SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ DELLA PROPAGAZIONE DELLA CORRENTE
ELETTRICA NEI FILI TELEGRAFICI, DEDOTTE DALLA TEORIA DI OHM.

N O T A

DI FILIPPO KELLER.

§. 1°

Sia AB un filo telegrafico, l'estremità A sia in comunicazione con un polo di una pila, e l'altro polo in comunicazione col suolo. La forza e lo stato di questa pila si supponga costante, ed il movimento della elettricità dentro alla pila si assuma istantaneo. La prima di queste condizioni avrà sempre luogo, purchè si considerino solo i tempi molto brevi e la seconda forse non si allontanerà molto dal vero ogni qualvolta le dimensioni della pila siano abbastanza grandi. Dietro queste condizioni l'estremità A del filo telegrafico avrà sempre una certa tensione elettrica costante $= a$. L'altro capo B del filo sia in comunicazione colla terra semplicemente, e si potrà supporre che B abbia sempre la tensione 0 (*). La lunghezza del filo sia $= l$, la sua conducibilità $= k$, la sezione $= \omega$, e la capacità per l'elettricità $= c$: la quale capacità si deve intendere per l'assoluta, cioè che l'unità del volume contenga la quantità c in caso che la tensione sia $= 1$. Per prima cosa si domanda: Quale sarà la tensione u in un punto x del filo in un determinato tempo t , contando le x da A e il t dall'istante, in cui fu stabilita la comunicazione al punto A . Di più si supponga che ω sia piccolissimo in confronto della lunghezza, e che la perdita di elettricità alla superficie del filo sia nulla, e si avrà l'equazione differenziale data da Ohm

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = \frac{k}{c} \frac{d^2u}{dx^2}.$$

§. 2°

È noto, che l'integrale di (1) si può dare sotto la forma

$$(2) \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f\left(x + 2y\sqrt{\frac{k}{c}t}\right) dy$$

dove f indica una funzione arbitraria. Mettendo $t = 0$ si avrà in conseguenza di $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$

(*) Ved. *Traité d'électricité* par De la Rive. Tome III. pag. 439.

$$u = f(x).$$

Adunque $f(x)$ rappresenta la tensione per il tempo 0. Ora $f(x)$ è conosciuta solo per x compresa fra i limiti 0 e l , e si deve cercare quale sia il suo valore fuori di questi limiti. Il metodo di risolvere questo problema è il seguente. Primieramente si vede, che si può fare $f = f' + f''$; inoltre siano u' e u'' i valori corrispondenti a f' e f'' si avrà

$$u = u' + u''.$$

Una delle due funzioni f' e f'' è arbitraria e si può supporre che f' sia tale, da soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2 f'}{dx^2} = 0$$

f' rappresenterà, come si vede facilmente, la tensione elettrica per $t = \infty$.

L'integrale di questa equazione è

$$f' = mx + n$$

e determinando le due costanti m e n dietro la condizione, che alle due estremità le tensioni siano a e 0 si avrà

$$f' = \frac{a}{l} (l - x) \quad \text{oppure} \quad u' = \frac{a}{l} (l - x).$$

Ora si deve determinare la funzione f'' , il cui valore diviene noto fra i limiti 0 e l e che sarà

$$f'' = -\frac{a}{l} (l - x)$$

perchè per il tempo $t = 0$ il filo essendo ancora senza tensione, si avrà

$$f = f' + f'' = 0 \quad \text{e quindi} \quad f'' = -f'.$$

Oltre di questo si sa, che u' dà per le due estremità i valori costanti a e 0, come richiedono le condizioni accennate per il valore di u . Onde si può concludere che f'' deve avere tale proprietà, da produrre $u'' = 0$ per $x = 0$ e per $x = l$, qualunque sia il valore positivo di t .

Questa ultima proprietà è sufficiente per trovare la forma della funzione f'' fuori dei limiti 0 e l . Immaginandosi il filo prolungato all'infinito verso ambedue le direzioni e che $A_1, A_2, A_3 \dots B_1, B_2, B_3 \dots$ siano punti i quali abbiano uno dall'altro la distanza l (cioè $AA_1 = A_1 A_2 \dots = BB_1 = B_1 B_2 \dots = l$), e che $\varphi(x)$ sia la funzione f'' , prendendo però per l'origine delle x successivamente i punti $A, A_1, A_2 \dots B, B_1, B_2 \dots$ evidentemente le condizioni alle quali deve soddisfare la funzione f'' sono le seguenti:

- 1) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, per ciascuno dei punti A e B .
- 2) la tensione per questi punti ha da essere $= 0$.

Si vede dunque che f'' ha la forma di una serie di Fourier, ed è facile di mostrare, che sarà

$$(3) \quad f''(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^l f''(z) \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} z \, dz \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} x \right]$$

onde non rimane più altro, che di sostituire questo f'' nell'equazione generale (2).

Questa equazione diviene dunque

$$u'' = \frac{2}{l\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-y^2} \int_0^l f''(z) \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} z \, dz \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} \left(x + 2y\sqrt{\frac{k}{c}} t \right) \right] dy.$$

Eseguendo l'integrazione per y , si avrà, in conseguenza delle due formole

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cos \left(\frac{(n+1)\pi}{l} 2\sqrt{\frac{k}{c}} t \cdot y \right) dy &= \sqrt{\pi} e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)\pi}{l} 2\sqrt{\frac{k}{c}} t \cdot y \right) dy &= 0. \end{aligned}$$

l'equazione

$$(4) \quad u'' = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^l f''(z) \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} z \, dz \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right].$$

Ma sopra fu trovato

$$f''(z) = -\frac{a}{l} (l - x)$$

fra i limiti 0 e l . Introducendo questo valore nella (4), si avrà

$$u'' = -\frac{2a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

e finalmente

$$(5) \quad u = u' + u'' = \frac{a}{l} (l - x) - \frac{2a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right].$$

Questa equazione dunque dà la relazione fra u , x e t e si vede come si tende a stabilire una tensione indipendente dal tempo t

$$u = \frac{a}{l} (l - x).$$

Si ha ora da trovare la quantità della corrente espressa per x e t e ciò è facile,

*

perchè nominando s questa quantità, si ha in generale

$$s = -k\omega \frac{du}{dx}$$

mettendo il segno negativo, perchè crescendo lo spazio, diminuisce la tensione per una corrente positiva.

Per il caso nostro si avrà

$$(6) \quad s = k\omega \left(\frac{a}{l} + \frac{2a}{l} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right].$$

Il primo membro sotto la parentesi è precisamente la metà del secondo membro generale della somma $\sum$, sostituendo $n = -1$ e si può scrivere anche più semplicemente

$$s = \frac{2k\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos \frac{n\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

dove si ha da osservare, che per quel termine, il quale contiene la linea trigonometrica $\cos n0^\circ$, si ha da prendere solo la metà, come si ha da fare per solito nelle funzioni di questo genere; ma si rimedia a questo piccolo inconveniente solamente apparente, quando si scrive sotto questa forma

$$s = \frac{k\omega a}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\cos \frac{n\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right].$$

La corrente stazionaria si ottiene al crescere del tempo per la (6) facendo t infinito

$$s = \frac{k\omega a}{l}.$$

§. 3°

Immaginiamo adesso che le circostanze siano variate nei seguenti modi:

Dopo che si sia stabilita la corrente stazionaria, si interrompa la comunicazione al punto A, si cerca quale sarà per un certo x e per un certo t la tensione u e la corrente s .

Per questo caso sussiste pure l'equazione (2), ma le condizioni, dalle quali si ha da ricavare la funzione f sono diverse e più semplici.

Dentro i limiti 0 e l il valore di f (cioè il valore della funzione nella quale si trasforma u , mettendo $t = 0$) è conosciuto ed equivale a

$$\frac{a}{l} (l - x) :$$

le condizioni per trovare f fuori dei limiti sono

$$u = 0 \quad \text{per} \quad x = l$$

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{per} \quad x = 0$$

e per ogni t ; la prima fa, che l'estremità B sia sempre in contatto col suolo, e la seconda impedisce che il filo si possa scaricare per l'estremità A . Questa ultima è evidentemente soddisfatta mettendo

$$f(-x) = f(x)$$

dunque adesso f è conosciuto fra i limiti $-l$ e l , e oltre di questo si sa, che per le due estremità $-l$ e l deve essere la tensione 0 per ogni t positivo; e in questa maniera la questione è riportata a quella del § 2°, e la funzione f^n del § 2° è la funzione f presente: solamente si deve osservare,

1) che la lunghezza è adesso $2l$ invece di l

2) l'origine delle x sta alla metà della porzione $(-l, l)$ del filo, invece delle estremità, e le mutazioni per le formole sono le seguenti:

1) Sostituire $2l$ invece di l .

2) Sostituire $x + l$ invece di x e $z + l$ invece di z , e dopo questo si scriverà di nuovo $f(z)$ invece di $f(z + l)$.

3) Introdurre la condizione

$$f(-z) = f(z).$$

Eseguendo queste operazioni si avrà

$$(7) \quad f = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^l f(z) \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} z \, dz \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} x \right].$$

Sostituendo questo valore di f nell'equazione generale (2) si ottiene similmente come nel §. 2°

$$u = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^l f(z) \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} z \, dz \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

e per $f(z) = \frac{a}{l} (l - z)$ si avrà

$$(8) \quad u = \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2} \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

La corrente poi avrà l'espressione

$$(9) \quad s = \frac{2k\omega a}{l} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \operatorname{sen} \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right].$$

Facendo $t = \infty$ diviene nulla, onde non si stabilisce una corrente stazionaria, perchè manca la sorgente.

§. 4°

Veniamo adesso a un terzo caso. Supponiamo che essendo già stabilita una corrente stazionaria $\frac{ak\omega}{l}$ come nel §. 3°, si rovesci la comunicazione della pila col filo, talchè l'estremità A abbia una certa tensione $-a$ per ogni valore positivo di t . Si domanda quali saranno per questo caso le equazioni per u e s . La conclusione, a cui si arriva, è che si tende stabilire una corrente stazionaria $= -\frac{a\omega k}{l}$ come nel §. 2° e il calcolo per trovare u pochissimo differisce da quello del detto paragrafo. Si deve dividere la funzione f della equazione (2) in due parti f' e f'' , dove f' è precisamente f' del §. 2°; solo f'' differisce, ed equivale fra i limiti 0 e l a $-\frac{2a}{l}(l-x)$ e questo valore di f' si ha da sostituire nella (4) invece del $-\frac{a}{l}(l-x)$, e determinato u'' si trova finalmente

$$(10) \quad u = \frac{a}{l}(l-x) - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

e

$$(11) \quad s = k\omega \left(\frac{a}{l} + \frac{4a}{l} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

e in quest'ultima equazione non si può più mettere come nella (6) il primo membro $\frac{a}{l}$ della parentesi sotto il segno $\sum$.

§. 5°

Immaginiamo un punto M mobile, il quale abbia la proprietà da contenere sempre una certa data quantità di corrente $= s$; potremo considerare il moto di questo punto M come rappresentante l'andamento del segno telegrafico, posto che s sia la forza necessaria per fare agire una macchina telegrafica. In questo caso si considera s come costante, e le equazioni (6), (9) e (11) divengono equazioni fra due variabili x e t , e

per trovare la posizione del punto M per un certo t , si avrebbero da risolvere dette equazioni rapporto ad x , finalmente $\frac{dx}{dt}$ rappresenterebbe la velocità colla quale si propaga il segno telegrafico. La loro forma trascendente rende impossibile di eseguire questa operazione. Nonostante questa difficoltà si possono trovare parecchie condizioni particolari.

D'ora in avanti il valore della corrente stazionaria sarà denominato con p , dunque $p = \frac{ak\omega}{l}$ e l'equazione (6) diviene

$$\frac{s}{p} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos \frac{n\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

e si vede che la velocità non può essere costante. Egualmente la supposizione, che la velocità stia in ragion inversa della lunghezza, contraddice l'equazione. Questa ultima condizione richiederebbe, che si avesse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{x} \quad \text{cioè} \quad t = \frac{x^2}{2k} + k'$$

ove k e k' hanno valori costanti. Ma sostituendo questo valore di t nella (6), si avrà una equazione certamente non identica, e l'istesso si può anche dire delle equazioni (9) e (11).

Posto, che p non varii, le tre equazioni (6), (9) e (11) non contengono la quantità ω ; dunque sotto questa supposizione la velocità è indipendente dalla sezione.

Il tempo, che impiega il segno telegrafico per percorrere tutta la lunghezza, si ricaverà mettendo $x = l$ e si avranno le equazioni

$$(12) \quad \frac{s}{p} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right] \text{ per il caso del §. 2.}$$

$$(13) \quad \frac{s}{p} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t}}{n + \frac{1}{2}} \right] \text{ per il caso del §. 3.}$$

$$(14) \quad \frac{s}{p} = \left(1 + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right] \right) \text{ per il caso del §. 4}$$

nella (12) per il membro $n = 0$ prendendo solo la metà.

Ognuna di queste tre equazioni contiene due costanti sole, cioè $\left(\frac{s}{p}\right)$ e $\left(\frac{k}{l^2 c}\right)$ ed esse si possono anche rappresentare sotto la forma

$$\frac{k}{cl^2} t = F\left(\frac{s}{p}\right)$$

dove $F\left(\frac{s}{p}\right)$ indica una certa funzione incognita.

Questa equazione mostra, che il tempo che impiega il segno per percorrere tutta la linea è in ragione del quadrato della lunghezza e in ragione inversa della conducibilità.

Le due equazioni (12) e (13) danno in generale per t valori differenti, dunque i segni telegrafici dei §. 2° e §. 3° cioè quelli corrispondenti all'apertura e chiusura del circuito non impiegano tempi eguali per percorrere tutta la lunghezza del filo; in conseguenza di ciò, tutto il tempo nel quale il *relais* tiene attratta l'*ancora* è differente dalla durata del tempo, che il manipolatore è abbassato, ammesso che questo tempo sia abbastanza lungo per poter adoperare l'equazioni del §. 3°, e l'azione della corrente sull'elettro calamita sia istantanea. Ma è evidente, che esiste un certo valore di $\frac{\pi^2 k}{l^2 c} t$ (e questo termine si metta per brevità $= z$) il quale rende identiche le seconde parti delle equazioni (12) e (13); questo valore di z si cava dalla equazione

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n e^{-n^2 z} \right] = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{e^{-\frac{(2n+1)^2 z}{4}}}{2n+1} \right]$$

e si trova

$$z = 2.085620.$$

Sostituendo questo valore di z in una delle equazioni di (12) o (13) si ricava

$$\frac{s}{p} = 0.7520163.$$

Ogniqualevolta dunque sia $\frac{s}{p}$ maggiore di 0.7520163, l'*ancora* del *relais* resta meno tempo attratta che non resta abbassato il manipolatore: Questo potrebbe essere importante pei cronoscopi, onde determinare la forza della pila, che renda eguali i due tempi.

Ognuna delle equazioni (12), (13), (14), contiene due costanti $\left(\frac{s}{p}\right)$ e $\left(\frac{k}{cl^2}\right)$, come già fu detto di sopra; la prima si potrebbe determinare per ogni caso della pratica facilmente con un galvanometro. La seconda dipende solo dal filo, e non dalla corrente, k significa la conducibilità assoluta, cioè la quantità di elettricità, che passa per qualunque sezione del filo (ammettendo la corrente stazionaria), posto che esso abbia la sezione $= 1$, la lunghezza $= 1$, che la differenza delle tensioni per le due estremità sia $= 1$, e per il tempo $= 1$, e questo in combinazione colla definizione

di c spiegherebbe il valore del quoziente $\frac{k}{c}$. Ma del termine $\left(\frac{k}{cl^2}\right)$ si può dare la definizione seguente: esso si può scrivere nella forma

$$\frac{\left(\frac{k\omega a}{l}\right)}{c \omega a l}$$

Ammesse le medesime condizioni, come nel §. 2°, il numeratore rappresenterà la quantità di elettricità, che passa per una sezione del filo nell'unità di tempo, quando la corrente è stazionaria, e il denominatore sarà la quantità, che contiene il filo, in caso che sia isolata la sua estremità B e uniforme la tensione $\epsilon = a$.

§. 6.

Ritornando adesso di nuovo alla formola (6) del §. 2°, si potrebbe ancora accennare il caso seguente: Sia t_1 il tempo necessario per percorrere tutta la lunghezza del filo, e t_2 il tempo per la prima metà, si trovano le due equazioni le quali danno t_1 e t_2 quando si prende

$$t = t_1 \quad \text{e} \quad x = l; \quad t = t_2 \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2}l.$$

Facendo queste due sostituzioni si ottengono

$$s = \frac{2k\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t_1} \right]$$

$$s = \frac{2k\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n e^{-\frac{4n^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t_2} \right]$$

dunque mettendo $t_1 = 4t_2$, si avrà la identità delle due correnti, e in conseguenza di questo il tempo nel quale il segno percorre tutta la linea è quattro volte più grande, che il tempo impiegato per la prima metà. È notabile, che la relazione $t_1 = 4t_2$ non vale per l'equazione (9). In questo caso la relazione fra t_1 e t_2 dipende anche dal quoziente $\frac{s}{p}$ e si può trovare un valore di $\frac{s}{p}$, il quale produca $t_1 = 2t_2$, di più esistono anche valori di $\frac{s}{p}$, i quali fanno $t_1 < 2t_2$. Ma questa ultima equazione direbbe che il segno impiega per la prima metà di tutta la linea più tempo, che per la seconda. La formola per s' , cioè per la corrente propria del punto $x = \frac{l}{2}$, si può dare sotto la forma

$$s' = \frac{p}{\sqrt{2}} \gamma.$$

dove γ indica una serie, i cui membri senza aver riguardo al segno algebrico, coincidono con quelli della serie

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t}}{n + \frac{1}{2}} \right].$$

Ma mentre in questa ultima i segni algebrici sono alternativamente positivo e negativo, nella serie per γ seguitano sempre due membri negativi a due positivi, cioè sarà

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \left(e^{-\frac{1}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{3^2}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} - \frac{1}{5} e^{-\frac{5^2}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} - \frac{1}{7} e^{-\frac{7^2}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} + \dots \right)$$

Per un t grandissimo i valori di s e s' si riducono ai primi membri delle serie, e si ha

$$s = p e^{-\frac{1}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t_1}, \quad s' = \frac{p}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t_2}$$

e mettendo $t_1 = t_2$, si avrà

$$\frac{s}{s'} = \sqrt{2}$$

ma facendo $s = s'$, si conclude

$$t_2 = t_1 - \frac{l^2}{\pi^2} \frac{c}{k} \text{Lg} 4.$$

Inoltre scrivendo $s_{(x,t)}$ invece di s , intendendo con questa notazione la corrente relativa al tempo t nel punto x , si avranno ancora per il §. 2° le due equazioni (dove si è messo nella seconda per maggior semplicità $\frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} = 1$)

$$s_{(l,t)} = 2s_{(0,4t)} - s_{(0,t)}$$

e

$$\sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot s_{(0,t)} = s_{(0, \frac{\pi^2}{t})}$$

le quali sono di importanza per il calcolo numerico di queste funzioni. La prima si verifica facilmente, scrivendo per le s le serie equivalenti. La seconda è una conseguenza del Teorema seguente trovato da Cauchy:

Avendo luogo fra le due quantità p e q la relazione

$$\text{Lg}\left(\frac{1}{q}\right) \text{Lg}\left(\frac{1}{p}\right) = \pi^2$$

si avrà l'equazione

$$\sqrt[4]{\text{Lg} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} + p + p^4 + p^9 \dots + p^{n^2} \dots \right)} \\ = \sqrt[4]{\text{Lg} \frac{1}{q} \left(\frac{1}{2} + q + q^4 + q^9 \dots + q^{n^2} \dots \right)}$$

dove p e q sono supposte positive e minori che l'unità.

Non sarebbe stato difficile di trattare più in generale le precedenti ricerche, cioè in tal modo, che fosse pure considerata la perdita di elettricità alla superficie del filo. Essendo β^2 un certo coefficiente l'equazione differenziale sarebbe

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{c} \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \beta^2 u \right).$$

Il metodo del calcolo per questo caso non differisce affatto dal precedente. L'equazione (2) diviene

$$u = \frac{e^{-\frac{k}{c}\beta^2 t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f\left(x + 2y\sqrt{\frac{k}{c}t}\right) dy.$$

Per il caso del §. 2° sarebbe per es. la funzione u'

$$f' = u' = a \cdot \frac{e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}$$

e

$$f'' = -2a \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\pi(n+1)}{(n+1)^2 \pi^2 + \beta^2 l^2} \text{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} x \right]$$

$$u = a \frac{e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} - 2e^{-\frac{k}{c}\beta^2 t} a \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)\pi}{(n+1)^2 \pi^2 + \beta^2 l^2} \text{sen} \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

e finalmente

$$s = \omega k a \beta \frac{e^{\beta(l-x)} + e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} + 2k\omega \frac{a}{l} e^{-\frac{k}{c}\beta^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)^2 \pi^2}{(n+1)^2 \pi^2 + \beta^2 l^2} \cos \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

Si vede quindi l'importanza della teoria di Ohm nel caso da esso non contemplato, cioè di un filo lunghissimo nel quale la propagazione non sia istantanea. Non esistendo allora i telegrafi, a suoi tempi tal problema non avea l'applicazione che ha al presente, ove la propagazione successiva può essere un ostacolo grandissimo a trasmettere segnali per linee molte lunghe.