DELL' ENERGIA MINIMA CHE È NECESSARIA A PRODURRE LA SENS-
ZIONE DEL SUONO; DEL PROF. A. STEFANINI.

1. Le vibrazioni dell'aria che producono il suono continuano ad eccitare il nostro orecchio, anche quando la loro ampiezza è divenuta talmente piccola, da sfuggire ad ogni misura diretta. A persuadersi di ciò basta pensare al modo col quale funzionano i telefoni, e rammentare, che, secondo il Pellat ¹⁾, l'energia che 1 gr. d'acqua cede raffreddandosi di 1° c., se fosse trasformata totalmente in energia elettrica e comunicata ad un telefono, basterebbe per produrre un suono percettibile per ben 10 mila anni di seguito.

Per determinare fino a qual punto il nostro orecchio è sensibile ai suoni, sono state fatte delle esperienze; e quantunque il soggetto sia assai complicato e difficile, i risultati ottenuti dai diversi sperimentatori sono abbastanza concordanti fra loro; se non nelle più minute particolarità, almeno nel fissare l'ordine di grandezza della quantità che si trattava di determinare. Così secondo Töpler e Boltzmann ²⁾, che sperimentarono con tubi chiusi da organo da 182, v. c., l'energia che per ogni secondo attraversa un cm³ quando il suono cessa di sentirsi è $10000 \cdot 10^{-8}$ ergs; mentre secondo il Rayleigh ³⁾, che adoperò un tubo aperto che rendeva il fa₄ (2730 v. c.), sarebbe di $4500 \cdot 10^{-8}$ ergs. Questo valore concorda assai col precedente; ma non può essere, come quello, che un limite superiore del valore cercato, perchè una parte dell'energia che è comunicata al corpo sonoro non si trasforma in suono, e un'altra parte è assorbita dal mezzo in cui il suono si propaga. L'ampiezza di vibrazione delle particelle d'aria, quando il suono è per cessare, sarebbe così, secondo il Rayleigh, assai inferiore a 1 milionesimo di mm.

Più recentemente C. K. Wead ⁴⁾ eseguì nuove esperienze con alcuni diapason di altezze diverse, comprese fra il do₄ e il do₅, e trovò per l'energia anzi detta i valori seguenti, espressi, come

1) *Journ. de Phys.* 1881.

2) *Pogg. Ann.* 141. 1870.

3) *Proc. R. S.* 26. pag. 248, 1877.

4) *Sill. Journ.* 26. pag. 177, 1883.

i precedenti, in centomilionesimi di ergs per cm² al secondo:

<i>do</i> ₂	<i>do</i> ₃	<i>sol</i> ₃	<i>do</i> ₄	<i>sol</i> ₄	<i>do</i> ₅
8300	280	260	110	2200	710.

Facendo astrazione dal valore trovato pel diapason *do*₂, la cessazione del cui suono era difficile ad apprezzarsi per la prosimità della sua altezza a quella dei rumori dominanti in vicinanza del luogo ove le esperienze furon fatte, quei numeri, tanto fra loro diversi, accennerebbero solamente a una maggior sensitività dell' orecchio per le note dell' ottava media. In vece dalle esperienze di Allard ¹⁾ il Wead (l. c. pag. 189) deduce che per un suono dovuto a *n* vibraz. compl. al secondo (*n* compreso fra 400 e 1500), il valore dell'energia minima anzi detta sarebbe espresso da $4, 3 \cdot 10^{-8} n$ ergs, e quindi minore per le note più basse che per quelle più alte.

Il metodo di ricerca usato dal Wead consisteva nel far vibrare un diapason, o montato sulla sua cassa di risonanza, o posto davanti ad essa, e nel determinare l'istante in cui il suono cessava di esser sentito a una data distanza. In quell'istante egli misurava, con un microscopio munito di micrometro oculare, l'ampiezza di oscillazione del diapason. Per mezzo di una formula dedotta dalla teoria dell'elasticità calcolava poi l'energia potenziale del diapason, e quindi l'energia che arrivava per unità di superficie e di tempo all'orecchio, nel momento in cui il suono cessava di esser sentito.

La valutazione dell'energia posseduta dalle onde sonore doveva con questo metodo esser certamente più precisa che coi precedenti, e quindi era da aspettarsi che i numeri trovati dovessero accennare a qualche legge, più determinata di quella su riferita. Mi è parso perciò che dovesse riuscire di qualche interesse una discussione dei metodi analitici usati dal Wead, per vedere se dalle resultanze delle di lui esperienze si potessero dedurre conclusioni più determinate.

2. Per l'energia potenziale *V* di un diapason, mediante alcune considerazioni sul valore della freccia di flessione di una verga di sezione rettangolare, il Wead trova che, se α è la frec-

1) *Compt. rend.* 95. pag. 1062, 1882.

cia dell'estremità libera ed l è la lunghezza della verga, si può porre, pei suoi diapason, in ergs:

$$(I) \quad V = \frac{1.028 \cdot 10^{11} a^2}{l^3},$$

avendo la sezione delle branche dei diapason adoperati le dimensioni c. $1,4 \times 0,65$. Egli dice di non aver usato, per calcolare V , la formula data dal Rayleigh, perchè per scopi sperimentali è più conveniente esprimere l'energia in funzione dell'ampiezza di vibrazione, più tosto che del raggio di curvatura che compare in quella formula del Rayleigh.

Ma alla relazione (I) si giunge anche partendo dall'espressione indicata dal Rayleigh; e reputo opportuno mostrare come il valore di V possa così ottenersi, perchè di alcune formule, che compariranno nei calcoli a ciò necessari, dovrò servirmi nel seguito di questa discussione.

Osservando che per piccole flessioni la sbarra resta quasi rettilinea, e che quindi nell'espressione del suo raggio di curvatura si può trascurare il termine $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, il Rayleigh ¹⁾ dimostra che l'energia potenziale di una sbarra vibrante uniforme è:

$$(II) \quad V = \frac{1}{2} q \chi^2 \omega \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx,$$

ove y è lo spostamento trasversale di quel punto dell'asse della sbarra la cui ascissa, misurata parallelamente alla posizione di riposo dell'asse stesso, è x , e ove q , l , ω , χ^2 sono rispettivamente il modulo d'elasticità, la lunghezza, la sezione trasversale, e il raggio di girazione della sezione ω attorno all'asse che passa pel suo centro di gravità e che è perpendicolare al piano di flessione.

Nel caso di una verga che ha un'estremità ($x=0$) fissa, e l'altra ($x=l$) libera, per equazione differenziale delle vibrazioni trasversali si può prendere ²⁾

1) Lord Rayleigh, *Die Theorie des Schalles*. ediz. tedesca 1880, vol. I, pag. 274.

2) Rayleig, l. c. I. pag. 276. Kirchhoff *Mech.* pag. 441. Violle, *Cours de Phys.* II, pag. 197.

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \chi^2 b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

se b è la velocità di propagazione del moto vibratorio nella verga, e purchè sieno soddisfatte le condizioni seguenti:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{all' estremità libera: } \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \frac{d^3 y}{dx^3} = 0; \\ \text{» fissa: } y = 0, \frac{dy}{dx} = 0. \end{cases}$$

Se la sbarra rende un suono il cui periodo di vibrazione è T , si potrà porre:

$$(3) \quad y = \frac{a_0}{u(l)} u(x) \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

ove la u è una funzione della sola x che sodisfa all'equazione

$$(4) \quad \frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{4\pi^2}{T^2 \chi^2 b^2} u,$$

e alle condizioni che derivano dalle (2); ed ove a_0 è l'ampiezza iniziale di vibrazione dei punti $x = l$, e $u(l)$ il valore che prende la u per $x = l$.

Se si pone

$$\frac{4\pi^2}{T^2 \chi^2 b^2} = \left(\frac{m}{l}\right)^4,$$

un integrale particolare della (4) è

$$u = e^{p \frac{mx}{l}},$$

indicando con p una delle radici dell'equazione

$$p^4 = 1;$$

l'integrale generale della (4) sarà perciò:

$$(5) \quad u = A \left(\cos \frac{mx}{l} + \cosh \frac{mx}{l} \right) + B \left(\cos \frac{mx}{l} - \cosh \frac{mx}{l} \right) \\ + C \left(\sin \frac{mx}{l} + \sinh \frac{mx}{l} \right) + D \left(\sin \frac{mx}{l} - \sinh \frac{mx}{l} \right).$$

Le costanti A, B, C, D devono determinarsi mediante le condizioni (2) ai limiti: facendo uso delle quali si trova che se m soddisfa all'equazione

$$(6) \quad \cos m \cosh m = -1,$$

si può porre:

$$(7) \quad u = \left(\sin m + \sinh m \right) \left(\cos \frac{mx}{l} - \cosh \frac{mx}{l} \right) \\ - \left(\cos m + \cosh m \right) \left(\sin \frac{mx}{l} - \sinh \frac{mx}{l} \right).$$

Ai diversi valori di m corrispondono altrettanti valori di T ; e alla più piccola radice della (6) corrisponde il suono fondamentale della sbarra, del quale soltanto dobbiamo qui occuparci. Dai calcoli eseguiti dal Rayleigh ¹⁾ si deduce che la (7), pel valore più piccolo di m che è

$$m = 1,875104,$$

si può porre sotto la forma:

$$(8) \quad u = \cos \left(\frac{mx}{l} + c \right) - d e^{\frac{mx}{l}} - f e^{-\frac{mx}{l}},$$

essendo:

$$c = 36^{\circ} 16', 9335$$

$$d = 0, 10717$$

$$f = 0, 69894.$$

Se dunque calcoliamo il valore di V pel caso di $\cos \frac{2\pi t}{T} = 1$, cioè quando la deformazione della sbarra è massima, il valore

1) Rayleigh, *l. c.* §. 179.

di $\frac{d^2 y}{dx^2}$ nella (II) sarà $\frac{a_0}{u(l)} \frac{m^2}{l^2} u''(x)$, ed avremo:

$$(9) \quad V = \frac{1}{2} q \chi^2 \omega \frac{a_0^2}{u^2(l)} \frac{m^2}{l^2} \int_0^l u''^2(x) dx,$$

avendo posto:

$$\frac{du}{dx} = \frac{m}{l} u', \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{m^2}{l^2} u''.$$

Ora il Rayleigh dimostra che nel caso attuale si ha ¹⁾

$$(10) \quad \int_0^l u'^2(x) dx = \frac{1}{4} lu^2(l),$$

e poichè dalla (4) si ha, integrando per parti e tenendo conto delle condizioni del problema:

$$(11) \quad \int u''^2(x) dx = \int u'^2(x) dx,$$

la (9) diviene:

$$V = \frac{q \chi^2 \omega m^4 a_0^2}{8 l^8}.$$

Per i diapason usati dal Wead si ha:

$$\omega = 1,4 \times 0,65 = 0,910$$

$$\chi^2 = \frac{(0,65)^2}{12} = 0,0352$$

$$q = 2,14 \cdot 10^{12}$$

$$m = 1,875 \cdot 10^4,$$

e quindi, a calcoli fatti,

$$V = \frac{1,059 \cdot 10^{11} a_0^2}{l^8}.$$

Il valore così trovato è alquanto maggiore di quello indicato dal Wead; ma ciò doveva essere, perchè la curva elastica di cui ha fatto uso il Wead è da per tutto, fuorchè all'estremità, più vicina all'asse di ciò che non lo sia la curva, che rappresenta

1) Rayleigh, l. c. pag. 283.

effettivamente la forma che la sbarra prende durante la vibrazione.

Per equazione della sbarra deformata si potrebbe prendere, come fa il Clebsch ¹⁾:

$$u = \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3},$$

che è una soluzione approssimata della (4), ottenuta sviluppando in serie le funzioni trascendenti che compariscono nella (7) e limitandosi ai primi termini dello sviluppo.

Allora si troverebbe

$$V = \frac{1,028 \cdot 10^{11} a_0^3}{l^3},$$

che coincide perfettamente col valore trovato dal Wead.

3. Per calcolare l'energia minima che è necessaria per produrre la sensazione del suono, il Wead osserva che l'energia del diapason in un istante qualunque può esser rappresentata dalla precedente espressione (I) di V, purchè in essa, ammettendo l'equazione solita pel moto oscillatorio di un corpo in un mezzo

resistente, in luogo di a si ponga $ae^{-\frac{\alpha t}{2}}$ ove α è il coefficiente di smorzamento. Indicando con P il coefficiente di a^3 nella (I), e chiamando 2 W l'energia cinetica di tutto il diapason, si ha quindi

$$2W = 2P a^3 e^{-\alpha t} = 2V.$$

E poichè questa espressione di W resta sensibilmente costante per tutto un periodo, il Wead osserva che la quantità

$$\frac{2}{dt} \frac{dW}{dt} = -2V\alpha$$

rappresenta una quantità proporzionale all'energia che arriverà all'orecchio durante l'unità di tempo, al momento in cui il suono cesserà di sentirsi, se nella espressione di V sopra indicata la a rappresenterà l'ampiezza di vibrazione del diapason in quel momento.

1) Clebsch, *Théorie de l'Elast. des corps solida*. Trad. S. Venant et Flamant, p. 588.

Ora questo è vero purchè, quando si eseguisce l'esperienza si possa determinare con precisione l'*istante* in cui cessa il suono; ma è evidente che coll'esperienza si potrà al più affermare che tale cessazione del suono dovrà essere avvenuta *in un certo intervallo di tempo*, e che quindi sarà più esatto valutare l'energia che in quell'intervallo possedeva il corpo vibrante per unità di tempo, con l'espressione

$$\frac{1}{T} \int_0^T W dt$$

se W è l'energia cinetica e T il periodo di vibrazione, per poi dedurne quella che arrivava all'orecchio per c^* e per sec, nell'intervallo di tempo in cui si giudicò che il suono cessava.

Il valore di W può calcolarsi tenendo conto della forma che prende ciascuna branca del diapason durante la vibrazione.

In fatti, se y è definito dalla (3) e u dalla (8) e ρ è la densità della sbarra, l'energia cinetica ad ogni istante, dovuta ai movimenti di traslazione delle molecole è

$$(12) \quad W = \frac{1}{2} \rho \omega \int_0^l \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dx ,$$

e l'energia media sarà quindi

$$(13) \quad W_m = \frac{1}{T} \int_0^T W dt .$$

Ora dalla (3) si ha

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{a_0}{u(l)} \frac{2\pi}{T} u(x) \sin \frac{2\pi t}{T} ,$$

perciò sostituendo nella (12) e rammentando la (10) si ha:

$$(14) \quad W = \frac{\pi^2 \rho \omega l a_0^2}{2T^2} \sin^2 \frac{2\pi t}{T} .$$

Nello stabilire la (8) si è supposto che la vibrazione si compia per effetto delle sole forze interne, e si son trascurate le resistenze che si oppongono alle oscillazioni del diapason. La (8)

rappresenta cioè la forma che prende la sbarra allorchè l'estremità $x = l$ è spostata di a_0 dalla sua posizione di riposo; e se ciascun punto della sbarra compiesse, lasciato a sè, un'oscillazione pendolare di ampiezza costante, la forma della sbarra ad ogni istante si potrebbe rappresentare con la (3). Ma l'ampiezza massima di oscillazione di ciascun punto va diminuendo continuamente; ed è noto che per una prima approssimazione si può prender l'oscillazione di un punto definitivo dalla legge:

$$(15) \quad a = a_0 e^{-\frac{kt}{2}} \cos \gamma t.$$

Continuando le mie ricerche sulla misura dell'intensità del suono, ho avuto modo di verificare sperimentalmente che il valore di k nella (15) non si può ritenere costante, ciò che fu riconosciuto anche dal Wead, il quale trovò che si potrebbe porre

$$k = a + b \frac{z' + z''}{2}$$

essendo a e b costanti, e z' e z'' le ampiezze fra le quali k è stato determinato.

I risultati da me ottenuti per la legge di oscillazione dei diapason sono invece rappresentati assai meglio dalla formula

$$(16) \quad a = a_0 e^{-\alpha t^m} \cos \gamma t,$$

con α , m e γ costanti per ciascun diapason e per qualunque ampiezza iniziale inferiore a 5 mm. Per tener conto dunque della variazione che subisce col tempo l'ampiezza massima di oscillazione, bisognerebbe far uso della (16); ma poichè l'integrazione rispetto a t della funzione che dovrebbe sostituirsi alla (14) non sarebbe allora possibile in forma finita, si può continuare a tener valida la (15), purchè per k si prenda il valore che, al momento dell'esperienza, gli spetta secondo le osservazioni del Wead.

Poniamo dunque

$$(17) \quad y = \frac{a_0}{u(l)} u(x) e^{-\alpha t} \cos \gamma t$$

con $\gamma = \frac{2\pi}{T}$ e $\alpha = \frac{k}{2}$; e per le (12) e (13) sarà.

$$W_m = \frac{a_0^2 \rho \omega}{2 u^2(l) T} \int_0^T e^{-2\alpha t} (\gamma \sin \gamma t + \alpha \cos \gamma t)^2 dt \int_0^l u^2(x) dx.$$

Ed eseguendo l'integrazione rispetto ad x mediante la (10), e trasformando, avremo

$$W_m = \frac{a_0^2 \rho \omega l}{8T} \left\{ \frac{\gamma^2}{2} \int_0^T e^{-2\alpha t} (1 - \cos 2\gamma t) dt + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T e^{-2\alpha t} (1 + \cos 2\gamma t) dt + \alpha \gamma \int_0^T e^{-2\alpha t} \sin 2\gamma t dt \right\}.$$

Ora all'infuori delle costanti d'integrazione si ha:

$$\int e^{-\alpha x} dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$$

$$\int e^{-\alpha x} \cos \gamma x dx = \frac{e^{-\alpha x} (\gamma \sin \gamma x - \alpha \cos \gamma x)}{\alpha^2 + \gamma^2}$$

$$\int e^{-\alpha x} \sin \gamma x dx = -\frac{e^{-\alpha x} (\gamma \cos \gamma x + \alpha \sin \gamma x)}{\alpha^2 + \gamma^2}$$

e perciò, applicando queste formule alla precedente espressione di W_m , otterremo:

$$W_m = \frac{a_0^2 \rho \omega l}{8T} \left[-\frac{e^{-2\alpha t}}{4\alpha} (\gamma^2 + \alpha^2) + \frac{(\alpha^2 - \gamma^2) e^{-2\alpha t}}{8(\alpha^2 + \gamma^2)} (2\gamma \sin 2\gamma t - 2\alpha \cos 2\gamma t) + \frac{\alpha \gamma e^{-2\alpha t}}{4(\alpha^2 + \gamma^2)} (2\gamma \cos 2\gamma t + 2\alpha \sin 2\gamma t) \right]_0^T$$

Eseguendo la limitazione col rammentare che $\gamma = \frac{2\pi}{T}$ si avrà finalmente:

$$W_m = \frac{\alpha_0^2 \rho \omega l}{8T} \left(1 - e^{-2xT} \right) \left(\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{4x} + \frac{2x(\alpha^2 - \gamma^2)}{8(\alpha^2 + \gamma^2)} + \frac{2x\gamma^2}{4(\alpha^2 + \gamma^2)} \right).$$

e riducendo:

$$(18) \quad W_m = \frac{\alpha_0^2 \rho \omega l}{16xT^2} \left(1 - e^{-2xT} \right) (T^2 \alpha^2 + 2\pi^2).$$

Oltre questa energia dovuta al moto di traslazione perpendicolarmente all'asse delle x , bisogna tener conto anche di quella dovuta alle rotazioni molecolari attorno all'asse cui si riferisce χ^2 ; e questa è data da

$$W' = \frac{1}{2} \rho \omega \chi^2 \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx dt} \right)^2 dx,$$

e quindi, ponendo al solito $\frac{du}{dx} = \frac{m}{l} u'$, si ha

$$W' = \frac{2m^2 \rho \omega \chi^2 \pi^2 \alpha_0^2}{l^2 u^2(l) T^2} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi t}{T} \int_0^l u'^2(x) dx.$$

Ma

$$\int_0^l u'^2(x) dx = \frac{l}{4m} (2uu' + mu'^2)_{x=0}^l$$

perchè per $x=0$ tanto u che u' si annullano; e perciò eseguendo i calcoli per mezzo della (8) e dei valori già indicati per c, d, f, m , si ha

$$\int_0^l u'^2(x) dx = \frac{1,6077 l}{m}.$$

Il valor medio di W' sarà quindi,

$$W'_m = \frac{1}{T} \int_0^T W' dt = \frac{6}{5} \frac{\chi^2}{l} \frac{\rho \omega \pi^2 \alpha_0^2}{T^2};$$

e ponendo mente al piccolo valore che il rapporto $\frac{\chi^2}{l}$ ha nelle esperienze del Wead, si vede che questo valore di W_m può trascurarsi, perchè non influirebbe sulle cifre di cui si tien conto nel calcolo di W_m .

Il doppio del valore di W_m dato dalla (18) ci potrà dunque rappresentare l'energia media che il diapason comunica per secondo al mezzo ambiente, durante l'intervallo di tempo in cui si giudica che il suono è per cessare, se per α_0 si pone l'ampiezza massima di vibrazione del diapason stesso in quel momento. Tenendo conto della distanza del diapason all'orecchio, si può quindi trovare qual'è l'energia S che arriva per c^3 e per secondo all'orecchio quando il suono è per cessare. Per eseguire i calcoli necessari basta ricorrere ai numeri trovati dal Wead per α e per α_0 nelle sue esperienze; numeri che, colle altre indicazioni necessarie, sono contenuti nella seguente tabella:

DIAPASON	Numero delle vibr. compl. al sec.	l in cm.	$220 \alpha_0$	$k = 2\alpha$	Distanza (in piedi)
do ₃	256	141	2,5	0,085	200
sol ₃	384	116	1,5	0,12	200
do ₄	512	104	2,0	0,17	200
sol ₄	768	84	1,5	0,3	200
do ₅	1024	72	0,72	0,26	200

I numeri della 4^a colonna danno l'ampiezza osservata al microscopio, e devono esser divisi per 220 per esser ridotti in *cm*. Per tutti i diapason adoprati si può porre

$$\omega = 0,910, \rho = 7,5$$

e osservando che per la distanza adoprata dal Wead si trova $S = 2 W_m \cdot 4,3 \cdot 10^{-9}$, si ottengono i valori seguenti per l'energia minima cercata:

$$\begin{array}{ccccc} do_3 & sol_3 & do_4 & sol_4 & do_5 \\ 1737,2 & 1151 & 3260 & 3334 & 1151,4 \end{array}$$

espressi in decimilionesimi di erg per c^3 al sec.

Mentre i numeri trovati dal Wead variano da 1 a 20 circa, questi non variano che da 1 a 3, e quindi si potrebbe concludere che, indipendentemente dall'altezza, e nei limiti delle esperienze ora discusse, la sensitività dell'orecchio sia la stessa per tutti i suoni, dacchè le differenze fra i valori trovati per i diversi diapason facendo uso della (18) potrebbero ascriversi alle piccole differenze nei valori di ρ e di ω , che non posson mancare da un diapason all'altro, e all'influenza del modo con cui i diapason eran posti rispetto alle loro casse di risonanza, essendo solamente i primi tre montati nello stesso modo ¹⁾.

4. Se non si tenesse conto dello smorzamento delle oscillazioni, dalla (14) si avrebbe:

$$W_m = \frac{\rho \omega \pi^2 l a_0^2}{2l^{13}} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{\rho \omega \pi^2 l a_0^2}{4l^{12}}$$

per ciascun rebbio, e quindi l'energia media di tutto il diapason sarebbe:

$$2 W_m = \frac{\rho \omega \pi^2 l n^2 a_0^2}{2},$$

se $n = \frac{1}{T}$ è il numero delle vibrazioni complete al secondo.

L'energia potenziale, secondo il calcolo fatto di sopra, è

$$2 V = \frac{2,12 \cdot 10^{11} a_0^2}{l^3}$$

Il rapporto fra l'energia cinetica media e l'energia potenziale è, quindi, per un diapason qualunque:

$$\frac{W_m}{V} = \frac{\rho \omega \pi^2}{2 \cdot 2,12 \cdot 10^{11}} n^2 l^4,$$

1) Non sarà inutile fare osservare che questa conclusione non contraddirebbe ciò che si ammette comunemente, che cioè l'orecchio sia più sensibile per i suoni più acuti che per i più bassi; perchè dicendo così s'intende che per uguale ampiezza di vibrazione e per uguale distanza dall'orecchio, si sentono meglio i suoni acuti di quelli bassi: o questo è confermato dalla (18), che mostra che per massa e ampiezza di vibrazione uguali, la forza viva media è maggiore in quei diapason che rendono note più acute. Sarebbero in vece contrarie a ciò le deduzioni tratte dal Wead dalle esperienze di Allard (cfr. pag. 219).

e poichè, per le esperienze del Mercadier ¹⁾ si ha

$$n^2 l^2 = (82550 d)^2,$$

se d è lo spessore delle branche del diapason, si vede che, essendo d lo stesso per tutti i diapason usati dal Wead, come per tutti sono uguali ρ ed ω , il rapporto fra W_m e V è costante; ed eseguendo il calcolo si trova esser sensibilmente uguale a $\frac{1}{2}$.

Si può dunque intanto enunciare il teorema: La forza viva media durante una vibrazione è la metà dell'energia potenziale corrispondente alla deformazione massima della sbarra vibrante.

Questo mostra che se non si tien conto del fattore $e^{-\alpha t}$, cioè se si ammette che durante un secondo l'ampiezza di oscillazione dal diapason non diminuisca sensibilmente, e che le persone delle quali si servì il Wead abbiano potuto afferrare con precisione il secondo nel quale il suono era per cessare; e se si ammette che la misura di α_0 si riferisca all'ampiezza media massima in quel secondo; allora l'energia minima cercata si potrebbe prendere proporzionale a V e non a $V\alpha$ come fece il Wead.

Così, poichè dalla tabella VI del Wead si ha.

$$\frac{1}{50} V = \begin{array}{ccccc} do_3 & sol_3 & do_4 & sol_4 & do_5 \\ 77 & 51 & 150 & 170 & 63, \end{array}$$

ed essendo, come si è visto:

$$S = 2V \cdot 4,3 \cdot 10^9 \quad \text{e} \quad W_m = \frac{V}{2}$$

si avrà:

$$S = \begin{array}{ccccc} do_3 & sol_3 & do_4 & sol_4 & do_5 \\ 1655,5 & 1096,5 & 3225 & 3685 & 1354,5 \end{array}$$

Questi numeri sono così prossimi a quelli ottenuti facendo uso del valore di W_m dato dalla (18), che si può ritenere che le ipotesi anzi dette sieno ammissibili, e che il metodo da me usato conduca a risultati più concordanti di quello del Wead.

1) Mercadier, *Compt. rend.* vol. 79. pag. 1001 e 1069.

5. Le esperienze di Vierordt ¹⁾ e di Oberbeck ²⁾ farebbero ritenere che l'intensità fisiologica del suono dovesse essere misurata, per suoni di uguale altezza, dalla quantità di moto che arriva per unità di superficie e di tempo all'orecchio. Servendosi delle esperienze del Wead si può vedere se ciò può ritenersi ancora vero per note di altezza diversa.

Se si prende la (17) per equazione della curva che durante la vibrazione assume una delle branche del diapason, se si pone cioè

$$y = \frac{\alpha_0}{u(l)} u(x) e^{-\alpha t} \cos \gamma t,$$

la quantità di moto media di una branca del diapason, che è data da

$$Q = \frac{\rho \omega}{T} \int_0^T dt \int_0^l dx \frac{dy}{dt},$$

sarà

$$(19) \quad Q = \frac{-\alpha_0 \rho \omega}{T u(l)} \int_0^T e^{-\alpha t} (\gamma \sin \gamma t + \alpha \cos \gamma t) dt \int_0^l u(x) dx.$$

Avendo per la (8):

$$u(x) = \cos \left(\frac{m x}{l} + c \right) - d e^{\frac{m x}{l}} - f e^{-\frac{m x}{l}},$$

si ottiene

$$(20) \quad \int_0^l u(x) dx = \frac{m}{l} \left[\sin \left(\frac{m x}{l} + c \right) - d e^{\frac{m x}{l}} + f e^{-\frac{m x}{l}} \right]_0^l.$$

Ma

$$\frac{du}{dx} = \frac{m}{l} \left\{ -\sin \left(\frac{m x}{l} + c \right) - d e^{\frac{m x}{l}} + f e^{-\frac{m x}{l}} \right\};$$

1) Z. S. f. Biol. 1878 e 1881. *Wied. Ann.* vol. 18, 1883, e vol. 25. 1884.

2) *Wied. Ann.* vol. 18, 1881.

e poichè, per le condizioni (2) deve essere:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

sarà:

$$\left[-de^{\frac{mx}{l}} + fe^{-\frac{mx}{l}}\right]_{x=0} = \text{sen} \left[\frac{mx}{l} + c\right]_{x=0} = \text{sen } c.$$

Vediamo così che per $x=0$ la quantità entro parentesi nella (20) si riduce a $2 \text{ sen } c$; mentre per $x=l$ la quantità stessa si annulla, come può vedersi facilmente eseguendo l'integrazione indicata dalla (20) sulla forma generale (7) della $u(x)$; o come può verificarsi coi calcoli mediante i valori dati di c, d, f, m nel § 2. Dunque avremo finalmente, eseguendo la limitazione:

$$\int_0^l u(x) dx = -\frac{2l}{m} \text{sen } c,$$

e la (19) si riduce a

$$Q = \frac{2a_0 \rho \omega l \text{sen } c}{m T u(l)} \int_0^T e^{-\alpha t} (\gamma \text{sen } \gamma t + \alpha \cos \gamma t) dt.$$

Per quanto si è osservato nei calcoli precedenti relativi a W_m , l'integrazione rispetto a t che qui comparisce si fa facilmente, e si trova:

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\alpha t} (\gamma \text{sen } \gamma t + \alpha \cos \gamma t) dt &= \left[e^{-\alpha t} \left\{ \frac{-\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2} \gamma \cos \gamma t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \text{sen } \gamma t \right\} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \gamma^2} (\gamma \text{sen } \gamma t - \alpha \cos \gamma t) \right]_0^T \\ &= -e^{-\alpha T} \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \alpha^2} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \alpha^2} = 1 - e^{-\alpha T}; \end{aligned}$$

e perciò finalmente, per ciascun rebbio:

$$Q = \frac{2\rho\omega l \text{sen } c}{m u(l)} \frac{a_0}{T} (1 - e^{-\alpha T}).$$

Indicando con M la massa vibrante del diapason, ed eseguendo i calcoli, per tutto il diapason si ha:

$$(21) \quad 2Q = 0,784 \frac{Ma_0}{T} (1 - e^{-\alpha T}) .$$

Anche qui non si è tenuto conto della parte relativa alle rotazioni delle molecole, perchè è trascurabile di fronte al valore di Q , per la stessa ragione indicata nel calcolo della W_m .

Colla formula (21) e coi valori riportati nella tavola della pag. 229, dalle esperienze del Wead risulta che la quantità di moto, che arriva per unità di superficie e di tempo all'orecchio nel momento in cui il suono cessa di sentirsi, è proporzionale ai numeri seguenti:

do_3	sol_3	do_4	sol_4	do_5
29,96	20,88	35,36	37,8	13,47

che sono i valori dell'espressione $\frac{a_0 l}{T} (1 - e^{-\alpha T})$.

Quantunque per i primi tre diapason, che son quelli i cui risultati possono esser maggiormente comparabili, le differenze fra i valori di Q siano minori di quelle fra i rispettivi valori di V o di W_m , nell'insieme i valori precedenti non permettono di decidere se l'intensità fisiologica di suoni diversi sia o no la stessa, quando è la stessa la quantità di moto che arriva all'orecchio per unità di superficie e di tempo, quantunque ciò sembri molto probabile.

In ogni modo i valori di W_m , di V e di Q conducono a risultati fra loro meno discordi, di quelli che Wead ottenne dai valori di $V\alpha$.

DEI COLORI INVISIBILI O LATENTI DEI CORPI;
NOTA DEL PROF. G. GOVI.

Sin dal tempo del Newton i fisici sanno che i colori dei corpi non sono altro se non le varie radiazioni luminose, diffuse, trasmesse, o altrimenti mandate dai corpi all'occhio, il quale le sente, sicchè noi le chiamiamo poi con nomi diversi, secondochè