten Werthe U_s und V_s übergehen, während x nach s convergirt:

$$(7) \quad \lim_{x=s} u_2 = U_2 = U - U_1 = \frac{1}{2} U_s - \frac{1}{2} P_s,$$

$$(8) \quad \lim_{x=s} v_1 = V_1 = V - V_2 = \frac{1}{2} V_s - \frac{1}{2} Q_s.$$

Trägt man diese Werthe von U_2 und V_1 in die Gleichungen (4) ein, so erhält man den folgenden Satz:

Besitzt die Function $u + iv$ einer complexen Variablen z an dem Rande eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes die stetig sich ändernden Werthe $U + iV$, so bestehen zwischen den Functionen U und V die Relationen:

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi} \int P(d\sigma)_x &= \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l} - \frac{1}{2\pi} \int Q \frac{dl}{l}, \\ -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi} \int P \frac{dl}{l} &= \frac{1}{2\pi} \int V(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi} \int Q(d\sigma)_x. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten P und Q die den Functionen U und V zugeordneten Functionen, und sämtliche Integrale sind auf den Randcurven zu bilden, während der Punkt x, y im Innern des Gebietes beliebig gewählt wird.

Man kann die Voraussetzungen, unter denen dieses Resultat bewiesen wurde, noch erweitern. Ist z. B. nur U im Cauchy'schen Integrale eine stetige oder eine überall endliche, integrirbare Function, so dass die Function u im allgemeinen gleichmässig stetig in die Randwerthe U übergeht, so gilt das Cauchy'sche Integral für diesen Rand, sobald man unter den übrigen Integralen der Gleichung (2) die Grenzwerte versteht, welche dieselben annehmen, wenn man von einer innerhalb der Fläche gelegenen Integrationscurve zum Rande selbst übergeht. In diesem Sinne gelten dann auch die vorstehenden Gleichungen, ohne dass V eine stetige Function zu sein braucht.

Der vorstehende, ganz allgemeine Satz erhält eine sehr einfache und bekannte Form, sobald der Rand nur aus einem einzigen Kreise besteht. Denn für einen Kreis werden die zugeordneten Functionen P und Q constant. Es ist, wenn R den Radius des Kreises angiebt, und $d\sigma = R d\varphi$ gesetzt wird

$$P = \frac{1}{\pi} \int U(d\sigma) = \frac{1}{\pi} \int U \frac{\cos \varepsilon}{l} d\sigma = \frac{1}{2\pi R} \int U d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int U d\varphi,$$

$$Q = \frac{1}{\pi} \int V(d\sigma) = \frac{1}{\pi} \int V \frac{\cos \varepsilon}{l} d\sigma = \frac{1}{2\pi R} \int V d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int V d\varphi,$$

so dass hier der Satz lautet:

Besitzt die im Inneren des Kreises R reguläre Function $u + iv$ am Rande der Kreisperipherie die Werthe $U + iV$, so bestehen zwischen den Functionen U und V die Relationen:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi} \int U d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l}, \\ -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l} &= \frac{1}{2\pi} \int V(d\varphi)_x - \frac{1}{2\pi} \int V d\varphi. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Gleichungen ist die Randwerthaufgabe, d. h. die Bestimmung der complexen Function aus dem reellen Randwerthe U für den Kreis ohne Weiteres lösbar; denn es bekommen die Gleichungen (2) hierbei die Form

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi} \int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi} \int U d\varphi, \\ v &= -\frac{1}{\pi} \int U \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi} \int V d\varphi, \end{aligned}$$

wodurch u vollständig, und v bis auf eine additive Constante bestimmt ist.

Die speciellen Gleichungen (10) liefern für den Kreis die bekannten Relationen

$$\begin{aligned}\int U \cos k\varphi \, d\varphi &= \int V \sin k\varphi \, d\varphi, \\ \int U \sin k\varphi \, d\varphi &= -\int V \cos k\varphi \, d\varphi, \\ (k &= 1, 2, 3, \dots \infty),\end{aligned}$$

welche hier die Anwendbarkeit der Fourier'schen Reihe für die Darstellung der Functionen u und v begründen. Analoge Relationen gelten für einen beliebig zusammengesetzten Rand.

Wird nämlich die Randcurve auf ein Polarcordinatensystem mit beliebigem Anfangspunkt bezogen, so dass $r=f(\varphi)$ die Gleichung der Randcurve wird, so bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(11) \quad & \int (U - P) \, d\varphi = \int (V - Q) \, d \log r, \\ & - \int (U - P) \, d \log r = \int (V - Q) \, d\varphi, \\ & \int (U - P) \, d \left(\frac{\sin k\varphi}{kr^k} \right) = - \int (V - Q) \, d \left(\frac{\cos k\varphi}{kr^k} \right), \\ & \int (U - P) \, d \left(\frac{\cos k\varphi}{kr^k} \right) = \int (V - Q) \, d \left(\frac{\sin k\varphi}{kr^k} \right), \\ & (k = 1, 2, 3, \dots \infty).\end{aligned}$$

§ 3.

Die Eindeutigkeit der Darstellung einer complexen Function mittelst des Cauchy'schen Integrales.

Der oben gefundene allgemeine Satz gestattet folgende Umkehrung:

Ist für den Rand eines ebenen Gebietes eine stetige Function U gegeben, und kann man eine Function V ermitteln, für welche die Gleichungen (4) oder (9) erfüllt sind, so stellt die Gleichung

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{r}$$

eine Function dar, welche im Inneren des Gebietes die Bedingung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllt und an dem Rande den Werth U besitzt.

Der Beweis ergibt sich durch eine Umkehrung der vorigen Betrachtung. Indem man nämlich die Functionen u_1, u_2, v_1, v_2 einführt (Gleichungen 3), und die Function U' durch die Gleichung definiert:

$$U' = U_1 + U_2,$$

erhält man aus den Gleichungen (2) zusammen mit den Gleichungen (4) die Relationen:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi} \int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int V_1 \frac{dl}{l} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int U_2(d\sigma)_x, \\
v_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int U \frac{dl}{l} = -\frac{1}{2\pi} \int U_1 \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi} \int V_1(d\sigma)_x \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int U_1 \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi} \int U_2 \frac{dl}{l}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\int U(d\sigma)_x = \int U'(d\sigma)_x, \quad \int U \frac{dl}{l} = \int U' \frac{dl}{l}$$

und aus diesen Gleichungen ist zu schliessen, dass die stetigen Functionen U und U' identisch sind.

Dazu bedarf man des folgenden Satzes:

Wenn eine stetige, nur für den Rand eines Gebietes definirte Function W die Eigenschaft hat, dass für jeden Punkt im Inneren des einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes

$$\frac{1}{2\pi} \int W(d\sigma)_x \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \int W \frac{dl}{l}$$

constant gleich Null sind, so ist W für alle Punkte des Randes ebenfalls gleich Null.

Der Beweis für diesen Satz ist meines Wissens noch nicht ausgeführt worden, und in der That nicht ganz einfach, wenn man in Bezug auf die Function W keine weiteren, beschränkenden Voraussetzungen einführen will. Aber der Inhalt des Satzes ist von Bedeutung, weil aus ihm unmittelbar hervorgeht, dass die Integralrelationen (4) oder (9) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Zusammenhang der Functionen U und V bilden, und dass eine complexe Function nur auf eine einzige Weise in der Form des Cauchy'schen Integrales und der in demselben enthaltenen Reihenentwicklung darstellbar ist. Ich halte es daher für gerechtfertigt, auf den Beweis ausführlich einzugehen.

Lässt man den inneren Punkt x an einen Randpunkt s herandrücken, so wird

$$(12) \quad \lim \frac{1}{2\pi} \int W(d\sigma)_x = \frac{1}{2} W_s + \frac{1}{2\pi} \int W(d\sigma)_s = 0,$$

daher

$$W_s = -\frac{1}{\pi} \int W(d\sigma)_s.$$

Hat man es mit einem ebenen Gebiete zu thun, das nur von einer einzigen Randcurve begrenzt ist, die ohne nach innen gerichtete Spitzen

oder Ecken nach aussen überall convex ist, oder allgemeiner ausgedrückt, deren Tangenten nicht in das Innere der Fläche eintreten, so kann man schon aus dieser letzten Gleichung unmittelbar schliessen, dass $W = 0$ ist. Denn in diesem Falle ist $(d\sigma)_s$ eine durchweg positive Grösse und

$$\frac{1}{\pi} \int (d\sigma)_s$$

im allgemeinen (d. h. abgesehen von etwaigen Eckpunkten) gleich Eins. Bezeichnet nun M denjenigen Werth von W , dessen Betrag am grössten ist, so ist auch

$$\frac{1}{\pi} \int (M + W) (d\sigma)_s = 0.$$

Da in diesem Integral alle Elemente von gleichem Zeichen sind, so muss im allgemeinen

$$M + W = 0$$

gleich sein; und da W stetig sein sollte, so ist überall W constant gleich $-M$. Diese Constante kann aber nur Null sein, zufolge der Gleichung

$$-\frac{1}{2\pi} \int M (d\sigma)_x = -M = 0.$$

Im allgemeinen Falle aber sind zunächst die Functionen

$$\frac{1}{2\pi} \int W (d\sigma)_{x'} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \int W \frac{dl'}{l'}$$

gebildet für einen ausserhalb der Fläche gelegenen Punkt (x', y') zu untersuchen. Die Richtung der Normale ist bei diesen Integralen dieselbe wie früher.

Lässt man nun den äusseren Punkt an den Randpunkt s heranrücken, so gelten immer, d. h. bei jeder stetigen Function W die Gleichungen:

$$(13) \quad \lim \frac{1}{2\pi} \int W (dx)_{x'} = -\frac{1}{2} W_s + \frac{1}{2\pi} \int W (d\sigma)_s,$$

$$(14) \quad \lim \frac{1}{2\pi} \int W \frac{dl'}{l'} = \lim \frac{1}{2\pi} \int W \frac{dl}{l}.$$

Die erste Gleichung ergibt sich ebenso wie im vorigen Paragraph die Gleichung (5), wenn man nur beachtet, dass beim Heranrücken eines äusseren Punktes an das Element $d\sigma$ der Winkel $(d\sigma)_{x'}$ negativ wird und den Grenzwert $-\pi$ erhält*). Aus den Gleichungen (12) und (13) folgt dann

*) Aus dieser Gleichung folgt, dass die Existenz einer Lösung der Randwerthaufgabe gezeigt ist, sobald die Möglichkeit nachgewiesen ist, das innere Gebiet einer Fläche derart eindeutig auf das äussere conform abzubilden, dass die Punkte der Randcurve sich selbst entsprechen.

$$(15) \quad -\lim \frac{1}{2\pi} \int W(d\sigma)_x = W_s,$$

Es muss also W_s constant sein, wenn der Nachweis geführt werden kann, dass auch für alle äusseren Punkte das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int W(dx)_x = \text{const.}$$

ist. Diese Constante kann dann nur Null sein, weil das Integral für den unendlich fernen Punkt diesen Werth hat.

Die Eigenschaft der Constanz folgt aber unmittelbar aus der noch zu beweisenden Gleichung (14). Denn da in dieser Gleichung unserer Voraussetzung zu Folge die rechte Seite constant gleich Null ist, so ist auch die linke Seite constant gleich Null, und die Function

$$\frac{1}{2\pi} \int W \frac{dl'}{l'}$$

ist dann überhaupt gleich Null, weil sie auch im Unendlichen diesen Werth hat. Folglich muss auch die conjugirte Function

$$\frac{1}{2\pi} \int W(d\sigma)_x$$

Null sein.

Der Beweis für die Gleichung (14) lässt sich folgendermassen führen:

Auf der Normale im Randpunkte s seien zu verschiedenen Seiten von s die Punkte x und x' in der beliebig kleinen Entfernung a von s gewählt. Indem wir annehmen, dass die Randcurve an keiner Stelle unendlich viele Wendungen besitzt, und nun den Punkt s nicht etwa in einen Wendepunkt verlegen, lässt sich eine convexe und eine concave Seite in der Umgebung von s unterscheiden. Mit x möge der Punkt bezeichnet sein, welcher auf der concaven Seite von s liegt, mit x' der andere. Es kann jetzt also x auch den äusseren Punkt bezeichnen, wenn die Curve bei s ihre concave Seite nach aussen kehrt, x' ist dann ein innerer Punkt. Der Punkt s sei zum Anfangspunkte eines Polarcoordinatensystemes gewählt, die Tangente in s sei die Coordinatenaxe; $r = f(\varphi)$ die Gleichung der Curve. Indem man zu beiden Seiten von s einen beliebig kleinen Bogen von der Gesamtlänge σ' abschneidet, von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = \varphi'$ auf der einen Seite der Normalen, und von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = \varphi''$ auf der anderen Seite, sind nur die Integrale zu betrachten, welche sich auf diesen Bogen σ' beziehen. Denn für den übrigen Theil des Randes, σ'' , ist die Gleichung:

$$\lim \int_{\sigma'} W \frac{dl}{l} = \lim \int_{\sigma''} W \frac{dl'}{l'}$$

für $x = x' = s$ selbstverständlich.

Der Winkel von 0 bis φ' (und ebenso von 0 bis φ'') sei so klein gewählt, dass zu jedem Werthe von φ zwischen 0 und φ' nur ein Werth von r gehört; ferner sei nicht nur r für dieses Bogenstück eine durchaus wachsende Function, sondern es sei auch a so klein gewählt, dass für diesen Werth von a , sowie für alle kleineren die Grösse l immer grösser als a ist. Da

$$l^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = r^2 + a^2 - 2ar \sin \varphi,$$

so verlangt diese Bedingung, dass $r^2 - 2ar \sin \varphi > 0$, d. h. $a < \frac{r}{2 \sin \varphi}$ ist. Diese Forderung ist immer erfüllbar, wenn sich die Randcurve in der Umgebung des Punktes s verhält, wie eine analytische Curve in einem regulären Punkte, wenn also daselbst z. B. r durch eine nach ganzen Potenzen von φ fortschreitende Reihe darstellbar ist, die mit der ersten Potenz von φ beginnt. Es ist nun

$$(16) \quad \begin{aligned} l^2 &= r^2 + a^2 - 2ar \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = r^2 + a^2 - 2ar \sin \varphi, \\ l'^2 &= r^2 + a^2 - 2ar \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = r^2 + a^2 + 2ar \sin \varphi \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W \frac{dl}{l} + \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W \frac{dl'}{l'} &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d \lg\left(\frac{l}{l'}\right) = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d \lg\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) \\ \frac{l^2}{l'^2} &= \frac{r^2 + a^2 - 2ar \sin \varphi}{r^2 + a^2 + 2ar \sin \varphi}, \\ \frac{1}{2} d\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) &= \frac{4r dr ar \sin \varphi - 2(r^2 + a^2) ad(r \sin \varphi)}{l'^4} \\ &= \frac{(r^2 - a^2) 2a [\sin \varphi dr - r \cos \varphi d\varphi] - 4ra^3 \cos \varphi d\varphi}{l'^4}. \end{aligned}$$

Das Differential $\sin \varphi dr - r \cos \varphi d\varphi$ wird, wenn man es wie oben mit einem regulären Punkte zu thun hat, nicht unendlich oft sein Vorzeichen wechseln, sondern während φ das Intervall von 0 bis φ' durchläuft, stets positiv oder negativ, oder auch gleich Null bleiben. Ist längs eines ganzen Bogenstückes

$$\sin \varphi dr - r \cos \varphi d\varphi = 0,$$

so ist dieser Bogen ein Kreisbogen oder eine Gerade. Unsere Voraussetzung lässt sich geometrisch durch die etwas engere ersetzen, dass ein Kreis, welcher die Curve im Punkte s tangirt, nicht in beliebiger Nähe des Punktes s , und also auch nicht auf dem beliebig kleinen zu φ' gehörigen Bogen einen weiteren Berührungspunkt mit der Curve besitzt.

Die Grösse $(r^2 - a^2)$ wechselt ihr Zeichen, indem r durch den Werth a hindurchgeht. Setzt man zur Abkürzung das obige Differential

$$\frac{1}{2} d\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) = \frac{(r^2 - a^2) 2a du - 4a^3 r dv}{l'^4},$$

so behält jedes der Differentiale du und dv , während φ von 0 bis φ' variiert, ein unverändertes Zeichen und es ist

$$(17) \quad \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d \lg \left(\frac{l^2}{l'^2} \right) = \\ = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{r=a} W \frac{(r^2 - a^2) 2a}{l^2 l'^2} du + \frac{1}{2} \int_{r=a}^{\varphi=\varphi'} W \frac{(r^2 - a^2) 2a}{l^2 l'^2} du - \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W \frac{4a^3 r}{l^2 l'^2} dv.$$

In Bezug auf das Differential du ist also eine Theilung des Integrationsintervalles vollzogen worden, weil $r^2 - a^2$ sein Vorzeichen wechselt. Auf jedes der Integrale rechts lässt sich nun der erste Mittelwerthsatz anwenden. Man bezeichne drei mittlere Werthe von W im Intervall von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi'$ mit

$$W_{0\varphi'}, \quad W_{\varphi'\varphi'}, \quad W_{\varphi''\varphi'},$$

so ist die rechte Seite gleich:

$$\frac{1}{2} W_{0\varphi'} \int_{r=0}^{r=a} \frac{(r^2 - a^2) 2a}{l^2 l'^2} du + \frac{1}{2} W_{\varphi'\varphi'} \int_{r=a}^{\varphi=\varphi'} \frac{(r^2 - a^2) 2a}{l^2 l'^2} du - \frac{1}{2} W_{\varphi''\varphi'} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4a^3 r}{l^2 l'^2} dv.$$

Die Grösse φ' kann von vornherein so gewählt werden, dass die Werthe der stetigen Function W in diesem Intervall um weniger als eine Grösse δ sich unterscheiden. Also ist, wenn man

$$W_{0\varphi'} = W_{\varphi'\varphi'} \pm (< \delta),$$

$$W_{\varphi''\varphi'} = W_{\varphi'\varphi'} \pm (< \delta)$$

setzt, die obige Summe gleich

$$(18) \quad W_{0\varphi'} \left[\lg \frac{l}{l'} \right]_{\varphi=0}^{\varphi'}$$

bis auf eine Grösse, deren Betrag kleiner ist als

$$(19) \quad \frac{\delta}{2} \left[\text{abs} \int_{r=0}^{r=a} \frac{(r^2 - a^2) 2a}{l^2 l'^2} du + \text{abs} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4a^3 r}{l^2 l'^2} dv \right].$$

In dem Ausdruck (18) verschwindet $\lg \frac{l}{l'}$ für $\varphi = 0$ und stellt für $\varphi = \varphi'$ eine endliche Grösse dar, die mit a nach Null convergirt. Es ist also nur noch zu zeigen, dass die beiden in (19) enthaltenen Integrale jedenfalls endlich bleiben, wenn a nach Null convergirt. Das erste dieser Integrale ist gleich

$$\int_{r=0}^{r=a} \frac{2a(r^2 - a^2)}{l^2 l'^2} (\sin \varphi \, dr - r \cos \varphi \, d\varphi).$$

Da nun l^2 und l'^2 gleich oder grösser sind wie a^2 , und da der Betrag von $r^2 - a^2$ gleich oder kleiner ist wie a^2 , so ist der Betrag dieses Integrales kleiner wie

$$\frac{2}{a} \int_{r=0}^{r=a} dr + 2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=a} \cos \varphi \, d\varphi = 2 + 2 [\sin \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=a},$$

also jedenfalls endlich. Desgleichen ist in dem anderen Integrale

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4a^2 r \cos \varphi}{l^2 l'^2} \, d\varphi$$

$l^2 > a^2$, $l'^2 > ar$, also wird der Betrag des Integrales kleiner als

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} 4 \cos \varphi \, d\varphi = 4 \sin \varphi'.$$

Damit ist bewiesen, dass

$$\lim_{\varphi=0} \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W \, d \lg \left(\frac{l^2}{l'^2} \right)$$

beliebig klein wird für $a = 0$. Dasselbe gilt auch für den anderen Theil des Bogens σ' . Sonach ist der Satz vollständig bewiesen, und zwar für jede Randcurve, die im allgemeinen, d. h. bis auf einzelne singuläre Punkte, in Bezug auf ihre Tangente und deren Aenderung dieselben Eigenschaften besitzt, wie eine analytische Curve in einem regulären Punkt.

Man kann den obigen Satz auch noch in folgender Weise erweitern:

Wenn eine integrirbare, überall endliche Randfunction W die Eigenschaft hat, dass für jeden Punkt (x, y) im Innern eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes

$$\frac{1}{2\pi} \int W(d\sigma)_x \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \int W \frac{dl}{l}$$

constant gleich Null sind, so ist W für die Punkte des Randes im allgemeinen gleich Null, d. h. die Stellen, an denen W um mehr als irgend eine bestimmte Grösse von Null verschieden ist, bilden eine „discrete Menge“.

Der Beweis ergibt sich, indem man an Stelle der Function W aus der Gleichung (12) die ihr „im allgemeinen“ gleiche Function

$-\frac{1}{\pi} \int W(d\sigma)$, einführt; denn diese Function ist ausser in etwaigen Eckpunkten der Randcurve stetig.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass der Satz

$$\lim \frac{1}{2\pi} \int W \frac{dl}{l} = \lim \frac{1}{2\pi} \int W \frac{dl}{l'}$$

aussagt: Bezeichnen W_i und W_a die inneren und äusseren logarithmischen Potentiale einer Doppelbelegung, so besteht zwischen den Differentialquotienten nach der inneren und äusseren Normale des Randes in jedem Randpunkte die Gleichung

$$\frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_a}{dn_1} = 0,$$

vorausgesetzt, dass diese Ableitungen überhaupt bestimmte stetige Werthe haben.

§ 4.

Die Neumann'sche Lösung der Randwerthaufgabe für eine Fläche ohne einspringende Randtangenten.

Die weitere Anwendung der Gleichung (9) liefert unter gewissen Bedingungen eine Lösung der Aufgabe, die Function u (und v) zu bestimmen, wenn die Werthe der Function U längs des Randes gegeben sind. Es ist das die Lösung, welche Herr Neumann in seiner oben genannten Schrift gegeben hat. Sie führt auf dem directesten Wege zum Ziele, daher ich sie im Zusammenhange mit meinen Untersuchungen noch kurz angeben möchte.

Es ist

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l}.$$

Ist also U gegeben, so ist nur das zweite Integral noch unbekannt. Für dieses ergibt die erste der Gleichungen (9):

$$\frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi} \int P(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int Q \frac{dl}{l}.$$

Hier ist die Function $Q = \frac{1}{\pi} \int V(d\sigma)_x$ unbekannt. Beachtet man nun, dass $-Q$ die conjugirte Function zu P ist, so kann man dieselbe Relation zwischen P und $-Q$ entwickeln, wie zwischen U und V . Sind also P_1 und Q_1 die zugeordneten Functionen zu P und $-Q$, so wird

$$-\frac{1}{2\pi} \int Q \frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi} \int P(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi} \int P_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int Q_1 \frac{dl}{l}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, indem man zu P_1 , $-Q_1$ die zugeordneten Functionen P_2 , Q_2 bestimmt, so erhält man schliesslich die Gleichung:

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l} &= \frac{1}{2\pi} \int U(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi} \int P(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi} \int P_1(d\sigma)_x + \dots \\ &+ (-1)^n \cdot \frac{1}{\pi} \int P_{n-1}(d\sigma)_x + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int P_n(d\sigma)_x \\ &+ (-1)^n \cdot \frac{1}{2\pi} \int Q_n \frac{dl}{l}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung bestimmt das gesuchte Integral, und zwar in Form einer unendlichen Reihe, wenn die Function P_n , und also auch Q_n , mit wachsenden Werthen von n immer mehr einer Constante sich nähert. Es wird dann

$$\lim \int Q_n \frac{dl}{l} = 0, \quad \lim \frac{1}{2\pi} \int P_n(d\sigma)_x = C$$

und man erhält die Function in der Form:

$$(21) \quad \begin{aligned} u &= C + \frac{1}{\pi} \int (U - P)(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi} \int (P_1 - P_2)(d\sigma)_x + \dots \\ &+ \frac{1}{\pi} \int (P_{2n-1} - P_{2n})(d\sigma)_x + \dots \end{aligned}$$

oder auch

$$(22) \quad \begin{aligned} u &= -C + \frac{1}{\pi} \int U(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi} \int (P - P_1)(d\sigma)_x \\ &- \frac{1}{\pi} \int (P_2 - P_3)(d\sigma)_x - \dots \\ &- \frac{1}{\pi} \int (P_{2n} - P_{2n+1})(d\sigma)_x - \dots \end{aligned}$$

Für eine Fläche, deren Randcurve so gestaltet ist, dass die Tangenten derselben nicht in das Innere eintreten, bei welcher also $(d\sigma)_x$ und $(d\sigma)_y$ stets positiv ist, lässt sich die Convergenz dieser Reihe nachweisen; und zwar ergibt sich dieselbe aus dem Satze, dass bei diesen Flächen die Schwankungen der Functionen U , P , P_1 , P_2 , ... stärker wie eine geometrische Progression abnehmen. Der Fall der Dreiecks- und Vierecksfläche ist dabei noch besonders zu berücksichtigen.

Die vorstehende Entwicklung bleibt auch dann noch gültig, wenn für U bloss die Voraussetzung der Endlichkeit und Integrirbarkeit gemacht wird. Auch ist die ganze Betrachtung (wie überhaupt ohne jede Einschränkung die Sätze in § 2 und § 3) auf die von der Curve begrenzte äussere Fläche mit geringer Modification übertragbar. Für eine beliebig gestaltete Randcurve aber lässt sich die Convergenz

dieser Reihen, die man mit Einführung eines festen Punktes a, b in der Form

$$\begin{aligned} & u(x, y) - u(a, b) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int U(d\sigma)_x - \int U(d\sigma)_a \right] - \frac{1}{\pi} \left[\int P(d\sigma)_x - \int P(d\sigma)_a \right] + \dots \\ & \quad + (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \left[\int P_n(d\sigma)_x - \int P_n(d\sigma)_a \right] \dots \end{aligned}$$

zusammenfassen kann, allgemein noch nicht nachweisen. Auch ist es bisher nicht gelungen, verwandte Reihen dieser Art für den allgemeinen Fall zu bilden. Derselbe erfordert, zumal bei den räumlichen Problemen in der Potentialreihe, eine andere Methode des Beweises.