Bemerkungen zur Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen.

Von

Werner Schmeidler in Göttingen.

Auf zwei Dinge soll in dieser kleinen Note aufmerksam gemacht werden:

Erstens, daß sich die Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen ebenso wie die der endlichen Abelschen Gruppen, wo es bekannt und geläufig ist¹⁾; mit gewissen *Moduln* von ganzzahligen Linearformen in Verbindung bringen läßt, die hier im allgemeinen unendlich viele Variablen enthalten (Satz I). Durch Betrachtungen, die im Falle endlich vieler Variablen zu einer endlichen Modulbasis führen, gelangt man jetzt zu einer im allgemeinen abzählbaren Modulbasis für einen beliebigen dieser Moduln, die besondere Eigenschaften besitzt (Satz II), und damit zu einer einfachen Darstellung der Gruppe (Satz III). Dieses letztere Resultat ist bereits bekannt, da es durch einfache Überlegungen aus den Sätzen 4, 8 und 26 der Habilitationsschrift des Herrn Levi *Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen* zu gewinnen ist; es wird aber hier direkt, ohne die für die genannten Sätze benutzten Fallunterscheidungen und tieferen Begriffe hergeleitet.

Zweitens wird gezeigt, daß in dem Falle, wo für einen bestimmten der zur Gruppe gehörenden Moduln die Modulbasis eine endliche ist, die zugehörige Darstellung der Gruppe zu einer Darstellung durch eine *Basis im gewöhnlichen Sinne* verschärft werden kann, wobei nur abzählbar viele Basiselemente und unendliche Ordnung zugelassen werden müssen. Die Gruppe ist dann nämlich direktes Produkt von höchstens abzählbar vielen unzerlegbaren zyklischen Faktoren endlicher oder unendlicher Ordnung (Satz IV), und diese sind bei zwei verschiedenen Zerlegungen in gleicher Anzahl vorhanden und paarweise zueinander isomorph (Satz V).

¹⁾ Vgl. z. B. Steinitz, Zur Theorie der Moduln, Mathematische Annalen, Bd. 52 (1899), S. 1—57 und die dort zitierte Literatur.

§ 1.

Hilfssatz 1. *In jeder abzählbaren Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt es ein System von höchstens abzählbar vielen Elementen $B_1, B_2, \dots$, so daß jedes Element A von $\mathfrak{A}$ in der Form $A = B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \dots$ durch endlich viele Elemente $B_1, B_2, \dots$ mit positiven oder negativen ganzzahligen Exponenten $\beta_1, \beta_2, \dots$ darstellbar ist.*

Man nehme z. B. die sämtlichen Elemente A der Gruppe $\mathfrak{A}$ selbst.

Es sei nun $B_1, B_2, \dots$ ein solches System von Elementen. Wir ordnen dann jedem Produkte $B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \dots$ die „finite“ Linearform $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots$ mit den ganzzahligen Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \dots$ zu.

Hilfssatz 2. *Die Gesamtheit aller den Darstellungen der Haupteinheit $E = B_1^{\alpha_1} B_2^{\alpha_2} \dots$ zugeordneten Linearformen $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots$ bildet einen „Modul“ $\mathfrak{M}$ von Linearformen, d. h. ein solches System, bei dem die Differenz zweier Linearformen des Systems wieder zum System gehört.*

Dies folgt daraus, daß der Quotient zweier Darstellungen der Haupteinheit wieder eine solche ergibt. — In bekannter Weise zeigt man, daß mit je zwei Linearformen auch ihre Summe, und mit jeder Linearform auch ihr Produkt mit einer beliebigen ganzen Zahl zum Modul gehört.

Hilfssatz 3. *Die Gesamtheit aller den Darstellungen eines beliebigen Elements A der Gruppe zugeordneten Linearformen bildet eine „Restklasse“ mod $\mathfrak{M}$, d. h. ein solches vollständiges System, bei dem die Differenz zweier Linearformen des Systems zum Modul $\mathfrak{M}$ gehört.*

Denn der Quotient zweier Darstellungen desselben Elements ist eine Darstellung von E , und das System ist vollständig, d. h. umfaßt alle Linearformen, die zu einer beliebigen aus dem System kongruent sind, weil das Produkt einer beliebigen Darstellung von A mit einer beliebigen Darstellung von E wieder eine Darstellung von A ergibt.

Hilfssatz 4. *Die Zuordnung der Elemente von $\mathfrak{A}$ zu den Restklassen mod $\mathfrak{M}$ ist umkehrbar eindeutig und isomorph in dem Sinne, daß dem Produkte zweier Elemente von $\mathfrak{A}$ die Summe der zugeordneten Restklassen mod $\mathfrak{M}$ entspricht.*

In der Tat lassen sich Restklassen mod $\mathfrak{M}$ addieren, wobei alle gewöhnlichen Verknüpfungsgesetze gelten, sie bilden daher eine höchstens abzählbare Abelsche Gruppe in bezug auf die Addition als Verknüpfungsoption, die wir als „Gruppe der Restklassen mod $\mathfrak{M}$ “ oder kurz als „Restgruppe von $\mathfrak{M}$ “ bezeichnen. Da die Isomorphie mit der gegebenen Gruppe $\mathfrak{A}$ evident ist, so können wir zusammenfassend folgenden Satz aussprechen:

Satz I. Jede abzählbare Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ ist isomorph zu der Restgruppe eines Moduls $\mathfrak{M}$ von finiten Linearformen in höchstens abzählbar vielen Variablen.

Jedem System von Elementen $B_1, B_2, \dots$ des Hilfssatzes 1 entspricht ein Modul und damit eine Restgruppe. Alle verschiedenen so erhaltenen Moduln haben isomorphe Restgruppen.

Für Moduln aus finiten Linearformen gilt nun folgender

Satz II. Jeder Modul $\mathfrak{M}(x_1, x_2, \dots)$ von finiten Linearformen, der nicht nur aus der einen Form 0 besteht, besitzt eine höchstens abzählbare Modulbasis der Form

$$(1) \quad \begin{aligned} z_1 &= \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1l_1}x_{l_1} \quad (\alpha_{1l_1} > 0) \\ z_2 &= \alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2l_2}x_{l_2} \quad (\alpha_{2l_2} > 0) \quad (0 < l_1 < l_2 < \dots), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

so daß also jede Linearform M aus $\mathfrak{M}$ in der Form

$$M = c_1z_1 + c_2z_2 + \dots$$

durch endlich viele $z_1, z_2, \dots$ ganzzahlig darstellbar ist. Hierbei gehören $z_1, z_2, \dots$ selbst zu $\mathfrak{M}$.

Zum Beweise bezeichnen wir mit Herrn Toeplitz²⁾ den höchsten Index, der in einer Linearform $L = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \dots$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vorkommt, als die Länge von L . l_1 sei die kleinste Länge einer Linearform von $\mathfrak{M}$; eine solche gibt es für $\mathfrak{M} \neq 0$. z_1 sei nun unter allen zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Linearformen der Länge l_1 eine solche mit kleinstem positiven Koeffizienten von x_{l_1} . Dann ist jedes M von der Länge l_1 gleich c_1z_1 , wo c_1 eine ganze Zahl ist. Denn erstens sind alle Linearformen der Länge l_1 von $\mathfrak{M}$ zueinander proportional, weil eine lineare Verbindung von irgend zweien unter ihnen mit geeigneten ganzen Koeffizienten die Variable x_{l_1} nicht mehr enthält, also von einer Länge $< l_1$, also identisch Null ist. Zweitens ist der höchste Koeffizient α_{l_1} jedes solchen M durch α_{1l_1} teilbar, weil sonst $\alpha_{l_1} = q\alpha_{1l_1} + r$ ($0 < r < \alpha_{1l_1}$), also $M - qz_1$ von der Länge l_1 und von kleinerem positiven höchsten Koeffizienten wäre als z_1 . Ferner sei l_2 die zweitkleinste Länge einer Linearform von $\mathfrak{M}$, und z_2 eine solche Linearform von $\mathfrak{M}$ von der Länge l_2 , bei der die Variable x_{l_2} den kleinsten positiven Koeffizienten besitzt. Dann ist jedes M von der Länge l_2 gleich $c_1z_1 + c_2z_2$ mit ganzzahligen Koeffizienten c_1, c_2 . Denn für zwei beliebige Linearformen aus $\mathfrak{M}$ von

²⁾ Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 28 (1909), S. 88–96].

der Länge l_2 gibt es eine ganzzahlige lineare Verbindung von kleinerer Länge, die also die Länge l_1 hat oder identisch verschwindet, jedenfalls also in der Form $c_1 z_1$ darstellbar ist. Zweitens ist wieder der höchste Koeffizient α_{i_2} jedes solchen M durch α_{2l_2} teilbar, woraus die Darstellung $M - c_2 z_2 = c_1 z_1$ folgt. In ähnlicher Weise ist der Beweis für jede in $\mathfrak{M}$ vorkommende Länge l_i und damit für jede Linearform von $\mathfrak{M}$ zu führen.

Aus diesem Satze wollen wir nun eine einfache Darstellung der Restgruppe und damit der gegebenen Gruppe $\mathfrak{A}$ ableiten. Wir bezeichnen die Restklassen der Linearformen $x_1, x_2, \dots$ mit $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots$. Dann ist jede Restklasse mod $\mathfrak{M}$ in der Form

$$(2) \quad \beta_1 \mathfrak{x}_1 + \beta_2 \mathfrak{x}_2 + \dots$$

darstellbar, und zwar *eindeutig*, wenn wir die ganzzahligen Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \dots$ den folgenden Bedingungen unterwerfen:

1. Die Koeffizienten β_{i_i} durchlaufen die Reihe $0, \dots, \alpha_{i i_i} - 1$ oder irgendein anderes, aber festgewähltes vollständiges Restsystem mod $\alpha_{i i_i}$.
2. Die übrigen Koeffizienten durchlaufen alle positiven und negativen ganzen Zahlen.

Je eine der beiden Klassen kann dabei in speziellen Fällen auch ganz fehlen.

In der Tat erhält man hierbei zunächst jede Restklasse mod $\mathfrak{M}$. Denn irgendeine Linearform $b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots$ hat entweder eine Länge $l < l_1$ und gehört alsdann zu einer Restklasse (2); oder es gibt eine größte Zahl $l_i < l$; dann kann man b_{i_i} durch Subtraktion eines geeigneten ganzzahligen Vielfachen von z_i in eine Zahl des festgewählten Restsystems mod $\alpha_{i i_i}$ verwandeln. Verfährt man ebenso mit allen kleineren Indizes $i = 1, \dots, 1$, so findet man eine kongruente Linearform, deren Koeffizienten den beiden Forderungen genügen. Ferner ist diese Darstellung eindeutig. Wären nämlich für dieselbe Restklasse zwei verschiedene Darstellungen (2) vorhanden, wäre also

$$\beta_1 \mathfrak{x}_1 + \beta_2 \mathfrak{x}_2 + \dots = \beta'_1 \mathfrak{x}_1 + \beta'_2 \mathfrak{x}_2 + \dots,$$

so wäre $(\beta_1 - \beta'_1)x_1 + (\beta_2 - \beta'_2)x_2 + \dots$ eine Linearform aus $\mathfrak{M}$, also von einer Länge l_i , da sie nicht identisch verschwinden kann. Es müßte daher $\beta_{i_i} - \beta'_{i_i} \neq 0$ und durch $\alpha_{i i_i}$ teilbar sein. Andererseits gehören aber β_{i_i} und β'_{i_i} beide demselben vollständigen Restsystem mod $\alpha_{i i_i}$ an; hierin liegt ein Widerspruch.

Wir wollen nun den hieraus folgenden Satz noch in einer Hinsicht verschärfen. Wir betrachten nämlich alle Zahlen l_i , für die $\alpha_{i l_i} = 1$ ist. Die zugehörigen Elemente B_{l_i} haben dann die Eigenschaft, daß sie durch die vorangehenden B_i darstellbar sind; umgekehrt ist jedes durch die

vorangehenden Elemente darstellbare B ein B_{i_l} , wobei der zugehörige Koeffizient $\alpha_{i_l} = 1$ ist. Streichen wir aus der Reihe $B_1, B_2, \dots$ alle diese Elemente fort, so bleibt ein System von Elementen übrig, das wiederum die Eigenschaft des Hilfssatzes 1 hat, weil jedes A durch endlich viele von allen B , also auch durch endlich viele von den übrigbleibenden darstellbar ist. Für das so reduzierte System ist alsdann der zugehörige Modul entweder $= 0$, oder in der Modulbasis (1) sind alle $\alpha_{i_l} > 1$. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz III. *In jeder abzählbaren Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt es ein System von höchstens abzählbar vielen Elementen $B_1, B_2, \dots$, derart, daß jedes Element A von $\mathfrak{A}$ in der Form $B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \dots$ mit endlich vielen positiven oder negativen Exponenten eindeutig dargestellt werden kann, wenn über die Exponenten folgendes festgesetzt wird: Die Exponenten β_i durchlaufen die Zahlen eines beliebigen, aber festgewählten vollständigen Restsystems mod α_{i_l} , die übrigen Exponenten durchlaufen alle positiven und negativen ganzen Zahlen. Hierbei bedeuten die Zahlen l_i eine endliche oder unendliche Reihe von wachsenden, positiven ganzen Zahlen, die Zahlen α_{i_l} sind ganz und > 1 . In speziellen Fällen kann die eine oder die andere der beiden Klassen von Exponenten ganz fehlen.*

§ 2.

Wir wollen nun speziell den Fall behandeln, daß für einen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Modul $\mathfrak{M}$ die Zahlen $l_1, l_2, \dots$ nur eine endliche Reihe bilden, d. h. daß eine endliche Modulbasis (1) existiert. Wir beweisen hierzu vorher einen Hilfssatz:

Hilfssatz 5. *Übt man in den Linearformen eines Moduls $\mathfrak{M}(x_1, x_2, \dots)$ auf die Variablen $x_1, x_2, \dots$ eine ganzzahlig umkehrbare zeilenfiniten ganzzahlige Transformation*

$$\begin{aligned} (3) \quad x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

aus, so erhält man einen Modul $\mathfrak{N}(y_1, y_2, \dots)$, dessen Restgruppe $\mathfrak{S}$ zu der Restgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$ isomorph ist. Insbesondere geht dabei eine Modulbasis von $\mathfrak{M}$ in eine Modulbasis von $\mathfrak{N}$ über.

Es genügt zum Beweise, die Restklassen $\mathfrak{r}_i \bmod \mathfrak{M}$ und $a_{i1} \eta_1 + a_{i2} \eta_2 + \dots \bmod \mathfrak{N}$ einander zuzuordnen, und allen Verbindungen von $\mathfrak{r}_i$ die entsprechenden Verbindungen dieser Linearformen der η_i , wobei η_i die Restklasse von $y_i \bmod \mathfrak{N}$ bedeutet. Dadurch ist jeder Restklasse von $\mathfrak{G}$ eine solche von $\mathfrak{S}$ zugeordnet und umgekehrt; diese Zuordnung ist

eindeutig, weil der Restklasse 0 in $\mathfrak{G}$ nur die Restklasse 0 in $\mathfrak{S}$ entspricht und umgekehrt; in der Tat erhält man aus $\mathfrak{N}$ den Modul $\mathfrak{M}$ zurück, indem man in seinen Linearformen die zu (3) reziproke Transformation ausführt. Ferner ist die Zuordnung isomorph.

Es sei also jetzt für den zur Gruppe $\mathfrak{A}$ gehörenden Modul $\mathfrak{M}$ die Modulbasis (1) eine endliche und bestehe aus den Linearformen $z_1, \dots, z_m$. Diese sind linear unabhängig, und es ist $m \leq l_m = n$. Bildet man nun m lineare ganzzahlige Verbindungen von $z_1, \dots, z_m$, wobei die Determinante der Koeffizienten ± 1 ist, so erhält man wiederum eine m gliedrige Modulbasis von $\mathfrak{M}$. Die Matrix der Koeffizienten von $z_1, \dots, z_m$ multipliziert sich dabei vorn mit der Transformationsmatrix. Führen wir andererseits für $x_1, \dots, x_n$ neue Variable $y_1, \dots, y_n$ vermöge einer unimodularen Transformation ein, die wir durch die Gleichungen $x_{n+1} = y_{n+1}, \dots$ ergänzt denken können, so erhalten wir nach Hilfssatz 5 die Modulbasis eines Moduls $\mathfrak{N}(y_1, y_2, \dots)$ mit einer zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Restgruppe. Hierbei multipliziert sich die Matrix der Koeffizienten von $z_1, \dots, z_m$ hinten mit der n -reihigen Transformationsmatrix. Nun kann man aber bekanntlich durch vordere Multiplikation mit einer m -reihigen und durch hintere Multiplikation mit einer n -reihigen quadratischen unimodularen Matrix jede ganzzahlige Matrix von m Zeilen und n Spalten auf eine ganzzahlige Diagonalmatrix transformieren; es gibt daher einen Modul $\mathfrak{N}$, dessen Restgruppe zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist und der eine Modulbasis der Form

$$\begin{aligned} t_1 &= \beta_{11} y_1 \\ t_2 &= \beta_{22} y_2 \\ &\dots \dots \dots \\ t_m &= \beta_{mm} y_m \end{aligned}$$

besitzt.

Aus dieser Gestalt der Modulbasis ergibt sich nun aber sofort, daß die Restgruppe von $\mathfrak{N}$ direktes Produkt von m zyklischen Faktoren endlicher Ordnung, die ihrerseits wieder in bekannter Weise in endlich viele unzerlegbare Faktoren zerlegt werden können, mit höchstens abzählbar unendlich vielen unendlichen zyklischen Faktoren, nämlich den durch die Restklassen $\eta_{m+1}, \dots$ erzeugten zyklischen Gruppen, ist. Aus der Isomorphie zu $\mathfrak{A}$ ergibt sich daher der

Satz IV. Besitzt einer der zur Gruppe $\mathfrak{A}$ gemäß Satz I gehörenden Moduln eine endliche Modulbasis, so ist die Gruppe $\mathfrak{A}$ direktes Produkt von endlich vielen unzerlegbaren zyklischen Faktoren endlicher Ordnung mit höchstens abzählbar vielen unendlichen zyklischen Faktoren. Umgekehrt gehört zu jeder derartigen Gruppe ein Modul mit endlicher Modulbasis.

Der letzte Teil des Satzes ist klar, wie man sofort einsieht, indem man aus jedem zyklischen Faktor ein erzeugendes Element auswählt und den zugehörigen Modul bildet.

Wir fragen nun nach der *Eindeutigkeit* dieser Darstellung der Gruppe. Zunächst ist das Produkt aller endlichen zyklischen Faktoren für zwei solche Zerlegungen dasselbe, da es in jedem Falle die Gesamtheit aller Elemente endlicher Ordnung umfaßt. Daraus folgt nach dem bekannten Satze über endliche Abelsche Gruppen, daß die Anzahl der endlichen unzerlegbaren Faktoren in beiden Zerlegungen übereinstimmt und diese selbst paarweise isomorph sind. Ferner ist natürlich jeder unendliche zyklische Faktor zu jedem anderen isomorph. Aber auch die Anzahl dieser Faktoren stimmt in beiden Zerlegungen überein.

Um dies zu zeigen, sei diese Anzahl vorerst in einer Zerlegung endlich und gleich k ; $A_1, \dots, A_k$ seien erzeugende Elemente der k Faktoren. Dann kann in keiner zweiten Zerlegung die entsprechende Anzahl $l < k$ sein. Sind nämlich $B_1, \dots, B_l$ die erzeugenden Elemente für die zweite Zerlegung, so ist einmal

$$B_i = A_1^{\alpha_{i1}} \dots A_k^{\alpha_{ik}} C_i \quad (i = 1, \dots, l),$$

wo C_i ein Element endlicher Ordnung ist, zweitens

$$A_j = B_1^{\beta_{j1}} \dots B_l^{\beta_{jl}} C_j' \quad (j = 1, \dots, k),$$

also

$$A_j = A_1^{\beta_{j1}\alpha_{11} + \dots + \beta_{jl}\alpha_{l1}} \dots A_k^{\beta_{j1}\alpha_{1k} + \dots + \beta_{jl}\alpha_{lk}} C_j'',$$

daher $C_j'' = E$ und $\sum_{\lambda=1}^l \beta_{j\lambda} \alpha_{\lambda\kappa} = \delta_{j\kappa} \quad (j, \kappa = 1, \dots, k)$. Dies ist aber unmöglich für $l < k$.

Noch einfacher zeigt man, daß, falls die Anzahl bei einer Zerlegung unendlich ist, sie bei keiner andern endlich sein kann. Die erzeugenden Elemente der zweiten Zerlegung würden schon durch endlich viele erzeugende Elemente der ersten Zerlegung darstellbar sein, also wäre auch jedes erzeugende Element der ersten Zerlegung durch jene endlich vielen darstellbar, worin ein Widerspruch liegt.

Hieraus folgt nun aber, daß entweder in beiden Zerlegungen die Anzahl unendlich, oder daß sie beide Male endlich ist. Dann zeigt aber unsere erste Überlegung, daß beide Anzahlen einander gleich sind.

Satz V. *Bei zwei verschiedenen Zerlegungen einer den Bedingungen von Satz IV genügenden Gruppe $\mathfrak{A}$ in unzerlegbare zyklische Faktoren stimmt die Anzahl der Faktoren überein und diese selbst sind paarweise isomorph.*

Göttingen, den 10. August 1919.

(Eingegangen am 14. September 1919.)