Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit.

VON CLEBSCH IN GÜTTINGEN.

Die erste Idee, die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit in Verbindung mit den Bewegungen der letztern, den Principien der Hydrodynamik gemäss zu behandeln, rührt von Dirichlet her. Er gab die Lösung in Bezug auf eine Kugel, im Jahrgang 1852 der Berlin. Monatsber.

Anknüpfend an die Note von Dirichlet behandelte ich die allgemeine Aufgabe im 52. Bd. des Crelle'schen Journals. Ich zeigte daselbst, welches die Gestalt der Bewegungsgleichungen des Körpers sei, und von welchem hydrodynamischen Probleme die Bestimmung der Constanten abhängt, durch welche der Einfluss der mitbewegten Flüssigkeit in diesen Gleichungen sich ausdrückt. Für ein Ellipsoid gab ich die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen, welche in diesen Untersuchungen entschieden in den Vordergrund traten. Dasselbe gilt von der Arbeit des Herrn Hoppe über Bewegung eines Rotationskörpers in der Richtung einer Achse. (Pogg. Ann. Bd. 93.)

Die Herren Thomson und Tait, welche wie es scheint von diesen frühern Arbeiten keine Kenntniss hatten, gaben dieser Frage insofern eine neue Wendung, als sie, ganz absehend von dem hydrodynamischen Problem, für die einfachsten Fälle die Integration der Bewegungsgleichungen des Körpers unternahmen.

Neuerdings hat Herr Kirchhoff (Crelle's Journal Bd. 71) diesen Bewegungsgleichungen eine überraschend elegante Form gegeben, und für einen Rotationskörper, in dem Fall, dass keine äussern Kräfte wirken, die Integration ausgeführt.

Ich werde im Folgenden an die Kirchhoff'schen Gleichungen für die Bewegung eines keinen äussern Kräften unterworfenen Körpers anknüpfen, und die Eigenschaften dieses Systems genauer untersuchen. Dabei werden sich zugleich einige neue Fälle ergeben, in denen das Problem auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

§ 1.

Die Kirchhoff'schen Gleichungen.

Die Kirchhoff'schen Gleichungen für die Bewegung eines, keinen äussern Kräften unterworfenen, Körpers in einer Flüssigkeit sind folgende. Es bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeiten, welche der Anfangspunkt eines im Körper festen rechtwinkligen Coordinatensystems parallel diesen Achsen besitzt, p, q, r die Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um diese Achsen. Sodann ist T die lebendige Kraft des Körpers und der Flüssigkeit zusammen, eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coefficienten. Für diese 6 Grössen hat man dann die Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} = q \frac{\partial T}{\partial v} - r \frac{\partial T}{\partial w} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} = r \frac{\partial T}{\partial u} - p \frac{\partial T}{\partial w} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial w} = p \frac{\partial T}{\partial u} - q \frac{\partial T}{\partial v} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} = v \frac{\partial T}{\partial u} - w \frac{\partial T}{\partial v} + q \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial q} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} = w \frac{\partial T}{\partial u} - u \frac{\partial T}{\partial v} + r \frac{\partial T}{\partial p} - p \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} = u \frac{\partial T}{\partial v} - v \frac{\partial T}{\partial u} + p \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial p} \end{cases}$$

Sind ferner x, y, z die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein im Körper festes Coordinatensystem, ξ, η, ζ die Coordinaten desselben Punktes im Raum, so hat man

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = a + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

Die Grössen a, β, γ sind mit u, v, w, p, q, r entweder durch die Relationen:

$$(4) \quad \begin{cases} u = a_1 \frac{d\xi}{dt} + \beta_1 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\zeta}{dt} \\ v = a_2 \frac{d\xi}{dt} + \beta_2 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\zeta}{dt} \\ w = a_3 \frac{d\xi}{dt} + \beta_3 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\zeta}{dt} \end{cases}$$

$$(5) \left\{ \begin{array}{lll} \frac{d a_1}{d t} = a_2 q - a_2 r & \frac{d \beta_1}{d t} = \beta_3 q - \beta_2 r & \frac{d \gamma_1}{d t} = \gamma_3 q - \gamma_2 r \\ \frac{d a_2}{d t} = a_1 r - a_3 p & \frac{d \beta_2}{d t} = \beta_1 r - \beta_3 p & \frac{d \gamma_2}{d t} = \gamma_1 r - \gamma_3 p \\ \frac{d a_3}{d t} = a_2 p - a_1 q & \frac{d \beta_3}{d t} = \beta_2 p - \beta_1 q & \frac{d \gamma_3}{d t} = \gamma_2 p - \gamma_1 q. \end{array} \right.$$

Für die Gleichung (1), (2) hat Herr Kirchhoff die 3 Integrale gegeben

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} 2 T = L \\ \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)^2 = M, \\ \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w} \frac{\partial T}{\partial r} = N. \end{array} \right.$$

Denkt man sich die Gleichungen (1), (2) vollständig integrirt, so bilden die Gleichungen (5) drei getrennte Systeme, oder was dasselbe ist, die 3 Systeme a_1, a_2, a_3 ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind particuläre Integrale des Systems

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d A_1}{d t} = A_3 q - A_2 r \\ \frac{d A_2}{d t} = A_1 r - A_3 p \\ \frac{d A_3}{d t} = A_2 p - A_1 q. \end{array} \right.$$

Von diesen Gleichungen kennt man erstens das Integral

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \text{Const.},$$

und zwar muss die Constante für jene particulären Systeme den Werth 1 haben; zweitens das Integral

$$(8) \quad A_1 \frac{\partial T}{\partial u} + A_2 \frac{\partial T}{\partial v} + A_3 \frac{\partial T}{\partial w} = \text{Const.};$$

und da ausserdem der Multiplicator der Gleichungen 1 ist, so hat ihre Integration principiell keine Schwierigkeit.

Ebenso kann man die Functionen α, β, γ aus (4) ohne Weiteres durch Integration finden; doch kann man zwei Integrationen ersparen, indem zwischen den α, β, γ und die übrigen Grössen noch gewisse allgemeine integrirbare Gleichungen bestehen, wie Herr Kirchhoff gezeigt hat.

§ 2.

Eigenschaften der Gleichungen (1), (2).

Ich wende mich zur genauen Betrachtung der Gleichungen (1), (2), welche die Integrationschwierigkeiten mit sich führen, und werde zunächst eine merkwürdige Transformation jener Gleichungen angeben.

Die Gleichungen (1), (2) sind nicht nach den Differentialquotienten der Unbekannten aufgelöst. Dies ist aber sofort der Fall, wenn wir statt der u, v, w, p, q, r die folgenden Unbekannten einführen:

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\partial T}{\partial u} & y_1 = \frac{\partial T}{\partial p} \\ x_2 = \frac{\partial T}{\partial v} & y_2 = \frac{\partial T}{\partial q} \\ x_3 = \frac{\partial T}{\partial w} & y_3 = \frac{\partial T}{\partial r} \end{cases}$$

Nun ist T eine homogene Function zweiter Ordnung. Bezeichnen wir ihre ursprünglichen Variablen für den Augenblick durch $z_1, z_2, \dots, z_6$, die neuen durch $x_1, x_2, \dots, x_6$, und setzen wir

$$(10) \quad T = \frac{1}{2} \sum a_{ik} z_i z_k, \quad x_i = \frac{\partial T}{\partial z_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

so giebt die Auflösung der Gleichungen

$$x_i = \sum_k a_{ik} z_k$$

die Gleichungen:

$$A z_k = \sum_i A_{ik} x_i,$$

wo A die Determinante der a_{ik} , welche wir immer als von Null verschieden voraussetzen, die A_{ik} deren Unterdeterminanten bedeuten; und wenn man also die Function T in den neuen Veränderlichen ausdrückt:

$$(11) \quad T = \frac{1}{2A} \sum \sum A_{ik} x_i x_k.$$

Zugleich hat man

$$z_k = \frac{\partial T}{\partial x_k},$$

oder, indem man zu der vorigen Bezeichnung zurückkehrt:

$$(12) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial T}{\partial x_1} & p = \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ v = \frac{\partial T}{\partial x_2} & q = \frac{\partial T}{\partial y_2} \\ w = \frac{\partial T}{\partial x_3} & r = \frac{\partial T}{\partial y_3} \end{cases}$$

Daher erfolgt die Transformation der Gleichungen (1), (2) so, dass man überall nur an Stelle der partiellen Differentialquotienten von T die neuen Veränderlichen, an Stelle der frühern Veränderlichen die neuen Differentialquotienten von F setzt. Die transformirten Gleichungen werden also:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{dy_2}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{dy_3}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen kennt man nach (6) die 3 Integrale:

$$(15) \quad \begin{cases} 2T = L \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = M \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = N. \end{cases}$$

Da ferner t in den Gleichungen (13), (14) explicite nicht vorkommt, so findet man das letzte Integral durch eine Quadratur. Aber ausserdem findet man Null, indem man die rechten Theile der Gleichungen (13) beziehungsweise nach $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ differentiirt und addirt. Daher ist der Multiplicator der Gleichungen (13), (14) gleich 1; man findet das vorletzte Integral durch das Princip des letzten Multiplicators, und sieht also, dass jedes vierte Integral, welches etwa gefunden wird, die vollständige Integration des Problems liefert.

§ 3.

Die reducirte Function T .

Ich will die Frage behandeln, in welchen Fällen es ausser den Integralen (15) noch ein weiteres Integral der Gleichungen (13), (14) giebt, welches eine homogene Function zweiten Grades der x, y ist. In den von Herrn Kirchhoff behandelten Fällen giebt es ein lineares Integral, und da man statt dessen sein Quadrat nehmen kann, so ist jener Fall in dem Vorliegenden enthalten. Um diese Untersuchung bequem führen zu können, werde ich zunächst eine reducirte Form angeben, welche man der Function T geben kann.

Die Function T besteht aus 3 Theilen; der erste ist homogen vom zweiten Grade in den x , der dritte ebenso in den y , der mittlere lineare in den x und in den y . Setzt man im letztern an Stelle der Coefficienten von $x_1 y_2$ und von $x_2 y_1$ die Ausdrücke $b_{12} + k_3$ und $b_{12} - k_3$, und ebenso bei $x_2 y_3, x_3 y_2$ und bei $x_3 y_1, x_1 y_3$, so kann man ihn noch in zwei Theile zerlegen, von denen der eine ungeändert bleibt, wenn man die x mit den y vertauscht, während der andere dadurch sein Zeichen wechselt. Man kann also dann setzen:

$$(16) \quad 2T = \Sigma \Sigma a_{ik} x_i x_k + 2 \Sigma \Sigma b_{ik} x_i y_k + \Sigma \Sigma c_{ik} y_i y_k + 2 \begin{vmatrix} k_1 & x_1 & y_1 \\ k_2 & x_2 & y_2 \\ k_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

wo

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki}.$$

Nun entspricht, wie Herr Kirchhoff für einen besondern Fall benutzt hat, der Verlegung des Anfangspunktes, welches man dem im Körper festen Coordinatensystem gegeben hatte, eine Einführung der Veränderlichen

$$(17) \quad \begin{cases} u' = u + r b - q c \\ v' = v + p c - r a \\ w' = w + q a - p b, \end{cases}$$

an Stelle von u, v, w , während p, q, r selbst unverändert bleiben; a, b, c sind dabei die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in dem Systeme der x, y, z . Den Formeln (17) entsprechen die folgenden Transformationen der Differentialquotienten von T , wobei die neuen Differentialquotienten von den ursprünglichen durch Klammern unterschieden werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u} &= \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right) & \frac{\partial T}{\partial p} &= \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) + c \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right) - b \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial v} &= \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right) & \frac{\partial T}{\partial q} &= \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) + a \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right) - c \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial w} &= \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right) & \frac{\partial T}{\partial r} &= \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + b \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right) - a \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Setzt man also den Gleichungen (9) entsprechend

$$\begin{aligned} x_1' &= \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right) & y_1' &= \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) \\ x_2' &= \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right) & y_2' &= \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) \\ x_3' &= \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right) & y_3' &= \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

so führen von den x, y zu den x', y' die Formeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' & y_1 &= y_1' + c x_2' - b x_3' = y_1' + c x_2 - b x_3 \\ x_2 &= x_2' & y_2 &= y_2' + a x_3' - c x_1' = y_2' + a x_3 - c x_1 \\ x_3 &= x_3' & y_3 &= y_3' + b x_1' - a x_2' = y_3' + b x_1 - a x_2. \end{aligned}$$

Man kann nun die Constanten a, b, c dazu benutzen um den letzten Theil von T zu zerstören. Führt man nämlich in (16). statt der y die y' ein, so ändert sich derjenige Theil von $2T$, welcher von den x allein abhängt, um Glieder, welche von dem zweiten, dritten und vierten Theile von T herrühren. Von dem dritten Theile von $2T$ aber rührt ausserdem noch der Term her

$$2M = 2 \begin{vmatrix} c_{11} y_1' + c_{12} y_2' + c_{13} y_3' & x_1 & a_1 \\ c_{21} y_1' + c_{22} y_2' + c_{23} y_3' & x_2 & a_2 \\ c_{31} y_1' + c_{32} y_2' + c_{33} y_3' & x_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man durch N das, was aus M wird, wenn darin die y mit den x vertauscht werden, so kann man

$$2M = (M + N) + (M - N)$$

setzen. Hier ändert sich dann der erste Theil durch Vertauschung der y mit den x nicht mehr, und vereinigt sich also mit dem ursprünglichen zweiten Theile von $2T$; dagegen hat $M - N$ die Eigenschaft, bei Vertauschung der y mit den x sein Zeichen zu wechseln. Dieser Theil kann daher dazu benutzt werden, denjenigen zu zerstören, welcher aus dem letzten Theile von $2T$ hervorgeht, wenn man darin die y durch die y' ersetzt. Man muss dann haben:

$$0 = \begin{vmatrix} c_{11}y'_1 + c_{12}y'_2 + c_{13}y'_3 & x_1 & a_1 \\ c_{21}y'_1 + c_{22}y'_2 + c_{23}y'_3 & x_2 & a_2 \\ c_{31}y'_1 + c_{32}y'_2 + c_{33}y'_3 & x_3 & a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 & y'_1 & a_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 & y'_2 & a_2 \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 & y'_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & x_1 & y'_1 \\ k_2 & x_2 & y'_2 \\ k_3 & x_3 & y'_3 \end{vmatrix},$$

was auf die folgenden 3 Gleichungen zwischen den Constanten führt:

$$\begin{aligned} k_1 &= (c_{11} + c_{22} + c_{33}) a_1 - (c_{11} a_1 + c_{12} a_2 + c_{13} a_3) \\ (18) \quad k_2 &= (c_{11} + c_{22} + c_{33}) a_2 - (c_{21} a_1 + c_{22} a_2 + c_{23} a_3) \\ k_3 &= (c_{11} + c_{22} + c_{33}) a_3 - (c_{31} a_1 + c_{32} a_2 + c_{33} a_3). \end{aligned}$$

Ich werde weiterhin zeigen, dass die Determinante dieser Gleichungen nicht verschwindet, was hier zunächst vorausgesetzt werden mag. Man kann die a dann diesen Gleichungen gemäss bestimmen.

Indem wir diesen Anfangspunkt als gewählt voraussetzen, können wir in $2T$ den letzten Theil auslassen, und also $2T$ in der Form annehmen:

$$(19) \quad 2T = \sum \sum a_{ik} x_i x_k + 2 \sum \sum b_{ik} x_i y_k + \sum \sum c_{ik} y_i y_k,$$

wo

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki}.$$

Diese Form von $2T$ soll im Folgenden immer vorausgesetzt werden.

Hiezu tritt nun noch, dass die Gleichungen (13), (14) sich nicht ändern, wenn man an Stelle von $2T$ die Function

$$(20) \quad 2T' = 2T + \varrho (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2\sigma (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

setzt. Man kann dann ϱ und σ so bestimmen, dass

$$(21) \quad \varrho + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, \quad \sigma + b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0.$$

Im Folgenden wollen wir die Function $2T'$ an Stelle von $2T$ zu Grunde legen, unter Voraussetzung der Bestimmungen (21), und wollen diese Function durch $2T$ bezeichnen. Sie hat die Eigenschaft, dass noch

$$(22) \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, \quad b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0.$$

Sie mag die *reducirte Function* $2T$ heissen. Ihre 3 Theile bezeichnen wir durch $2T_1$, $2T_2$, $2T_3$, so dass

$$\begin{aligned} 2 T_1 &= \Sigma \Sigma a_{i,k} x_i x_k \\ 2 T_2 &= \Sigma \Sigma b_{i,k} x_i x_k \\ 2 T_3 &= \Sigma \Sigma c_{i,k} x_i x_k . \end{aligned}$$

§ 4.

Die über T gemachten Voraussetzungen.

In dem Obigen sind über die ursprüngliche Function $2 T$ zwei Voraussetzungen gemacht worden, erstens, dass die Determinante derselben nicht verschwinde, und zweitens, dass die Determinante der Gleichungen (18) nicht verschwinde. Ich werde jetzt zeigen, dass diese beiden Voraussetzungen immer erfüllt sind.

Die Function $2 T$ ist ihrer Natur nach für alle reellen Werthe der Geschwindigkeiten positiv und von Null verschieden. Man kann sie daher in der Form annehmen

$$(23) \quad 2 T = \sum_{i=1}^{i=6} \lambda_i (\alpha_i u + \beta_i v + \gamma_i w + \alpha'_i p + \beta'_i q + \gamma'_i r)^2,$$

wo die λ sämmtlich positiv sind, und wo die Determinante der Argumente Δ der Quadrate den Werth 1 hat. Da die Determinante von $2 T$ nun gleich dem Producte der Grössen λ mit Δ^2 ist, so ist diese offenbar stets von Null verschieden.

Nimmt man $2 T$ in der Form (23) an, und setzt der Kürze wegen

$$L_i = \alpha_i u + \beta_i v + \gamma_i w + \alpha'_i p + \beta'_i q + \gamma'_i r,$$

so erhält man aus (9) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Sigma \lambda_i \alpha_i L_i & y_1 &= \Sigma \lambda_i \alpha'_i L_i \\ x_2 &= \Sigma \lambda_i \beta_i L_i & y_2 &= \Sigma \lambda_i \beta'_i L_i \\ x_3 &= \Sigma \lambda_i \gamma_i L_i & y_3 &= \Sigma \lambda_i \gamma'_i L_i . \end{aligned}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen hat man:

$$\lambda_i L_i = x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} + x_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i} + x_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i} + y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha'_i} + y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta'_i} + y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma'_i},$$

oder wenn man den Ausdruck rechts durch M_i bezeichnet:

$$\lambda_i L_i = M_i ,$$

und daher

$$2 T = \Sigma \frac{M_i^2}{\lambda_i} .$$

Vergleicht man dies mit (16), so ist insbesondere

$$\Sigma \Sigma c_{i,k} y_i y_k = \Sigma \frac{1}{\lambda_i} \left(y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha'_i} + y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta'_i} + y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma'_i} \right)^2 ,$$

und

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = \sum \frac{1}{\lambda_i} \left(\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} \right)^2 \right).$$

Nun ist die Determinante des Systems (18) nichts Anderes als die Determinante der Function zweiter Ordnung:

$$Y = (c_{11} + c_{22} + c_{33}) (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (\sum \sum c_{ik} y_i y_k)^2,$$

welche mit Hülfe der obigen Ausdrücke die Form annimmt:

$$\begin{aligned} Y &= \sum \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} \right)^2 \right\} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \left(y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} + y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} + y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} \right)^2 \\ &= \sum \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \left(y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} - y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} \right)^2 + \left(y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} - y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} \right)^2 + \left(y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} - y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Sollte also die Determinante von Y verschwinden können, so müsste es wenigstens ein von Null verschiedenes reelles System der y geben, für welches Y verschwände. Aber dies könnte nur geschehen, indem für alle Werthe von i :

$$y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} - y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} = 0$$

$$y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} - y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} = 0$$

$$y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} - y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} = 0,$$

oder

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} = m_i y_1 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} = m_i y_2 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} = m_i y_3. \end{cases}$$

Bildet man nun die Determinante der 36 Grössen

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'},$$

welche den Werth Δ^3 , also 1, hat, so würden unter Voraussetzung der Gleichungen (24) drei Reihen derselben proportional oder Null, also die Determinante Null, was der Voraussetzung widerspricht. Die Determinante der Gleichungen (18) kann also nicht verschwinden.

§ 5.

Der Fall, wo die c verschwinden.

Obleich nach dem soeben Bemerkten der Fall, wo alle Coefficienten c verschwinden, in der Natur nicht vorkommen kann, so führt derselbe doch zu einem analytisch interessanten Resultate, und mag deshalb nicht übergangen werden. In diesem Falle werden näm-

lich die Gleichungen (13), (14) folgende, wenn

$$(25) \quad \Theta(x) = \frac{1}{2} \sum \sum b_{ik} x_i x_k$$

gesetzt wird:

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_3 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3} \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_1} \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = x_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} \\ \frac{dy_2}{dt} = x_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3} - y_3 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} \\ \frac{dy_3}{dt} = x_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} \end{cases}$$

Hier enthalten die drei ersten Gleichungen nur noch die x und können für sich integriert werden. Ihre Integrale sind

$$(28) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c, \quad \Theta = c'$$

und ein drittes Integral, welches die Zeit giebt. Wie bei der Rotation eines festen Körpers werden die x elliptische Functionen von t .

Das System (27) ist nun ein lineares in Bezug auf die y ; man kann dasselbe also integrieren, wenn man das System, welches durch Hinweglassung der nur von den x abhängigen Glieder entsteht, zu integrieren im Stande ist:

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_3 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3} - y_3 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} \\ \frac{dy_3}{dt} = y_2 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} \end{cases}$$

Die Integrale dieses Systems aber sind, wenn c, c', c'' die Integrationsconstanten des Systems (26) bedeuten, durch die Gleichungen

$$y_i = \gamma \frac{\partial x_i}{\partial c} + \gamma' \frac{\partial x_i}{\partial c'} + \gamma'' \frac{\partial x_i}{\partial c''}$$

gegeben, in welchen die γ neue Constanten bedeuten. Denn das System (26) geht in der That in (29) über, wenn man jene Gleichungen nach den c differentiirt und die Differentialquotienten der x nach den c als die neuen Veränderlichen betrachtet. — Der Ausnahmefall, wo auch Θ identisch verschwindet, ist so einfach, dass er keine Erwähnung verdient.

§ 6.

Es soll jetzt untersucht werden, unter welchen Umständen die Gleichungen (13), (14) ein *lineares* Integral

$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 = \text{Const.}$ besitzen. Die Function f muss dann der Gleichung

$$\left| \begin{array}{c} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial y_1} x_1 \\ \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} x_2 \\ \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} x_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} x_1 \\ \beta_2 \frac{\partial T}{\partial x_1} x_2 \\ \beta_3 \frac{\partial T}{\partial x_1} x_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial y_1} y_1 \\ \beta_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} y_2 \\ \beta_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} y_3 \end{array} \right| = 0$$

genügen, welche vermittelt einer leicht verständlichen Abkürzung in der Form geschrieben werden mag:

$$(\alpha, T_y, x) + (\beta, T_x, x) + (\beta, T_y, y) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt nun sofort in folgende, deren jede sowohl für die y als für die x homogen ist:

$$\begin{aligned} &(\alpha, \Theta_x, x) + (\beta, T_{1x}, x) = 0 \\ (30) \quad &(\alpha, T_{3y}, x) + (\beta, \Theta_y, x) + (\beta, \Theta_x, y) = 0 \\ &(\beta, T_{3y}, y) = 0. \end{aligned}$$

Wegen der letzten dieser Gleichungen sind zwei Fälle zu unterscheiden; entweder sind alle β gleich Null oder nicht. Im ersten Falle kann man es durch eine Drehung des im Körper festen Coordinatensystems erreichen, dass α_1, α_2 verschwinden. Von den Gleichungen (30) bleibt dann nur übrig

$$x_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T_3}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial T_3}{\partial y_2} = 0;$$

die erste dieser Gleichungen giebt

$$b_{12} = 0, \quad b_{23} = 0, \quad b_{31} = 0, \quad b_{11} = b_{22}.$$

Man hat für T_1 keine Bedingung; und man kann daher den leicht zu verificirenden Satz aufstellen:

Hat die reducirte Function T die Form:

$$T = T_1 + b(x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3) + \frac{c}{2} y_3^2,$$

so ist $x_3 = \text{Const.}$ ein Integral.

In der Natur kann dieser Fall nicht vorkommen, wegen ähnlicher Betrachtungen, wie sie in § 4. angestellt sind.

Wenn dagegen die β nicht sämmtlich verschwinden, so kann man es durch eine Drehung der Coordinatenachsen erreichen, dass $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$. Die dritte Gleichung (30) liefert dann

$$y_1 \frac{\partial T_3}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial T_3}{\partial y_1} = 0,$$

also

$$c_{12} = 0, \quad c_{13} = 0, \quad c_{23} = 0, \quad c_{11} = c_{22}.$$

Man kann sonach für T_3 die Form annehmen:

$$T_3 = \frac{c}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{\gamma}{2} y_3^2.$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung (30) und setzt die Coefficienten der einzelnen x gleich Null, so hat man:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma \alpha_2 y_3 - c \alpha_3 y_2 - b_{12} y_1 - b_{22} y_2 - b_{32} y_3 + b_{11} y_2 - b_{12} y_1 \\ 0 &= c \alpha_3 y_1 - \gamma \alpha_1 y_3 + b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3 + b_{21} y_1 - b_{22} y_1 \\ 0 &= c (\alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_1) + b_{31} y_2 - b_{32} y_1. \end{aligned}$$

Daher durch Vergleichung der Coefficienten der y :

$$\begin{aligned} b_{12} &= 0, \quad b_{13} = \gamma \alpha_1 = -c \alpha_1, \quad b_{23} = \gamma \alpha_2 = -c \alpha_2 \\ b_{11} - b_{22} &= 0, \quad c \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Indem man die α gleich Null setzt, erhält man die allgemeinste hier auftretende Form von Θ , für welche man den Ausdruck

$$\Theta = \frac{b}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta}{2} x_3^2.$$

setzen kann. Die erste Gleichung (30) giebt dann noch

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_2}{\partial x_1} x_1 = 0,$$

d. h. auch T_1 hat die Form

$$T_1 = \frac{a}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{\alpha}{2} x_3^2.$$

Man hat also den Satz:

Lässt sich T in die Form bringen

$$T = \frac{a}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{\alpha}{2} x_3^2 + b(x_1 y_1 + x_2 y_2) + \beta x_3 y_3 + \frac{c}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{\gamma}{2} y_3^2,$$

so ist $y_3 = \text{Const. ein Integral der Gleichungen.}$

Diese Form geht in die Form über, deren Integration Herr Kirchhoff gelehrt hat, wenn man noch b und β verschwinden lässt. Die Differentialgleichungen werden für diesen Fall

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (b - \beta) x_2 x_3 + c x_3 y_2 - \gamma x_2 y_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(b - \beta) x_1 x_3 - c x_3 y_1 + \gamma x_1 y_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= c (x_2 y_1 - x_1 y_2) \end{aligned}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = (a - \alpha) x_2 x_3 + (b - \beta) (y_2 x_3 - y_3 x_2) + (c - \gamma) y_2 y_3$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -(a - \alpha) x_1 x_3 - (b - \beta) (y_1 x_3 - y_3 x_1) - (c - \gamma) y_1 y_3$$

$$\frac{dy_3}{dt} = 0.$$

§ 7.

Aufsuchung eines Integrals, welches eine homogene Function zweiter Ordnung ist. Drei Fälle.

Ich stelle jetzt die Frage, unter welchen Umständen die Gleichungen (13), (14) ein Integral $f = C$ zulassen, dessen linker Theil eine homogene Function zweiter Ordnung der x und der y ist, und welches nicht aus den Integralen (15) zusammengesetzt werden kann. Setzen wir, ähnlich wie oben bei T :

$$(31) \quad f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,$$

$$(32) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{1}{2} \sum \sum \alpha_{ik} x_i x_k, & f_3 = \frac{1}{2} \sum \sum \gamma_{ik} y_i y_k \\ f_2 = \sum \sum \beta_{ik} x_i y_k, & f_4 = \sum \pm \mu_i x_2 y_3, \end{cases}$$

wo

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \quad \beta_{ik} = \beta_{ki}, \quad \gamma_{ik} = \gamma_{ki}.$$

Bezeichnen wir ferner durch Φ die Function (welche je nach Bedürfniss mit den x oder y geschrieben werden soll, wie dies auch mit f_1 , f_3 gelegentlich geschehen mag):

$$(33) \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum \sum \beta_{ik} x_i y_k, \quad \text{so dass}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_i} = \frac{\partial \Phi_{(x)}}{\partial x_i}.$$

Die Function f ist dann durch die Gleichungen definiert:

$$(34) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} \end{array} \right| x_1 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{array} \right| x_2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} \end{array} \right| y_1 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} \end{array} \right| y_2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} \end{array} \right| y_3 = 0,$$

welche wir mit Hülfe einer leicht verständlichen Abkürzung in der Form schreiben wollen:

$$(f_x, T_y, x) + (f_y, T_x, x) + (f_y, T_y, y) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt dann mit Benutzung von (31)—(33) in die folgenden 4, deren jede sowohl für die x als für die y homogen ist:

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} (f_{1x}, \Theta_x, x) + (\Phi_x, T_{1x}, x) + (f_{3y}, T_{1x}, x) = 0 \\ (\Phi_y, \Theta_x, x) + (f_{1x}, \Theta_x, x) + (f_{1x}, T_{3y}, x) + (f_{3y}, T_{1x}, x) \\ \quad + (\Phi_x, \Theta_y, x) + (f_{1y}, \Theta_y, x) + (\Phi_x, \Theta_x, y) + (f_{3y}, \Theta_x, y) = (\\ (\Phi_y, T_{3y}, x) + (f_{1x}, T_{3y}, x) + (f_{3y}, \Theta_y, x) + (f_{3y}, \Theta_x, y) \\ \quad + (\Phi_x, T_{3y}, y) + (f_{1y}, T_{3y}, y) = (\\ (f_{3y}, T_{3y}, y) = 0. \end{array} \right.$$

Wegen der letzten Gleichung unterscheidet man sofort zwei Fälle. Entweder ist

$$(36) \quad T_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

(λ von Null verschieden), oder es setzt sich f_3 aus T_3 und aus $\frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ zusammen; und da f durch Abziehen von T modificirt werden kann, so darf man dann immer setzen:

$$(37) \quad f_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Führen wir im ersten Falle den Ausdruck (36) für T_3 in die dritte Gleichung (35) ein, und setzen die y den x gleich, so erhalten wir, da die Differentialquotienten von f_1 gleich aber entgegengesetzt werden und sich also aufheben:

$$(38) \quad (f_{3x}, \Theta_x, x) = 0.$$

Entweder also ist $\Theta = \frac{x}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, d. h. in der reducirten Form (vergl. (22)) $\Theta = 0$, oder die Function f_3 , geschrieben mit den y , wie es ihrer ursprünglichen Form entspricht, hat den Ausdruck:

$$(39) \quad f_3 = x \Theta_{(y)} + \frac{q}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Dabei kann man den letzten Theil übergehen, also $q = 0$ setzen, weil dieser Theil in f durch Abziehen von T zerstört werden kann.

Führt man dagegen im zweiten Falle die Werthe von f_1 in die dritte Gleichung (35) ein, und setzt wieder die y den x gleich, so erhält man

$$(40) \quad (\Phi_x, T_{3x}, x) = 0,$$

und da hier der Fall $T_3(x) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ ausgeschlossen werden kann, insofern er dem ersten Falle angehört, so ergiebt sich

$$(41) \quad \Phi_{(x)} = x T_3(x) + \frac{q}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Auch hier kann man $q = 0$ setzen; denn dieser Theil veranlasst in f_2 nur das Glied

$$q (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3),$$

welches ausgelassen werden kann.

Es sind also folgende drei Fälle zu unterscheiden, in welchen die vierte Gleichung (35) bereits erfüllt ist, und diejenige, welche aus der dritten entsteht, wenn man die y den x gleich setzt:

- I. $T_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $\Theta = 0$.
 II. $T_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $f_3 = x \Theta_{(y)}$.
 III. $f_1 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $\Phi_{(x)} = x T_3(x)$.

§ 8.

Beweis, dass f_1 verschwinden muss.

Ich werde jetzt zeigen, dass f_1 in allen drei Fällen verschwindet. Dies beruht auf der weiteren Benutzung der dritten Gleichung (35). Im Falle I. verwandelt sich die dritte Gleichung (35) in:

$$\lambda (\Phi_y, y, x) + (f_{1x}, y, x) = 0.$$

Setzen wir daher die Coefficienten von x_1, x_2, x_3 einzeln gleich Null und führen die Werthe der Differentialquotienten von f_1 ein, so haben wir:

$$\begin{aligned} \mu_2 y_3 - \mu_3 y_2 &= \lambda \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_1} + \varrho y_1 \\ \mu_3 y_1 - \mu_1 y_3 &= \lambda \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_2} + \varrho y_2 \\ \mu_1 y_2 - \mu_2 y_1 &= \lambda \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_3} + \varrho y_3, \end{aligned}$$

wo ϱ eine unbestimmte Constante ist. Die rechten Theile sind Differentialquotienten einer Function; multiplicirt man mit y_1, y_2, y_3 und addirt, so kommt:

$$2 \lambda \Phi_{(y)} + \varrho (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 0.$$

Daher ist Φ mit $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ proportional; man hat also daraus in f_2 einen mit $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ proportionalen Theil, welcher ausgelassen werden kann. Daher kann man setzen

$$(42) \quad \varrho = 0, \quad \Phi = 0, \quad f_2 = 0$$

und die obigen Gleichungen geben dann alle $\mu = 0$, also auch $f_1 = 0$.

Im Falle II. verwandelt sich die dritte Gleichung (35) in folgende:

$$(43) \quad \lambda (\Phi_y, y, x) + x (\Theta_y, \Theta_x, y) + \lambda (f_{1x}, y, x) = 0.$$

Hier bedarf der mittlere Theil einer Umformung. Die Coefficienten von Θ sind die b_{ik} , also ist, wenn

$$\begin{aligned}
b_{22} b_{33} - b_{23}^2 &= B_{11} & b_{12} b_{13} - b_{11} b_{23} &= B_{23} & x_2 y_3 - x_3 y_2 &= u_1 \\
b_{33} b_{11} - b_{31}^2 &= B_{22} & b_{23} b_{21} - b_{22} b_{31} &= B_{31} & x_3 y_1 - x_1 y_3 &= u_2 \\
b_{11} b_{22} - b_{12}^2 &= B_{33} & b_{31} b_{32} - b_{33} b_{12} &= B_{12} & x_1 y_2 - x_2 y_1 &= u_3
\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} &= - (B_{11} u_1 + B_{12} u_2 + B_{13} u_3) \\
\frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3} &= - (B_{21} u_1 + B_{22} u_2 + B_{23} u_3) \\
\frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_1} &= - (B_{31} u_1 + B_{32} u_2 + B_{33} u_3),
\end{aligned}$$

und die Gleichung (43) verwandelt sind in eine für die μ lineare, deren Coefficienten linear in den y sind. Diese Coefficienten müssen also den y proportional werden, und man hat:

$$\begin{aligned}
\lambda (\mu_2 y_3 - \mu_3 y_2) &= \lambda \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_1} + \kappa \frac{\partial \Omega(y)}{\partial y_1} + \sigma y_1 \\
\lambda (\mu_3 y_1 - \mu_1 y_3) &= \lambda \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_2} + \kappa \frac{\partial \Omega(y)}{\partial y_2} + \sigma y_2 \\
\lambda (\mu_1 y_2 - \mu_2 y_1) &= \lambda \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_3} + \kappa \frac{\partial \Omega(y)}{\partial y_3} + \sigma y_3,
\end{aligned}$$

wo Ω die Function bedeutet:

$$(44) \quad \Omega(y) = \frac{1}{2} \sum \sum B_{ik} y_i y_k.$$

Es folgt aus diesem System ganz wie oben, dass alle μ verschwinden, und zwar hat man, indem $\sigma = 0$ gesetzt werden darf:

$$(45) \quad b_4 = 0, \quad \Phi = -\frac{\kappa}{\lambda} \Omega.$$

Der Fall III. ist etwas verwickelter. In diesem Falle geht die dritte Gleichung (35) über in:

$$(46) \quad 0 = \lambda(y, \Theta_y, x) + \kappa(T_{3y}, T_{3x}, y) + (f_{4x}, T_{3y}, x) + (f_{4y}, T_{3x}, y).$$

Der erste Term ist gleich

$$\lambda \left(u_1 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} \right),$$

der zweite wird behandelt wie der zweite Term in (43), und giebt also, wenn

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{2} \sum \sum C_{ik} y_i y_k, \\
C_{11} &= c_{22} c_{33} - c_{23}^2 & C_{23} &= c_{12} c_{13} - c_{23} c_{11} \\
C_{22} &= c_{33} c_{11} - c_{31}^2 & C_{31} &= c_{23} c_{21} - c_{31} c_{22} \\
C_{33} &= c_{11} c_{22} - c_{12}^2 & C_{12} &= c_{31} c_{32} - c_{12} c_{33}
\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$- \kappa \left(u_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial \Gamma}{\partial y_3} \right).$$

Endlich hat man noch

$$\begin{aligned}x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + y_2 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} - y_3 \frac{\partial f_1}{\partial y_3} &= \mu_3 u_2 - \mu_2 u_3 \\x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_3} &= \mu_1 u_3 - \mu_3 u_1 \\x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} &= \mu_2 u_1 - \mu_1 u_2.\end{aligned}$$

Die Gleichung (46) verwandelt sich also in folgende:

$$\begin{aligned}0 &= \lambda \left(u_1 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} \right) + \begin{vmatrix} \frac{\partial T_3}{\partial y_1} & u_1 & \mu_1 \\ \frac{\partial T_3}{\partial y_2} & u_2 & \mu_2 \\ \frac{\partial T_3}{\partial y_3} & u_3 & \mu_3 \end{vmatrix} \\ &- \kappa \left(u_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial \Gamma}{\partial y_3} \right)\end{aligned}$$

Hier müssen nun die Coefficienten der u den y proportional werden; man muss also haben:

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_1} - \kappa \frac{\partial \Gamma}{\partial y_1} &= \mu_3 \frac{\partial T_3}{\partial y_1} - \mu_2 \frac{\partial T_3}{\partial y_1} \\ \lambda \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_2} - \kappa \frac{\partial \Gamma}{\partial y_2} &= \mu_1 \frac{\partial T_3}{\partial y_2} - \mu_3 \frac{\partial T_3}{\partial y_2} \\ \lambda \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y_3} - \kappa \frac{\partial \Gamma}{\partial y_3} &= \mu_2 \frac{\partial T_3}{\partial y_3} - \mu_1 \frac{\partial T_3}{\partial y_3}.\end{aligned}$$

Die linken Theile sind wieder Differentialquotienten derselben Function; stellt man aber dieselbe Forderung an die rechten Theile, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mu_1 (c_{11} + c_{22} + c_{33}) - (\mu_1 c_{11} + \mu_2 c_{12} + \mu_3 c_{13}) &= 0 \\ \mu_2 (c_{11} + c_{22} + c_{33}) - (\mu_1 c_{21} + \mu_2 c_{22} + \mu_3 c_{23}) &= 0 \\ \mu_3 (c_{11} + c_{22} + c_{33}) - (\mu_1 c_{31} + \mu_2 c_{32} + \mu_3 c_{33}) &= 0.\end{aligned}$$

In § 4. wurde bewiesen, dass die Determinante dieser Gleichungen nicht verschwinden kann; daher sind abermals alle $\mu = 0$, und $f_1 = 0$, was zu beweisen war. Die obigen Gleichungen geben noch

$$\lambda \Theta = \kappa \Gamma.$$

Nachdem also die beiden letzten Gleichungen (35) vollständig befriedigt sind, werden unsere Fälle folgende:

- I. $T_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $\Theta = 0$, $\Phi = 0$, $f_1 = 0$.
- II. $T_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $f_1 = 0$, $f_3 = \kappa \Theta(y)$, $\Phi = -\frac{\kappa}{\lambda} \Omega$.
- III. $f_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $\Phi_{(x)} = \kappa T_{3(x)}$, $f_1 = 0$, $\lambda \Theta = \kappa \Gamma$.

§ 9.

Behandlung des Falles I.

Wir wollen jetzt die 3 Fälle vollständig erledigen. Im Falle I. ist die erste der Gleichungen (35) bereits erfüllt, die zweite giebt:

$$(47) \quad \lambda (f_{1x}, y, x) + (f_{3y}, T_{1x}, x) = 0.$$

Setzt man die y gleich den x , so findet man:

$$(f_{3y}, T_{1y}, y) = 0.$$

Der Fall, wo $T_{1(x)}$ proportional $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ oder was dasselbe ist gleich Null ist, hat mit $\Theta = 0$ zusammen auch nicht einmal ein analytisches Interesse. Man kann daher ohne Weiteres

$$f_3 = \kappa T_{1(y)} + \frac{\rho}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

setzen, wo übrigens der zweite Theil noch übergangen werden kann, da er durch Abziehen der Function T von f zerstört werden kann. Setzt man also

$$(48) \quad f_3 = \kappa T_{1(y)},$$

so giebt die Gleichung (47) noch:

$$(49) \quad \lambda (f_{1x}, y, x) + \kappa (T_{1y}, T_{1x}, x) = 0.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22} a_{33} - a_{23}^2 & A_{23} &= a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23} \\ A_{22} &= a_{33} a_{11} - a_{31}^2 & A_{31} &= a_{23} a_{21} - a_{22} a_{31} \\ A_{33} &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2 & A_{12} &= a_{21} a_{32} - a_{31} a_{12} \\ \Delta &= \frac{1}{2} \sum \sum A_{ik} x_i x_k, \end{aligned}$$

so hat man, ähnlich wie oben:

$$(T_{1y}, T_{1x}, x) = - \sum \sum A_{ik} x_i x_k,$$

und (49) verwandelt sich in:

$$\lambda \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i} u_i + \kappa \sum \sum A_{ik} x_i x_k = 0,$$

so dass

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \kappa \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} &= \rho x_1 \\ \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \kappa \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} &= \rho x_2 \\ \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \kappa \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} &= \rho x_3, \end{aligned}$$

daher, mit Uebergehen eines überflüssigen Termes:

$$f_1 = - \frac{\kappa}{\lambda} \Delta.$$

Man kann also den Satz aussprechen:

Wird in den Gleichungen (13), (14) die reducirte Form von T :

$$T = T_1 + \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

wo λ eine Constante, T_1 eine beliebige Function zweiter Ordnung in den x ist, so ist ein Integral der Gleichungen

$$\text{Const.} = -\Delta + \lambda T_{1(y)},$$

wobei 2Δ die Function zweiter Ordnung der x ist, deren Coefficienten die aus den Coefficienten von $2T$ zusammengesetzten Underdeterminanten werden.

Man bestätigt diesen Satz leicht auf folgende Weise. Man kann es durch eine Drehung der im Körper festen Achsen erreichen, dass T_1 nur die Quadrate enthält:

$$2T_1 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2.$$

Die Gleichungen (13), (14) werden:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda (x_3 y_2 - x_2 y_3) & \frac{dy_1}{dt} &= (a_2 - a_3) x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda (x_1 y_3 - y_1 x_3) & \frac{dy_2}{dt} &= (a_3 - a_1) x_3 x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \lambda (x_2 y_1 - y_2 x_1) & \frac{dy_3}{dt} &= (a_1 - a_2) x_1 x_2. \end{aligned}$$

Daher hat man in der That:

$$(a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2) - (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2) = \text{Const.},$$

was das im Satze gegebene Integral ist.

§ 10.

Behandlung des Falles II.

Im Falle II. werden die ersten beiden Gleichungen (35):

$$(50) \quad \begin{cases} (f_{1x}, \Theta_x, x) - \frac{x}{\lambda} (\Omega_x, T_{1x}, x) = 0 \\ \frac{x}{\lambda} \{ (A_y, \Theta_x, x) + (\Omega_x, \Theta_y, x) + (\Omega_x, \Theta_x, y) \\ \quad + \lambda (f_{1x}, y, x) + x (\Theta_y, T_{1x}, x) \} = 0. \end{cases}$$

Man kann in diesem Falle immer x als von Null verschieden annehmen. Denn setzt man $x = 0$, so ist $f_3 = 0$, $f_2 = 0$, und aus (50) würde auch $f_1 = 0$ folgen.

Setzt man in der zweiten Gleichung (50) die y gleich den x , so hat man

$$\frac{3}{\lambda} (\Omega_x, \Theta_x, x) + (\Theta_x, T_{1x}, x) = 0,$$

daher

$$(51) \quad T_{1(x)} = \frac{3}{\lambda} \Omega_{(x)} + \Theta_{(x)} + \frac{e}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Die erste Gleichung (50) giebt nun

$$(f_1 x, \Theta_x, x) - \frac{x}{\lambda} (\Omega_x, \Theta_x, x) = 0,$$

also

$$f_1 = \frac{x}{\lambda} \Omega + \mu \Theta + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x^2),$$

wobei indessen der letzte Term übergangen werden darf, so dass

$$(52) \quad f_1 = \frac{x}{\lambda} \Omega + \mu \Theta.$$

Setzt man nun die Ausdrücke (51), (52) in die zweite Gleichung (50) ein, so ergiebt sich:

$$(53) \quad \frac{x}{2} \{ (\Omega_y, \Theta_x, x) - 2(\Omega_x, \Theta_y, x) + (\Omega_x, \Theta_x, y) \} = \lambda \mu (\Theta_x, y, x) + x (\Omega_x, y, x)$$

Der linken Seite dieser Gleichung muss nun eine solche Form gegeben werden, dass sie nach den u geordnet ist. Man erhält:

$$(54) \quad \begin{aligned} (\Omega_x, \Theta_x, y) - (\Omega_x, \Theta_y, x) &= \sum \sum b_{ik} u_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - (b_{11} + b_{22} + b_{33}) (u_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}) \\ (\Theta_x, \Omega_x, y) - (\Theta_x, \Omega_y, x) &= \sum \sum B_{ik} u_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - (B_{11} + B_{22} + B_{33}) (u_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_3}) \end{aligned}$$

in der ersten dieser Gleichungen ist rechts das letzte Glied Null, weil $b_{11} + b_{22} + b_{33}$ verschwindet. Sodann ist

$$\sum \sum b_{ik} u_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} = \sum_{i, k} b_{ik} u_i B_{kx} x_h$$

$$\sum \sum B_{ik} u_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} = \sum_{i, k} B_{ik} u_i b_{kx} x_h.$$

Es ist aber nach der Definition der B_{ix}

$$\sum_x b_{ix} B_{hx} = 0 \quad (i \geq h)$$

$$\sum_x b_{ix} B_{ix} = B,$$

wo B die Determinante der b_{ix} bedeutet. Daher ist

$$\sum \sum b_{ix} u_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_x} = \sum \sum B_{ix} u_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_x} = B \sum u_i x_i = 0.$$

Von den beiden Ausdrücken (54) verschwindet also der erste, der zweite reducirt sich auf seinen zweiten Theil. Die Gleichung (53) aber verwandelt sich nun in:

$$\sum B_{ii} \cdot \sum u_x \frac{\partial \Theta}{\partial x_x} = \frac{\mu \lambda^2}{x} \sum u_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \lambda \sum u_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}.$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, setzt man die Coefficienten der u den x proportional, und hat also die Beziehungen:

$$\left(B_{11} + B_{22} + B_{33} - \frac{\mu \lambda^2}{x} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial x_x} - \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x_x} = \tau x_x,$$

oder

$$(55) \quad (B_{11} + B_{22} + B_{33} - \frac{\mu \lambda^2}{\alpha}) \Theta - \lambda \Omega = \frac{\pi}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Stellen wir alles zusammen, so haben wir

$$(56) \quad \begin{cases} T = \frac{3}{\lambda} \Omega(x) + \varrho \Theta(x) + \frac{\sigma}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sum y_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ f = \frac{\pi}{\lambda} \Omega(x) + \mu \Theta(x) - \frac{\pi}{\lambda} \sum y_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + \alpha \Theta(y); \end{cases}$$

wo also alles auf eine Function Θ zurückgeführt ist, durch welche auch Ω sich ausdrückt; die Gleichung (55) aber ist eine Bedingung für diese Function selbst.

Denken wir uns, um diese Bedingung zu untersuchen, eine orthogonale Substitution sowohl auf die y als auf die x angewendet, welche Θ in eine Summe von Quadraten verwandelt; was einer Drehung der im Körper festen Achsen entspricht. Es ist dann

$$\Theta = \frac{1}{2} (b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2) \quad (b_1 + b_2 + b_3) = 0.$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (b_2 b_3 x_1^2 + b_3 b_1 x_2^2 + b_1 b_2 x_3^2).$$

Die Gleichung (55) gibt, wenn der Kürze wegen

$$b_2 b_3 + b_3 b_1 + b_1 b_2 - \frac{\mu \lambda^2}{\alpha^2} = m$$

gesetzt wird:

$$m b_1 - \lambda b_2 b_3 = \tau$$

$$m b_2 - \lambda b_3 b_1 = \tau$$

$$m b_3 - \lambda b_1 b_2 = \tau,$$

und wenn man mit $(b_2 - b_3)$, $(b_3 - b_1)$, $(b_1 - b_2)$ multiplicirt und addirt:

$$(b_2 - b_3) (b_3 - b_1) (b_1 - b_2) = 0.$$

Zwei der b müssen also gleich sein, und die Form von T wird diejenige, welche in § 6. bereits behandelt wurde. Dieser Fall gibt also nichts neues.

§ 11.

Behandlung des Falles III.

Die Gleichungen (35) sind, nachdem bewiesen ist, dass $f_4 = 0$, für f und T vollkommen symmetrisch, und da man auch beiden Functionen, ohne die Allgemeinheit zu vermindern, die reducirte Form geben kann, so sieht man, dass alle Fälle, in denen $f_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ unmittelbar durch Vertauschung von f und T aus dem Falle erhalten werden, in welchem T_3 diese Form hat, wobei nur zu bemerken ist, dass f noch immer um T , multiplicirt mit einer Constanten, vermehrt werden kann. Der Fall III. ergibt sich daher ohne Weiteres aus I. und II. Nun haben im Falle II. f und T genau dieselbe Form, und

man kann daher durch Vertauschung beider Functionen nichts neues erhalten. Dagegen war im Falle I.

$$T = T_1(x) + \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

$$f = -\Delta + \lambda T_1(y),$$

oder wenn wir die letzte Function auf die reducirte Form bringen, und T multiplicirt mit einer Constanten hinzufügen:

$$f = \frac{1}{6} (A_{11} + A_{22} + A_{33}) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \Delta + \nu T_1(x) + \lambda T_1(y) + \frac{\nu \lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

Wir erhalten daher umgekehrt, wenn T die reducirte Form:

$$T = \frac{1}{6} (C_{11} + C_{22} + C_{33}) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \Delta + \nu T_1(x) + \lambda T_1(y) + \frac{\nu \lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

hat:

$$f = T_1(x) + \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Hiebei ist T_1 ganz beliebig. Wir können uns das Coordinatensystem so gedreht denken, dass T_1 nur die Quadrate der y enthält; dann enthält auch der erste Theil von T (T_1) nur die Quadrate der x ; und zwar wird

$$T = \frac{1}{6} (c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{1}{2} (c_2 c_3 x_1^2 + c_3 c_1 x_2^2 + c_1 c_2 x_3^2) + \frac{\nu}{2} (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2) + \frac{\lambda}{2} (c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_3^2) + \frac{\nu \lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Die allgemeine Function T , welche nur die Quadrate enthält, hängt von 6 Constanten ab, die vorliegende von 5. Setzen wir

$$(57) \quad 2T = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2,$$

so wird

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1}{3} - c_2 c_3 + \nu c_1 & b_1 &= \lambda (c_1 + \nu) \\ a_2 &= \frac{c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1}{3} - c_3 c_1 + \nu c_2 & b_2 &= \lambda (c_2 + \nu) \\ a_3 &= \frac{c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1}{3} - c_1 c_2 + \nu c_3 & b_3 &= \lambda (c_3 + \nu), \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} a_2 - a_3 &= \frac{c_2 - c_3}{2} (c_1 + \nu) \\ a_3 - a_1 &= \frac{c_3 - c_1}{2} (c_2 + \nu) \\ a_1 - a_2 &= \frac{c_1 - c_2}{2} (c_3 + \nu), \end{aligned}$$

und

$$(58) \quad \frac{a_2 - a_3}{b_1} + \frac{a_3 - a_1}{b_2} + \frac{a_1 - a_2}{b_3} = 0.$$

Dies ist in der That die einzige zwischen den a , b zu erfüllende Gleichung. Man erfüllt sie einfacher dadurch, dass man

$$(59) \quad \begin{cases} a_1 = \varrho + \sigma b_2 b_3 \\ a_2 = \varrho + \sigma b_3 b_1 \\ a_3 = \varrho + \sigma b_1 b_2, \end{cases}$$

also

$2T = \varrho(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sigma(b_2 b_3 x_1^2 + b_3 b_1 x_2^2 + b_1 b_2 x_3^2) + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2$
setzt. Die Differentialgleichungen werden dann:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= b_2 y_2 x_3 - b_3 y_3 x_2 & \frac{dy_1}{dt} &= \sigma b_1 (b_3 - b_2) x_2 x_3 + (b_2 - b_3) y_2 y_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= b_3 y_3 x_1 - b_1 y_1 x_3 & \frac{dy_2}{dt} &= \sigma b_2 (b_1 - b_3) x_3 x_1 + (b_3 - b_1) y_3 y_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= b_1 y_1 x_2 - b_2 y_2 x_1 & \frac{dy_3}{dt} &= \sigma b_3 (b_2 - b_1) x_1 x_2 + (b_1 - b_2) y_1 y_2. \end{aligned}$$

Dieselben haben das Integral:

$$2f = \text{Const.} = \sigma(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

was augenblicklich verificirt werden kann. Und somit hat man den Satz:

Wenn $2T$ die Form hat

$$2T = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2,$$

und es besteht zwischen den a , b die einzige Gleichung

$$\frac{a_2 - a_3}{b_1} + \frac{a_3 - a_1}{b_2} + \frac{a_1 - a_2}{b_3} = 0,$$

so dass

$$u_1 = \varrho + \sigma b_2 b_3$$

$$a_2 = \varrho + \sigma b_3 b_1$$

$$a_3 = \varrho + \sigma b_1 b_2$$

gesetzt werden kann, so haben die Gleichungen (13) (14) das Integral

$$\sigma(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \text{Const.}$$

Die Bedingungsgleichung (58), welche auch die Form annimmt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & b_2 b_3 \\ a_2 & 1 & b_3 b_1 \\ a_3 & 1 & b_1 b_2 \end{vmatrix} = 0$$

löst noch eine zweite Lösung zu, nämlich $b_1 = b_2 = b_3$. Aber dies führt nur zu dem Fall I. zurück.

§ 12.

Schluss.

Es haben sich im Ganzen drei neue Fälle ergeben, in welchen es möglich ist die betrachteten Gleichungen auf Quadraten zurückzuführen. Von diesen ist der in § 6. behandelte eine directe Erweiterung des von Herrn Kirchhoff behandelten Falles, indem die Function T ,

welche wir gefunden haben, den allgemeinsten Fall umfasst, in welchem sie, so zu sagen, den Character einer Rotationsfläche besitzt. Auch lässt sich dieser so erweiterte Fall sofort wie der Kirchhoff'sche weiter behandeln, und führt in ganz gleicher Weise auf elliptische Functionen.

Im Falle I. geben die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \lambda (x_3 y_2 - y_3 x_2) & \frac{dy_1}{dt} &= (a_2 - a_3) x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda (x_1 y_3 - y_1 x_3) & \frac{dy_2}{dt} &= (a_3 - a_1) x_3 x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \lambda (x_2 y_1 - y_2 x_1) & \frac{dy_3}{dt} &= (a_1 - a_2) x_1 x_2\end{aligned}$$

die Integrale:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= c \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + \lambda (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = c' \\ a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 - (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2) &= c'' \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \gamma;\end{aligned}$$

setzt man

$$u = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad v = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2,$$

und drückt alles durch u und v aus, so ist nach der Theorie des Multiplicators

$$\text{Const.} = \int \frac{dv}{\begin{vmatrix} y_1 & a_1 x_1 & x_1 \\ y_2 & a_2 x_2 & x_2 \\ y_3 & a_3 x_3 & x_3 \end{vmatrix} - du \begin{vmatrix} a_1 y_1 & a_1 x_1 & x_1 \\ a_2 y_2 & a_2 x_2 & x_2 \\ a_3 y_3 & a_3 x_3 & x_3 \end{vmatrix}} \frac{1}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & a_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & a_3 y_3 \end{vmatrix}}.$$

das fünfte Integral; das sechste liefert die Zeit aus irgend einer der Differentialgleichungen selbst. Die Umformung des fünften Integrals scheint mit grossen Schwierigkeiten verknüpft zu sein.

Ähnlich ist es im Falle III. Die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= b_2 y_2 x_3 - b_3 y_3 x_2 & \frac{dy_1}{dt} &= \sigma b_1 (b_3 - b_2) x_2 x_3 + (b_2 - b_3) y_2 y_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= b_3 y_3 x_1 - b_1 y_1 x_3 & \frac{dy_2}{dt} &= \sigma b_2 (b_1 - b_3) x_3 x_1 + (b_3 - b_1) y_3 y_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= b_1 y_1 x_2 - b_2 y_2 x_1 & \frac{dy_3}{dt} &= \sigma b_3 (b_2 - b_1) x_1 x_2 + (b_1 - b_2) y_1 y_2\end{aligned}$$

geben die vier Integrale:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= c, \quad \sigma (b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = c' \\ \sigma (b_2 b_3 x_1^2 + b_3 b_1 x_2^2 + b_1 b_2 x_3^2) + (b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2) &= c'', \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \gamma.\end{aligned}$$

Setzt man wieder

$$u = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad v = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2,$$

so ist das fünfte Integral:

$$\text{Const.} = \int dv \left| \begin{array}{ccc} b_1 y_1 & x_1 & b_1 x_1 \\ b_2 y_2 & x_2 & b_2 x_2 \\ b_3 y_3 & x_3 & b_3 x_3 \end{array} \right| - du \left| \begin{array}{ccc} b_1^2 y_1 & x_1 & b_1 x_1 \\ b_2^2 y_2 & x_2 & b_2 x_2 \\ b_3^2 y_3 & x_3 & b_3 x_3 \end{array} \right| ,$$

$$\left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & b_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & b_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & b_3 y_3 \end{array} \right|$$

während die Zeit schliesslich aus einer der Differentialgleichungen gefunden wird.

Göttingen, 31. Mai 1870.