Begründung der elliptischen Geometrie.

Von

GERHARD HESSENBERG in Grunewald bei Berlin.

Inhalt.

	Seite
§ 1. Einleitung	173
§ 2. Kreise und Kreisbüschel	174
§ 3. Pseudogeometrie	175
§ 4. Winkelvergleichung und Parallelverschiebung	177
§ 5. Allgemeine Streckenkongruenz	179
§ 6. Das Kreisbogenviereck	180
§ 7. Der Pascalsche Satz	182
§ 8. Der „kleine“ Desarguessche Satz	183
§ 9. Übergang in die wirkliche Geometrie	184

§ 1.

Einleitung.

Nachdem Herr D. Hilbert die Geometrie der hyperbolischen Ebene mittels der Endenrechnung allein auf ebenen Axiomen, zugleich unter Ausschluß des Archimedischen Axioms, aufgebaut hat, war zu erwarten, daß die analoge Aufgabe für die elliptische Ebene auch lösbar sei. Die Lehre von den Flächeninhalten und dem sphärischen Exzeß hat M. Dehn*) bereits in diesem Sinne dargestellt, so daß im wesentlichen noch der Nachweis der projektiven Geometrie für die elliptische Ebene zu erbringen blieb.

In der hier gegebenen Darstellung habe ich mich einer Pseudogeometrie bedient, eines Verfahrens, das auch Dehn**) mit Erfolg angewandt hat. Während Dehn die wirklichen Geraden auch als Pseudogeraden wählt, habe ich Kreise zu Pseudogeraden genommen. Dadurch erscheint zuletzt die wirkliche Geometrie in der Pseudogeometrie als

*) Über den Inhalt sphärischer Dreiecke, Math. Ann. 60.

**) Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, Math. Ann. 53.

ihr eigenes winkeltreues Bild. Zugleich gelingt durch die Übernahme der Winkelkongruenz aus der wirklichen in die Pseudogeometrie der Beweis des Pascalschen Satzes in recht einfacher Weise.

Die Einführung der Streckenvergleiche in die Pseudogeometrie habe ich völlig nach dem Dehnschen Vorgange ausgeführt. Als Hauptschwierigkeit stellt sich hier der Desarguessche Satz entgegen, der bei Dehn räumlich bewiesen wird. Nachdem mir unter ziemlichem Aufwand von Hilfsmitteln verschiedenster Art sein Beweis gelungen war, fand ich zuletzt, daß er eine Folge des Pascalschen Satzes ist; hierdurch ist die Arbeit schließlich bedeutend abgekürzt worden, vor allem ist die zuerst mit Erfolg angewandte Hilbertsche Streckenrechnung wieder in Wegfall gekommen.

§ 2.

Kreise und Kreisbüschel.

Die elliptische Geometrie von zwei Dimensionen ist im Euklidischen Raume als Sphärik verwirklicht, und zwar in derjenigen Form, bei der zwei „Gerade“, d. h. für die Kugelgeometrie größte Kreise, sich stets in zwei und nur zwei Punkten schneiden. In dieser Form erleidet der Satz von der eindeutigen Bestimmung der Geraden durch zwei ihrer Punkte eine Ausnahme: diese Punkte dürfen keine Gegenpunkte sein.

Für die projektive Geometrie der Sphärik ist diese Ausnahme ohne Bedeutung. Ersetzt man das Grundelement „Punkt“ durch „Punktepaar“, so ist eine Gerade durch zwei voneinander verschiedene Punktepaare eindeutig bestimmt und zwei Gerade bestimmen ausnahmslos eindeutig ein Punktepaar. Durch die Zuordnung von Pol und Polare ist zugleich von vornherein das Reziprozitätsgesetz sicher gestellt. Jedem Punktepaare ist eine Gerade eindeutig zugeordnet und umgekehrt und ineinander liegenden Elementen entsprechen ineinander liegende. Also gilt zu jedem Schnittpunktsatze der reziproke.

Für die metrischen Fragen ist die sphärische Form der elliptischen Geometrie vorteilhafter als diejenige Form, in der zwei Gerade sich nur einmal schneiden. Denn die elliptische Ebene hat in der sphärischen Form den Zusammenhang einer zweiseitigen Fläche. Jede geschlossene Linie, auch die Gerade, teilt sie in zwei Teile. Dadurch ist der Betätigung der Raumanschauung bei der Beweisführung eine wesentliche Erleichterung geschaffen.

Vor allem aber gilt in der sphärischen Form der Satz:

I. Durch drei Punkte geht stets ein und nur ein Kreis.

Hierbei sind die Geraden mit zu den Kreisen gerechnet. Aus (I) folgt sofort, daß zwei Kreise sich höchstens in zwei Punkten schneiden

können. In der anderen Form der elliptischen Geometrie gehen dagegen durch drei Punkte vier Kreise, es gilt also weder (I) noch seine Umkehrung. Dies veranlaßt uns, im folgenden die sphärische Form zugrunde zu legen. In welcher Weise die Gültigkeit der gefundenen Resultate auf die einseitige elliptische Ebene zu übertragen sein wird, darf als bekannt gelten.

Zwei Kreise, die einen Punkt P gemeinsam haben, sind sicher nicht konzentrisch. Da die beiden Mittelpunkte eines Kreises ein Punktepaar bilden, ist also die Zentrale der beiden Kreise eindeutig bestimmt. Liegt zunächst P nicht auf der Zentrale, so erhält man durch Spiegelung von P an der Zentrale einen zweiten Punkt Q , der auch auf beiden Kreisen liegt. Die Kreise schneiden sich also zweimal.

Liegt zweitens P auf der Zentralen, so können beide Kreise keinen anderen Punkt gemein haben. Wir sagen dann, sie berühren sich in P . Berührt ein Kreis zwei andere in demselben Punkt P , so berühren sich diese beiden untereinander. Denn sind M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte, so liegt P auf $M_1 M_2$ und auf $M_1 M_3$, daher liegen $M_1 M_2 M_3$ mit P in einer Geraden, wenn von Nullkreisen abgesehen wird.

Damit erhalten wir die beiden Formen des Kreisbüschels mit reellen und mit zusammenfallenden Grundpunkten. Nennen wir die Gesamtheit aller Kreise durch einen festen Punkt P , deren Zentra auf einer festen Geraden p liegen, einen Kreisbüschel, so liegt entweder P auf p , und alle Kreise berühren sich in P . Jeder Kreis, der einen des Büschels in P berührt, gehört selbst zum Büschel. Oder P liegt nicht auf p . Dann sei Q der an p gespiegelte Punkt P . Alle Kreise des Büschels gehen durch P und Q , und jeder Kreis durch P und Q gehört dem Büschel an. Für beide Arten von Büscheln gilt:

II. *Durch jeden Punkt der Ebene geht ein und nur ein Kreis des Büschels.*

§ 3.

Pseudogeometrie.

Wir konstruieren nun folgende Pseudogeometrie in der elliptischen Ebene: Als Punkte der Pseudogeometrie wählen wir die Punkte der elliptischen Ebene unter Ausschluß eines bestimmten, an sich willkürlichen, der mit U bezeichnet wird. Sein Gegenpunkt heiße O .

Als Pseudogerade wählen wir die Kreise der wirklichen Geometrie, die U enthalten. Dann sind die Geraden durch O auch Pseudogerade und umgekehrt, und jede Pseudogerade, die zugleich Gerade ist, enthält O .

Durch zwei Punkte der Pseudogeometrie geht eine und nur eine Pseudogerade, auf Grund von Satz I.

Jeder Kreis durch U bestimmt einen Berührungsbüschel, nämlich den aller Kreise, die ihn in U berühren. Alle diese Kreise sind, da sie U enthalten, Pseudogerade, und da sie außer U keinen Punkt gemeinsam haben (nach II), sind sie *nichtschneidende* Pseudogerade der Pseudogeometrie. Wir nennen nichtschneidende Pseudogerade „parallel“. Der Zusatz „pseudo“ ist überflüssig, da die wirkliche Geometrie keine Parallelen hat.

Nunmehr folgt aus II: *Zu einer gegebenen Pseudogeralen kann durch einen Punkt nur und stets eine Parallele gezogen werden.*

Es gilt also in der Pseudogeometrie das Parallelenaxiom, und wir definieren danach in bekannter Weise die uneigentlichen Elemente der Pseudogeometrie: ein Berührungsbüschel mit dem Grundpunkte U heißt ein „*unendlichferner Punkt*“ der Pseudogeometrie, die Gesamtheit aller unendlichfernen Punkte heißt die „*unendlichferne Gerade*“.

Wir können jetzt die Elemente der wirklichen Geometrie denen der Pseudogeometrie in einfacher Weise zuordnen. Jeder Geraden p der wirklichen Geometrie entspricht ein Kreisbüschel, dessen Zentrale sie ist und dessen einer Grundpunkt U ist. Liegt U auf p , so ist der Büschel ein unendlichferner Punkt, den wir p zuordnen. Liegt U nicht auf p , so spiegeln wir U an p nach P und ordnen P der p zu. P ist ein zweiter Grundpunkt des Büschels, und der Büschel besteht aus allen Pseudogeralen durch P . Hierdurch ist jeder wirklichen Geraden ein Pseudopunkt zugeordnet und umgekehrt.

Jeder Pseudogeralen ordnen wir ein Punktepaar der wirklichen Geometrie zu, nämlich ihre beiden Mittelpunkte, die ihr als wirklichem Kreise zugehören. Damit ist umgekehrt jedem Punktepaare PQ der um P und Q als Mittelpunkte durch U gehende Kreis als Pseudogeralen zugeordnet. Nur das Paar OU versagt. Diesem ordnen wir die unendlichferne Gerade zu.

Da jetzt ineinander liegenden Elementen wieder ineinander liegende entsprechen, muß jedem Schnittpunktsatz der einen Geometrie der reziproke Satz der anderen entsprechen. Ist also die projektive Geometrie für die Pseudogeometrie als gültig nachgewiesen, so gilt sie auch in der wirklichen.

Es mögen noch zwei Sätze hervorgehoben werden, wenngleich eine Anwendung von ihnen nicht gemacht werden wird:

III. *In der Pseudogeometrie gilt das Reziprozitätsgesetz.*

Denn es gilt in der wirklichen Geometrie.

IV. *Gilt in der Pseudogeometrie ein affin spezialisierter Schnittpunktsatz, so gilt seine projektive Verallgemeinerung.*

Als „affine Spezialisierung“ bezeichnen wir mit Vahlen die Voraussetzung, daß eine Gerade unendlichfern sei. In den „Grundlagen der Geometrie“ hat Herr Hilbert mit Erfolg die affine Spezialisierung des Pascal-

schen und Desarguesschen Satzes durchgeführt. Die affine Spezialisierung bedeutet für die wirkliche Geometrie, daß U ein Punkt der Figur sei. Da U beliebig gewählt werden darf, ist die Beschränkung auch für die Pseudogeometrie aufgehoben.

Von Satz III erfolgt eine Anwendung nicht, weil der fundamentale Pascalsche Satz ebenso wie der Desarguessche zu sich selbst reziprok ist. Satz IV ist dadurch überflüssig, daß der Pascalsche Satz wie auch der Desarguessche, sofern er affin spezialisiert gilt, auch allgemein gültig ist.

§ 4.

Winkelvergleichung und Parallelverschiebung.

Um in der Pseudogeometrie Strecken- und Winkelmessung einzuführen, stellen wir zunächst die Anordnungsaxiome her: Sind A, B, C drei Punkte auf einer Pseudogeraden, so liegt B zwischen A und C , wenn es durch A und C von U getrennt ist. Auf Grund dieser Definition erweisen sich in der Tat die Anordnungsaxiome der Euklidischen Geometrie für die Pseudogeometrie als gültig.

Wollen wir bei der Einführung der Winkelvergleichung mit der Euklidischen Geometrie in Übereinstimmung bleiben, so müssen wir dafür sorgen, daß Winkel mit gleichgerichtet-parallelen Schenkeln kongruent sind. Dies erreichen wir durch die Festsetzung, daß Winkel im Sinne der Pseudogeometrie kongruent heißen sollen, wenn sie es im Sinne der wirklichen Geometrie sind. Es ist nämlich eine einfache Folgerung aus den Kongruenzsätzen, daß zwei sich schneidende Kreise sich an beiden Schnittpunkten unter gleichen Winkeln treffen. Der Winkel zweier Pseudogeraden, die sich in P treffen, tritt daher bei U nochmals auf und ist nur abhängig von den beiden Berührungsbüscheln, denen die beiden Pseudogeraden angehören. Wir folgern daher speziell den Satz von der Gleichheit der inneren Wechselwinkel an Parallelen, auf Grund dessen die Winkelsumme im pseudogeradlinigen Dreieck zwei Rechte beträgt*).

Fig. 1.

Fig. 2.

*) Vgl. hierzu die Bemerkung von Herrn Wallenberg in den Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges., Jahrg. IV, 2tes Stück, der Fig. 2 entnommen ist.

Wollen wir nun weiter die Streckenvergleichung so definieren, daß die Euklidische Geometrie zustande kommt, so schließen die bereits getroffenen Festsetzungen jede Willkür aus, und wir werden im Gegenteil zu zeigen haben, daß wir uns in keine Widersprüche verwickeln.

Seien zunächst PQ und RS zwei Strecken auf parallelen, voneinander verschiedenen Pseudogeraden. Stimmt noch die Richtung von P nach Q mit der von R nach S überein, so werden wir PQ und RS dann als pseudokongruent bezeichnen, wenn PR mit QS parallel ist. Denn dies trifft in der Euklidischen Geometrie zu. In Zeichen schreiben wir

$$PQ \# RS \text{ (gesprochen „parallel und gleich“).}$$

Da über verschieden oder entgegengesetzt gerichtete Strecken hiermit nichts ausgesagt ist, steht hiernach noch nicht fest, ob PQ zu QP kongruent ist.

Soll nun aus $PQ \# AB$, $RS \# AB$ auch $PQ \# RS$ folgen, so muß folgender Spezialfall des Desarguesschen Satzes gültig sein:

V. (Kleiner Desarguesscher Satz) *Laufen in zwei Dreiecken APR , BQS die Verbindungslinien homologer Ecken AB , PQ , RS parallel und sind zwei Seiten des einen, AP , AR , den homologen des anderen, BQ , BS , parallel, so ist auch das dritte Seitenpaar parallel.*

Daß dieser Satz in der Pseudogeometrie tatsächlich gilt, wird in § 8

Fig. 3.

Fig. 4.

gezeigt werden. Vorläufig setzen wir seine Gültigkeit voraus und zeigen, daß sich nunmehr die Kongruenz auch für Strecken derselben Geraden definieren läßt.

Seien nämlich AB und RS zwei Strecken derselben Geraden, PQ eine Strecke außerhalb und $PQ \# AB$, so sagen wir, es sei

$$AB \# RS, \text{ wenn auch } RS \# PQ \text{ ist.}$$

Um zu zeigen, daß die Beziehung von der speziellen Wahl von PQ unabhängig ist, sei LM eine zweite außerhalb von AB und PQ gelegene Strecke und $LM \# AB$. Dann folgt aus $AB \# PQ$ weiter $LM \# PQ$ und aus $PQ \# RS$ weiter $LM \# RS$, also

$$AB \# LM \# RS.$$

Für Strecken LM auf PQ wende man das Beweisverfahren zweimal an.

§ 5.

Allgemeine Streckenkongruenz.

Nunmehr sind alle Strecken in Klassen parallelgleicher Strecken geordnet, wobei jede Strecke je nach der Stellung der Endpunkte als PQ und QP zu verschiedenen Klassen zu rechnen ist. Der Begriff der Kongruenz verschieden gerichteter Strecken kann nunmehr dadurch definiert werden, daß man aus jeder Klasse parallelgleicher Strecken einen Repräsentanten auswählt und für diese Gesamtheit der Repräsentanten die Kongruenz passend einführt.

Am nächstliegenden ist es, zu jeder Strecke eine parallegleiche von O aus zu konstruieren. Dann haben alle Repräsentanten einen Endpunkt gemeinsam und sind auch Strecken im Sinne der wirklichen Geometrie, da die Pseudogerade durch O wirkliche Gerade sind.

Zwei entgegengesetzt gerichtete Repräsentanten OA und OB müssen nun dann als pseudokongruent erklärt werden, wenn im bisher definierten Sinne $AO \# OB$ ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß durch einen an sich beliebigen Punkt P außerhalb von OA und OB eine Strecke $PQ \# AO$ und $\# OB$ gezogen werden kann. Wir treffen nun für P eine spezielle Wahl, indem wir durch O zwei Gerade OP' , OQ' ziehen, derart, daß $\sphericalangle P'OA = \sphericalangle Q'OB = \alpha$ und OP' innerhalb des Winkels $Q'OA$ gelegen ist.

Fig. 5.

Diese Gerade sind zugleich Pseudogerade, da sie durch O gehen.

Nun ziehen wir durch A die Pseudogerade AP parallel mit OQ' bis zu P auf OP' , dann PQ parallel mit AOB bis Q auf OQ' . Dann ist $PQ \# AO$, und soll es auch $\# OB$ sein, so ist QB parallel mit PO .

In dem pseudogeradlinigen Dreieck OPQ sind nun die Winkel bei P und Q einander gleich. Ziehen wir die wirkliche Gerade PQ , so bilden die Pseudo- und die wirkliche Gerade PQ bei P und Q als schneidende Kreise gleiche Winkel, also sind auch in dem wirklich geradlinigen Dreieck OPQ die Winkel bei P und Q gleich.

Errichten wir in O das Lot auf AB , so halbiert dies den Winkel POQ , steht also auf der wirklichen Geraden PQ senkrecht. Da es ferner durch U , den Schnittpunkt der Kreise AP und QB , geht, ergibt sich leicht, daß die ganze Figur im Sinne der wirklichen Geometrie symmetrisch, also OA zu OB wirklich kongruent ist.

Zuletzt betrachten wir den Fall zweier Repräsentanten OP , OQ , die nicht entgegengesetzt gerichtet sind. Sollen sie pseudokongruent sein, so

muß in dem pseudogeradlinigen Dreieck OPQ und nach dem eben gebrauchten Schlusse auch in dem wirklich geradlinigen Dreieck OPQ der Winkel bei P gleich dem bei Q sein, woraus folgt, daß OP zu OQ wirklich kongruent ist.

Damit finden wir, daß Strecken, die von O ausgehen, dann und nur dann als pseudokongruent zu bezeichnen sind, wenn sie wirklich kongruent sind. —

Nunmehr ist noch nachzuweisen, daß folgende zwei Kongruenzaxiome zutreffen:

a) Ist AB pseudokongruent PQ , BC pseudokongruent QR , C auf AB , B zwischen A und C , R auf PQ , Q zwischen P und R , so ist AC pseudokongruent PR .*)

b) Ist AB zu PQ , AC zu PR pseudokongruent und $\sphericalangle BAC$ gleich $\sphericalangle QPR$, so ist $\sphericalangle BCA$ gleich $\sphericalangle QRP$.**)

Nimmt man zunächst an, die Strecken, von deren Pseudokongruenz die Rede ist, seien auch parallel, so ergibt sich der erste Satz, weil aus $AP \parallel BQ$, $BQ \parallel CR$ auch $AP \parallel CR$ folgt; Satz (b) enthält die Figur des kleinen Desarguesschen Satzes, ist also richtig, sowie der fehlende Beweis für V erbracht ist.

Bringt man nunmehr im allgemeinen Fall durch Parallelverschiebung in (a) und (b) die Punkte A und P nach O , so ist zunächst leicht zu zeigen, daß die verschobenen Figuren im Sinne der wahren Geometrie kongruent sind; und daraus ergibt sich ihre Pseudokongruenz. Man beweist überhaupt ohne Mühe, daß jede wahre Rotation um O auch eine Pseudorotation und jede Spiegelung an einer Geraden durch O auch eine Pseudospiegelung ist.

§ 6.

Das Kreisbogenviereck.

Die Entwicklungen dieses Paragraphen sind vom Parallelenaxiom unabhängig und gelten daher ohne weiteres für die elliptische und die Euklidische Geometrie, was für § 9 von Bedeutung ist. (Für die hyperbolische Geometrie gelten unsere Resultate, sowie durch die Zusammenfassung der Kreise, Grenzkreise und Linien gleichen Abstands die Möglichkeit geschaffen ist, durch drei Punkte *stets* einen Kreis zu legen.)

Seien $ABCD$ vier Punkte, die durch Kreisbögen von irgend welchen Radien zu einem einfachen Kreisbogenviereck verbunden seien. Dann ist die Differenz der Gegenwinkelsummen dieses Vierecks nur von der Lage

*) Hilbert, *Grundl.*, § 5 III, 3.

**) Ebenda, III, 6.

und Reihenfolge der vier Punkte, nicht aber von den Radien der verbindenden Kreisbögen abhängig. Ersetzt man nämlich irgend einen der Bögen, etwa AB , durch einen von anderm Radius, so ändern sich die Winkel bei A und B , also auch die Gegenwinkelsummen $\sphericalangle A + \sphericalangle C$ und $\sphericalangle B + \sphericalangle D$ um denselben Betrag; ihre Differenz bleibt also invariant. In diesem Sinne wollen wir den Ausdruck

$$(ABCD) = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA - \sphericalangle BCD - \sphericalangle DAB$$

als eine Invariante des Vierecks $ABCD$ bezeichnen.

Fig. 6.

Fig. 7.

Die Figur 6 zeigt den Satz zunächst für den einfachen Fall, daß das Viereck sich nicht überschlägt. Beachtet man aber den Umlaufssinn der Winkel, so bleibt der Satz auch für das überschlagene Viereck formell unverändert, wenn man von Änderungen um den vollen Betrag von 2π absieht. Dies soll im folgenden auch geschehen, wo von dem „Verschwinden“ der Invarianten die Rede ist.

Je nach der Anordnung der vier Punkte erhält man drei Invarianten:

$$(ABCD), (ABDC), (ACBD).$$

Von diesen gelten folgende wichtigen Sätze:

VI. *Die drei Invarianten verschwinden nur gleichzeitig.*

VII. *Das Verschwinden der Invarianten ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß A, B, C, D auf einem Kreise liegen.*

Liegen nämlich A, B, C, D auf einem Kreise, so bilden dessen Bögen die Seiten eines Kreisvierecks durch A, B, C, D . Im einfachsten Fall sind alle Winkel gleich π und die Invariante verschwindet. Aber auch bei überschlagener Anordnung der Ecken findet man stets die Invariante als Null oder 2π .

Ist umgekehrt $(ABCD) = 0$, so ersetze man die Bögen AB, BC durch die des Kreises ABC , die Bögen CD, DA durch die des Kreises CDA .

Fig. 8.

Dann folgt im einfachsten Falle, daß die Winkel bei B und D gestreckt, also die Summe der Winkel bei A und C ebenfalls gleich zwei gestreckten Winkeln ist. Nun sind die Winkel bei A und C als Winkel derselben Kreise einander gleich, also jeder gestreckt, woraus die Identität der beiden Kreise folgt. Im überschlagenen Fall ergeben sich einfache Modifikationen.

Hiermit ist Satz VII bewiesen, Satz VI ist eine Folge davon.

§ 7.

Der Pascalsche Satz.

Um nun die projektive Geometrie für die Pseudogeometrie nachzuweisen, stützen wir uns auf die Winkelkongruenz, das Parallelenaxiom und den Satz von der Winkelsumme. Dagegen dürfen wir von der Streckenkongruenz keinen Gebrauch machen.

Da nun jedes pseudogeradlinige Viereck im Sinne der wirklichen Geometrie ein Kreisbogenviereck ist und seine Winkel im Sinne der wirklichen Geometrie gemessen werden, gilt Satz VI für die pseudogeradlinigen Vierecke, und zwar mit der bekannten Modifikation, die durch das Hinzutreten des Satzes von der Winkelsumme entsteht. Für ein Viereck mit verschwindenden Invarianten sind nämlich die Gegenwinkel supplementär, wenn das Viereck nicht überschlagen ist, sie sind gleich im anderen Falle.

Hiernach aber kann der Beweis des Pascalschen Satzes auf demjenigen Wege geführt werden, den Herr Hilbert in den Grundlagen als dritten angibt. Um ihn nicht einfach abschreiben zu müssen, wollen wir ihn etwas anders darstellen.

Ob ein Viereck $ABCD$ verschwindende Invarianten hat, hängt, da jetzt das Parallelenaxiom gilt, nur von den Richtungen der Seiten ab. Und zwar bildet BC mit AB und CD dieselben Winkel, wie AD mit CD und AB . Wir wollen dafür kurz sagen, BC und AD seien „antiparallel“ in bezug auf AB und CD . Die Bezeichnung lehnt sich an die kinematische des „Antiparallelogramms“ an. Satz VI nimmt nun folgende Form an:

VI*. Ist in bezug auf AB und CD die Gerade AD zu BC antiparallel, so ist auch AC zu BD antiparallel.

Ferner ist folgendes evident:

VIII. Sind zwei Geraden zu einer dritten in bezug auf dieselben Richtungen antiparallel, so sind sie zueinander parallel.

Sind nun g, g' zwei Gerade, ABC Punkte der ersten, $A'B'C'$ Punkte

der zweiten, AB' zu BA' , AC' zu CA' parallel, so behauptet der Pascalsche Satz, daß auch BC' zu CB' parallel sei.

Im Beweis ist bei „antiparallel“ stets „in bezug auf gg' “ hinzuzudenken.

Wir ziehen AD' antiparallel zu BC' , D' liege auf g' . Dann ist nach VI* BD' antiparallel zu AC' . Nach Voraussetzung folgt damit

(1) BD' antiparallel zu CA' ,
also nach VI*

BA' antiparallel zu CD' .

Damit nach Voraussetzung

(2) CD' antiparallel zu AB' ,
also nach VI*

CB' antiparallel zu AD' .

Damit nach VIII:

BC' parallel zu CB' , weil beide antiparallel zu AD' .

Fig. 9.

§ 8.

Der „kleine“ Desarguessche Satz.

Nachdem der Pascalsche Satz bewiesen ist, gilt, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe*), auch der Desarguessche, folglich auch der kleine Desarguessche Satz V. Damit ist die Lücke ausgefüllt, die bei der Definition der Pseudokongruenz offen geblieben war.

Bei meinem Beweis des Desarguesschen Satzes in der affinen Spezialisierung wird vorausgesetzt, daß sich die Verbindungslinien homologer Ecken der parallelen Dreiecke in einem wirklichen Punkte schneiden. Nachdem unter dieser Annahme der Desarguessche Satz bewiesen ist, folgt, daß auch der bisher ausgeschlossene kleine Desarguessche Satz gilt, und zwar, genau genommen, durch apagogischen Beweis, weil durch wiederholte Umkehrung.

Ich habe mich überzeugt, daß auch der kleine Desarguessche Satz direkt beweisbar ist, doch ist mir der Beweis zur Wiedergabe nicht kurz genug. Dagegen ist es vielleicht angebracht, einen apagogischen Beweis des Satzes V direkt aus dem soeben bewiesenen Pascal anzugeben, da ja der allgemeine Desarguessche Satz hier nicht in Frage kommt, sein Beweis für diese spezielle Untersuchung also eigentlich ein Umweg ist. Wünschenswert wäre ein ganz einfacher Beweis des Satzes V direkt aus Satz VI*; einen wirklich einfachen besitze ich indes nicht.

*) Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, diese Zeitschrift, dieser Band, pg. 161.

Fig. 10.

Wir beweisen folgenden Satz:

V. Es sei AB zu $A'B'$, AC zu $A'C'$, BB' zu CC' parallel. Dagegen sei AA' zu BB' und CC' nicht parallel, dann ist auch $B'C'$ zu BC nicht parallel.*

Vorausgesetzt ist natürlich, daß A, B, C nicht in einer Geraden liegen.

Schneide AA' die BB'

in V , die CC' in W . Wir ziehen $VP \parallel AC$, $WP \parallel AB$. P ist ein wirklicher Punkt, da AC und AB nicht parallel sind. Aus dem Pascalschen Sechseck $A'C'WPVB'$ folgt, daß P auf $B'C'$, aus dem Sechseck $ACWPVB$, daß P auf BC liegt. Also schneiden sich BC und $B'C'$, w. z. b. w. —

Durch Umkehrung folgt sofort Satz V.

§ 9.

Übergang in die wirkliche Geometrie.

Der Rückschluß von der Pseudogeometrie auf die wirkliche Geometrie erfolgt nun, nachdem der Aufbau der Euklidischen Geometrie in der Pseudogeometrie gesichert ist, am einfachsten über Satz VII, dessen Gültigkeit in beiden Geometrien jetzt feststeht. Jedes Viereck, dessen Seiten Kreisbögen von Kreisen durch U sind, ist ein pseudogeradliniges Viereck und umgekehrt, und seine Invarianten haben in beiden Geometrien gleiche Größe, verschwinden also in beiden gleichzeitig. Vier Punkte haben daher in beiden Geometrien gleichzeitig Kreislage, und aus Satz I schließen wir damit auf die Übereinstimmung der Kreise in beiden Geometrien:

IX. Jeder eigentliche Kreis der Pseudogeometrie ist ein Kreis oder eine Gerade der wirklichen Geometrie, der U nicht enthält.

Die Polare von O und U ist speziell ein Kreis H der Pseudogeometrie, für den alle Durchmesser auch wirkliche Gerade sind. Die Endpunkte eines jeden Durchmessers sind Gegenpunkte im Sinne der wirklichen Geometrie, daher sind alle Diametralkreise von H , und nur diese, die Geraden der wirklichen Geometrie; damit erhält man die bekannte Abbildung der Kugel auf ein Kreisnetz der Euklidischen Geometrie, aus der sich die Sphärik in bekannter Weise bis zur Trigonometrie weiter entwickeln läßt.

Grunewald, April 1905.