14. Theorie und Anwendung eines Instrumentes zur Messung des Astigmatismus (Astigmometer); von R. Straubel.

Bei einer Untersuchung des Verhältnisses der Quercontraction zur Längsdilatation (des sog. Poisson'schen Coefficienten) drängte sich die Frage auf, welche Hilfsmittel besitzen wir zur experimentellen Bestimmung der Gestalt von Flächen? Es erscheint zunächst klar und ist ja thatsächlich theilweise richtig, dass die Hilfsmittel der physikalischen Beschaffenheit der betreffenden Fläche entsprechend sehr verschieden sein müssen; was z. B. für die Grenzfläche eines festen Körpers zweckmässig ist, erscheint für ein Gebilde wie eine Wellenfläche schwer verwerthbar. Aber nichtsdestoweniger kann es bisweilen einfach und zweckmässig sein, eine Art von Flächen geradezu durch eine andere zu untersuchen.

Im Folgenden soll 1. eine einfache Methode zur Erzeugung, Veränderung und Untersuchung von Lichtwellenflächen gegeben und 2. gezeigt werden, dass wir unter Umständen in diesen Wellenflächen bequeme und empfindliche Hilfsmittel zur Untersuchung der Grenzflächen von Körpern haben.

In Bezug auf den ersten Theil sei bemerkt, dass es sich natürlich nicht um beliebig gestaltete und beliebig grosse Lichtwellenflächen handeln kann, sondern um so zu sagen unendlich kleine, durch Angabe der beiden Hauptkrümmungsradien charakterisirte Flächenstücke. Die Normalenschaar eines solchen Flächenelementes bildet ein unendlich dünnes astigmatisches Strahlenbüschel und wir können deshalb auch sagen, dass wir uns zunächst mit einer Methode zur Erzeugung, Veränderung und Untersuchung von solchen Strahlenbüscheln beschäftigen wollen.

In Bezug auf den zweiten Theil, nämlich die Anwendung solcher Strahlenbüschel zur Untersuchung der Gestalt von Körperflächen ist dann klar, dass nur ein successives Unter-

suchen der einzelnen Flächenelemente, d. h. die Bestimmung der beiden Hauptkrümmungsradien in den einzelnen Flächenelementen erfolgen wird.

Von dem Process der Erzeugung eines so dünnen astigmatischen Strahlenbüschels interessirt uns offenbar hauptsächlich ein Theil, nämlich die Erzeugung der astigmatischen Differenz, d. h. der Differenz der reciproken Werthe der beiden Hauptkrümmungsradien. Ist dies geleistet, so haben wir bekanntermaassen in dem axialen Durchgang der Wellenfläche durch sphärische Linsen ein genügendes Mittel, um — und zwar ohne Aenderung der astigmatischen Differenz — diese Wellenfläche soweit axial symmetrisch durchzubiegen, bis die beabsichtigte mittlere Krümmung erreicht ist, d. h. die Summe der reciproken Hauptkrümmungsradien den gewünschten Werth hat. Damit soll indess keineswegs gesagt sein, dass diese beiden Processe nothwendig oder auch nur zweckmässig geschieden werden müssen, sondern nur, dass bei erzielter astigmatischer Differenz die Erreichung einer vorgeschriebenen mittleren Krümmung leicht durch bekannte Mittel möglich ist.

Das Principielle der hier zu beschreibenden Methode zur Erzeugung einer beliebigen (stetig veränderlichen) astigmatischen Differenz besteht darin, dass *zwei astigmatisch wirkende optische Bestandtheile, und zwar speciell zwei Cylinderlinsen*, in der Weise *drehbar gegeneinander angeordnet sind*, dass der Astigmatismus der Combination verändert wird. Allerdings ist es ja bekanntermaassen bereits mit einem einzigen optischen Bestandtheil, z. B. einer um einen Durchmesser drehbaren sphärischen Linse möglich, continuirlich variablen Astigmatismus zu erzielen¹⁾; aber die Benutzung der hier speciell vorgeschlagenen Combination, nämlich zweier und zwar in ihrer Ebene gegeneinander verdrehbarer Cylinderlinsen, hat unter anderem den Vorzug, leicht berechenbar zu sein, also eine empirische Aichung nicht zu gebrauchen und weiter eine günstigere Abhängigkeit der astigmatischen Differenz von der Grösse der Drehung zu besitzen. Mit der hier gewählten Anordnung ist natürlich auch

1) Es ist dies sogar möglich, ohne dass diese Linse irgend welche sammelnde oder zerstreuende, d. h. die mittlere Krümmung einer durchtretenden Wellenfläche verändernde Wirkung ausübt; weiter kann eine solche Linse sogar sphärisch und chromatisch corrigirt sein.

der weitere, mehr technische Vorthail verknüpft, dass nur ein Minimum an Raum, Material und Arbeit benöthigt wird.

Dass eine solche Combination eine variable astigmatische Differenz liefert, ist leicht an Specialfällen einzusehen. So sind offenbar zwei gegeneinander verdrehbare Linsen gleicher Brennweite einer Cylinderlinse variabler Stärke äquivalent, deren Axe den Winkel der Axen der Bestandtheile halbt. Nehmen wir weiter zwei Cylinderlinsen von entgegengesetzt gleicher Brennweite, so wirkt die Combination bei paralleler Lage der Axen wie eine Planplatte, bei gekreuzter in der einen Richtung als Sammellinse, in der dazu senkrechten als Zerstreuungslinse; die mittlere Krümmung einer hindurchtretenden Wellenfläche wird nicht geändert und die astigmatische Differenz ist doppelt so gross wie bei einer einzigen Linse gleicher Brennweite. Diese beiden angeführten Fälle bieten besonders einfache Verhältnisse und zwar deshalb, weil, um feststehende astigmatische Focalebenen zu erzielen, die Drehungen der Bestandtheile in sehr einfacher Beziehung zu stehen haben, nämlich — wie für den ersten Fall klar — entgegengesetzt gleich sein müssen. Im zweiten Falle, nämlich bei entgegengesetzt gleicher Brennweite, liegen die astigmatischen Focalebenen um 45° zu den Winkelhalbirenden der Cylinderaxen geneigt.

Um die quantitativen Verhältnisse zu übersehen, wenden wir uns zur analytischen Behandlung und zwar wollen wir die Aufgabe so formuliren:

Es sei gegeben ein unendlich kleines Stück einer Wellenfläche, unmittelbar dahinter zwei der Wellenfläche parallele, unendlich dünne Cylinderlinsen, deren Axen von dem Axenstrahl des unendlich dünnen Axenbüschels geschnitten werden, es wird die Lage und Gestalt der Wellenfläche nach dem Durchtritt gesucht.

Die Axe des Strahlenbüschels sei z -Axe, die beiden Hauptkrümmungsebenen im Durchschnittspunkte des Axenstrahles mit der Wellenfläche xz - und yz -Ebene; das Coordinatensystem sei ein Rechtssystem. Die Wellenfläche habe vor dem Eintritt die Coordinaten x, y, z , nach dem Durchtritt x'', y'', z'' , den Begrenzungsflächen der beiden Cylinderlinsen mögen die Coordinaten x', y', z' und X', Y', Z' (erste Cylinderlinse) bez. x'', y'', z'' und X'', Y'', Z'' (zweite Cylinderlinse) entsprechen. Ferner

mögen die z -Coordinationen der Schnittpunkte der Flächen mit der z -Axe durch den Index 0 unterschieden sein. Sämmtliche Coordinationen sollen in der Beziehung zu einander stehen, dass sie einem beliebigen, aber *ein und demselben* Strahle des Büschels entsprechen. Bezüglich der Krümmungsradien der Wellen- und Cylinderflächen sei festgesetzt, dass jede Strecke von einem Krümmungsmittelpunkte nach den hier betheiligten Flächenpunkten positiv betrachtet wird, falls sie mit der positiven z -Axe des Systems gleichgerichtet ist. Wir bezeichnen ferner mit ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der ursprünglichen, mit ϱ_1'' und ϱ_2'' die der hindurchgetretenen Wellenfläche, mit ϱ' und r' die Krümmungsradien der ersten, mit ϱ'' und r'' die der zweiten Cylinderlinse, sowie mit f' und f'' die Brennweiten derselben. Schliesslich mögen die Erzeugenden der beiden Cylinderlinsen mit der x -Axe die Winkel δ' und δ'' einschliessen, wobei der positive Drehungssinn einer Drehung von der positiven x - zur positiven y -Axe entsprechen soll.

Zur Lösung unserer Aufgabe sind bekanntlich verschiedene Wege möglich; man kann einerseits einen beliebigen Strahl des unendlich dünnen Büschels unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes durch die vier brechenden Flächen hindurchverfolgen und erhält dann in der Orthogonalfläche des austretenden Büschels die gesuchte Wellenfläche; man kann andererseits aber auch direct die Veränderungen der Wellenfläche bei dem Durchgang durch die Cylinderlinsen bestimmen und dies führt hier am raschesten zum Ziele.

Bekanntlich liegen auf dem (beliebig gestalteten) Wege eines Strahles zwischen zwei Orthogonal-, d. h. Wellenflächen, die gleiche Anzahl von Wellenlängen oder, anders ausgedrückt, zwischen zwei beliebigen Wellenflächen hat die optische Länge der Lichtwege, d. h. die Summe der Producte aus Brechungsexponent und geometrischer Länge, einen constanten Werth. Dies scheint zunächst wenig zu nützen, da wir ja den geometrischen Lichtweg mittels des Brechungsgesetzes oder irgend eines äquivalenten (z. B. Minimum-) Satzes erst bestimmen müssen. In der That würde dies auch im allgemeinen nothwendig sein. Wenn wir uns aber auf ein unendlich dünnes Strahlenbüschel beschränken und weiter die brechenden Flächen senkrecht zu diesem stehen, so vernachlässigen wir offenbar

nur unendlich kleine Grössen 2. Ordnung, falls wir an Stelle des wirklichen Strahlenverlaufes einen der z -Axe parallelen setzen; die Durchmesser des Wellenflächenelementes, sowie die Neigungen der Strahlen zur z -Axe sind dabei als unendlich kleine Grössen 1. Ordnung angenommen worden.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir die Gleichheit der optischen Länge zweier Lichtwege analytisch formuliren. Als einen derselben werden wir natürlich zweckmässiger Weise den auf der z -Axe ungebrochen verlaufenden Axenstrahl nehmen. Die Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} & z' - z + n'(Z' - z') + z'' - Z' + n''(Z'' - z'') + z''' - Z'' \\ &= z'_0 - z_0 + n'(Z'_0 - z'_0) + z'_0 - Z'_0 + n''(Z''_0 - z''_0) + z''_0 - Z''_0 \end{aligned}$$

oder anders ausgedrückt:

$$(1) \quad \begin{cases} -(z - z_0) - (n' - 1)(z' - z'_0) - (n'' - 1)(z'' - z''_0) \\ \quad + (n' - 1)(Z' - Z'_0) + (n'' - 1)(Z'' - Z''_0) \\ \quad + z''' - z'''_0 = 0. \end{cases}$$

Nun gehören nach den von uns gemachten Voraussetzungen, dass die Abstände der betrachteten Wellen- und Linsenflächen, sowie die Neigung der Strahlen gegeneinander unendlich klein sind, zu jedem Strahle x - und y -Coordinationen, deren relative Veränderungen auf dem Strahle zwischen den beiden Wellenflächen nur unendlich klein 1. Ordnung sind, sodass es erlaubt ist, x und y für jeden Strahl constant zu setzen. Demnach lauten die Gleichungen für die Schmiegungsflächen der eintretenden Wellenfläche, sowie der begrenzenden Cylinderflächen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2(z - z_0) = \frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2} \text{ (eintretende Wellenfläche)} \\ -2(z' - z'_0) = \frac{(y \cos \delta' - x \sin \delta')^2}{\varrho'} \\ -2(Z' - Z'_0) = \frac{(y \cos \delta' - x \sin \delta')^2}{r'} \end{array} \right\} \text{ (1. Cylinderlinse)} \\ \left\{ \begin{array}{l} -2(z'' - z''_0) = \frac{(y \cos \delta'' - x \sin \delta'')^2}{\varrho''} \\ -2(Z'' - Z''_0) = \frac{(y \cos \delta'' - x \sin \delta'')^2}{r''} \end{array} \right\} \text{ (2. Cylinderlinse).}$$

Setzt man die Ausdrücke für die z -Coordinationen in die Gleichung (1) ein und ordnet nach Potenzen von x und y , so erhält man:

$$\begin{aligned} & x^2 \left\{ \frac{1}{\varrho_1} + \sin^2 \delta' (n' - 1) \left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{r'} \right) + \sin^2 \delta'' (n'' - 1) \left(\frac{1}{\varrho''} - \frac{1}{r''} \right) \right\} \\ & + x y \left\{ \sin 2 \delta' (n' - 1) \left(-\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{r'} \right) + \sin 2 \delta'' (n'' - 1) \left(-\frac{1}{\varrho''} + \frac{1}{r''} \right) \right\} \\ & + y^2 \left\{ \frac{1}{\varrho_2} + \cos^2 \delta' (n' - 1) \left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{r'} \right) + \cos^2 \delta'' (n'' - 1) \left(\frac{1}{\varrho''} - \frac{1}{r''} \right) \right\} \\ & + 2(z''' - z''_0) = 0 \end{aligned}$$

und mit Einführung der Brennweiten für die beiden Cylinderlinsen

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'} &= (n' - 1) \left(-\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{r'} \right), \quad \frac{1}{f''} = (n'' - 1) \left(-\frac{1}{\varrho''} + \frac{1}{r''} \right): \\ (3) \quad & \left\{ \begin{aligned} & x^2 \left\{ \frac{1}{\varrho_1} - \frac{\sin^2 \delta'}{f'} - \frac{\sin^2 \delta''}{f''} \right\} \\ & + x y \left\{ \frac{\sin 2 \delta'}{f'} - \frac{\sin 2 \delta''}{f''} \right\} \\ & + y^2 \left\{ \frac{1}{\varrho_2} - \frac{\cos^2 \delta'}{f'} - \frac{\cos^2 \delta''}{f''} \right\} + 2(z''' - z''_0) = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung der Wellenfläche nach dem Durchtritt durch die Cylinderlinsen, und es erübrigt jetzt noch, Gestalt und Lage derselben zu untersuchen.

Bezeichnet man abkürzungshalber die Coefficienten von x^2 , xy , y^2 mit $1/\varrho_{11}$, $1/\varrho_{12}$, $1/\varrho_{22}$, so ergeben sich die Hauptkrümmungsradien ϱ'''_1 , ϱ'''_2 im Punkte $x = 0$, $y = 0$ nach einfachen rechnerischen Operationen aus den Gleichungen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\varrho'''_1} + \frac{1}{\varrho'''_2} &= \frac{1}{\varrho_{11}} + \frac{1}{\varrho_{22}}, \\ \frac{1}{\varrho'''_1} - \frac{1}{\varrho'''_2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{\varrho_{11}} - \frac{1}{\varrho_{22}} \right)^2 + \frac{1}{\varrho_{12}^2}}. \end{aligned} \right.$$

Gleichzeitig folgt der Winkel zwischen der zu ϱ'''_1 gehörigen Hauptkrümmungsebene und der xz -Ebene (ε) aus der Beziehung:

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2 \varepsilon = \frac{\frac{1}{\varrho_{12}}}{\frac{1}{\varrho_{11}} - \frac{1}{\varrho_{22}}}.$$

Die erste der Gleichungen bestimmt die mittlere Krümmung, die zweite die astigmatische Differenz und die dritte die Lage der Wellenfläche.

Wir wollen aus diesen Beziehungen zwei Fragen beantworten. 1. Unter welchen Umständen sind die Hauptkrümmungsebenen der Wellenflächen vor und nach dem Durchtritt durch die Cylinderlinsen einander parallel und 2. welche Bedingungen sind zu erfüllen, um die austretende Wellenfläche axial symmetrisch zu erhalten? Was die erste Frage anbelangt, so muss, da die Hauptkrümmungsebenen der eintretenden Wellenfläche der xz - und yz -Ebene parallel liegen, $\varepsilon = 0$ bez. $= 90^\circ$ sein und es ist demnach die Bedingung $1/\varrho_{12} = 0$ oder

$$(6) \quad \frac{\sin 2 \delta'}{f'} + \frac{\sin 2 \delta''}{f''} = 0$$

nothwendig. Diese besagt, dass unabhängig von der mittleren Krümmung und der astigmatischen Differenz der eintretenden Wellenfläche die Stellung der einen Cylinderlinse durch die der anderen in einem nur von dem *Verhältniss* der Brennweiten abhängigen Maasse bestimmt ist.

Soll zweitens die austretende Wellenfläche axial symmetrisch sein, und die entsprechende Normalenschaar demnach ein homocentrisches Büschel bilden, so muss $\varrho_1''' = \varrho_2'''$ sein. Dies erfordert nach der zweiten der Gleichungen (4) zwei Bedingungen, nämlich

$$\frac{1}{\varrho_{11}} = \frac{1}{\varrho_{22}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho_{12}} = 0.$$

Die zweite ist mit der soeben besprochenen identisch, die erste liefert die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{\sin^2 \delta'}{f'} - \frac{\sin^2 \delta''}{f''} = \frac{1}{\varrho_2} - \frac{\cos^2 \delta'}{f'} - \frac{\cos^2 \delta''}{f''}$$

oder

$$(7) \quad \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} + \frac{\cos 2 \delta'}{f'} + \frac{\cos 2 \delta''}{f''} = 0.$$

Für den Krümmungsradius ϱ''' ergibt sich aus der ersten Gleichung (4):

$$(8) \quad \varrho_1''' = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{f'} - \frac{1}{f''}.$$

Die Gleichungen (6) und (7) enthalten die Lösung der zweiten Frage, da sie bei gegebener Wellenfläche aus den

Brennweiten der Cylinderlinsen die Stellungen bestimmen, die nöthig sind, um das astigmatische Büschel in ein homocentrisches zu verwandeln. Es empfiehlt sich, für δ' und δ'' unmittelbar berechenbare Ausdrücke abzuleiten. Aus den Gleichungen (6) und (7) erhalten wir:

$$(9) \quad \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right)^2 = \frac{1}{(f')^2} + \frac{1}{(f'')^2} + \frac{2}{f' f''} \cos 2(\delta'' - \delta'),$$

wodurch die *gegenseitige* Stellung der Cylinderlinsen bestimmt ist. Die Gleichung (6), nämlich

$$\frac{\sin 2\delta'}{f'} + \frac{\sin 2\delta''}{f''} = 0,$$

können wir andererseits leicht in:

$$(10) \quad \frac{\operatorname{tg}(\delta'' - \delta')}{\operatorname{tg}(\delta'' + \delta')} = \frac{\frac{1}{f'} + \frac{1}{f''}}{\frac{1}{f'} - \frac{1}{f''}}$$

transformiren und hiermit ist in Verbindung mit (9) die *mittlere* Stellung der Cylinderlinsen zur eintretenden Wellenfläche bestimmt. Etwas bequemer ist es vielleicht noch, an Stelle von (9) den daraus folgenden Ausdruck

$$(11) \quad \operatorname{tg}(\delta'' - \delta') = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{f''}\right)^2 - \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)^2}{-\left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{f''}\right)^2 + \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)^2}}$$

zu benutzen.

In Bezug auf die zur Compensation nöthige „Stärke“ der Cylinderlinsen dürfte klar sein, dass der *absolute* Werth der astigmatischen Differenz der ursprünglichen Wellenfläche zwischen den absoluten Werthen der „astigmatischen Stärken“ für parallele und gekreuzte Lage

$$\left[\frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} \right] \text{ bez. } \left[\frac{1}{f'} - \frac{1}{f''} \right]$$

liegen muss. Das Vorzeichen der Brennweiten spielt gar keine Rolle; ich kann mit zwei Zerstreuungslinsen ein astigmatisches Büschel genau so homocentrisch machen, wie mit zwei Sammellinsen, oder wie mit einer Sammel- und einer Zerstreuungslinse, falls nur die entsprechenden Brennweiten in den verschiedenen Combinationen absolut genommen gleich sind; die Stellungen werden natürlich verschieden sein.

Für die Praxis ist die Frage nicht unwichtig, ob die Compensationsstellung der Cylinderlinsen eindeutig bestimmt ist oder nicht. Aus Symmetriegründen ist bereits klar, dass ausser der Stellung δ' , δ'' stets noch $-\delta'$, $-\delta''$ möglich ist, und es ist andererseits leicht einzusehen, dass es auch nicht mehr als zwei (wesentlich verschiedene) Stellungen geben kann. Die praktische Bedeutung hiervon liegt darin, dass man ohne Hilfsbeobachtungen die zur Compensation nothwendige *gegenseitige* Stellung der Cylinderlinsen unmittelbar erhält. Die astigmatische Differenz bestimmt sich also, ohne dass man von der Lage der Cylinderaxen etwas zu wissen braucht, nur aus dem *Unterschiede* der beiden gegenseitigen Stellungen, bei denen vollständige Compensation vorhanden ist. Ebenso ergibt sich auch die *relative* Lage der Cylinderlinsenaxen gegenüber den Hauptkrümmungsebenen des astigmatischen Büschels durch den halben *Unterschied* der Lagen in den beiden Compensationsstellungen, während die absolute Lage der Hauptkrümmungsebenen nur bei bekannter Lage der Cylinderlinsenaxen zu finden ist.

Wir haben vorhin erwähnt, dass man das Vorzeichen der Brennweiten der einen oder beider Cylinderlinsen umkehren kann, ohne die Compensationsmöglichkeit dadurch in Frage zu stellen; von Interesse ist nur die Frage, in welcher Beziehung die Lagen der Cylinderlinsen in den verschiedenen Fällen stehen. Das Resultat können wir sehr einfach dahin aussprechen, dass einer Umkehr des Vorzeichens eine um 90° verschiedene Stellung der betreffenden Cylinderlinse entspricht.

Es bliebe jetzt noch übrig, die Stellung der Linsen bei gegebener astigmatischer Differenz und gegebenen Brennweiten genauer zu discutiren. Nach dem früher Gesagten dürfen wir uns dabei 1. auf Linsen von ganz bestimmtem Brennweitenvorzeichen beschränken und 2. einen der Winkel δ in einen beliebigen Quadranten verlegen; weiter können wir noch $1/\varrho_1 - 1/\varrho_2 > 0$ voraussetzen. Nehmen wir f'' und f''' positiv und δ' im ersten Quadranten an, so muss nach (6) δ'' im zweiten Quadranten liegen. Mit Berücksichtigung von Gleichung (7) können wir dies noch weiter dahin specialisiren, dass für $0 < \delta' < 45^\circ$ $90^\circ < \delta'' < 135^\circ$ sein muss, während für $45^\circ < \delta' < 90^\circ$ $90^\circ < \delta'' < 180^\circ$ allgemein bestehen bleibt. Diese

Angaben liessen sich nach (9) noch weiter präcisiren, denn nach dieser Gleichung hängt die gegenseitige Lage der beiden Cylinderlinsen von dem Grössenverhältniss der Ausdrücke

$$\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{(f')^2} + \frac{1}{(f'')^2}$$

ab. Bei der Annahme $f'' f''' > 0$ liegt für

$$\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)^2 > \frac{1}{(f')^2} + \frac{1}{(f'')^2}$$

$\delta'' - \delta'$ zwischen -45° und $+45^\circ$, für

$$\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)^2 < \frac{1}{(f')^2} + \frac{1}{(f'')^2}$$

zwischen $+45^\circ$ und $+135^\circ$; umgekehrt ist es für $f'' f''' < 0$. Von der Benutzung dieser Grenzbestimmungen wollen wir indess absehen und uns jetzt zu Specialisirungen in den Cylinderlinsencombinationen wenden.

Specielle Fälle.

Zu ihrer Begründung aus technischen Gesichtspunkten gehen wir auf die Gleichung (6) zurück, deren Bestehen eine Bedingung für das Auftreten einer axialsymmetrischen Welle oder eines homocentrischen Büschels war. Differenziren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{d\delta' \cos 2\delta'}{f'} + \frac{d\delta'' \cos 2\delta''}{f''} = 0$$

oder mit der ursprünglichen Gleichung combinirt

$$\frac{d\delta'}{\operatorname{tg} 2\delta'} = \frac{d\delta''}{\operatorname{tg} 2\delta''}.$$

Gehe ich also von einer beliebigen Compensationsstellung zu einer benachbarten über, so müssen sich die (unendlich kleinen) Drehungen der Cylinderlinsen wie die Tangenten der doppelten Stellungswinkel verhalten. Das Verhältniss der Drehungen ist also im allgemeinen keineswegs constant, sondern mit der Stellung veränderlich. Mechanismen, um das geforderte Verhältniss der Drehungsgeschwindigkeiten zu realisiren, dürften sich zwar ersinnen lassen, würden aber mechanisch zu Complicationen führen. Zwei Fälle dagegen sind denkbar einfach, nämlich $d\delta' = \pm d\delta''$, also der Fall gleicher und der *entgegengesetzt gleicher Rotationsgeschwindigkeit*, brauchbar ist aber nur

der zweite. $\operatorname{tg} 2 \delta' = -\operatorname{tg} 2 \delta''$ hat zwei Lösungen, nämlich $2(\delta' + \delta'') = 0$ und $2(\delta' + \delta'') = 180$, d. h. die Winkelhalbirenden der beiden Cylinderlinsenaxen müssen entweder in den Hauptkrümmungsebenen der ursprünglichen Wellenfläche liegen oder um 45° zu ihnen geneigt sein.

Im ersten Falle erhalten wir aus den Gleichungen (6)(7)(8):

$$f'' = f''',$$

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{2 \cos 2 \delta'}{f''} = 0,$$

$$\frac{2}{q'''} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} - \frac{2}{f'};$$

die *Brennweiten* sind nach *Grösse* und *Vorzeichen* gleich, die astigmatische Differenz ist dem *Cosinus* des Winkels zwischen den Cylinderaxen proportional. Setzen wir wiederum $1/q_1 - 1/q_2$ positiv voraus, so liegen für positives f'' die beiden möglichen δ' zwischen 45 und 135° , für negatives f'' dagegen zwischen -45° und $+45^\circ$, oder die den spitzen Winkel der Cylinderaxen halbierende Gerade fällt bei Sammellinsen in die yz -, bei Zerstreuungslinsen in die xz -Ebene. — Im zweiten Falle stehen die Winkelhalbirenden um 45° zu den Hauptkrümmungsebenen der einfallenden Welle geneigt. Die obigen Gleichungen ergeben

$$f'' = -f''', \quad \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{2 \cos 2 \delta'}{f''} = 0, \quad \frac{2}{q'''} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2};$$

die Brennweiten müssen demnach *entgegengesetzt* gleich sein, die astigmatische Differenz ist dem *Sinus* des Winkels zwischen den beiden Cylinderlinsen proportional. Nehmen wir $1/q_1 - 1/q_2$ wiederum positiv an, so liegen die dem positiven f' zugehörigen δ' zwischen 45 und 135° , die dem negativen f' zugehörigen zwischen -45 und $+45^\circ$, d. h. die Axe der Zerstreuungslinse bleibt in der Nähe der xz -, die Axe der Sammellinse in der Nähe der yz -Ebene. Wie die dritte Gleichung zeigt, hat eine Combination mit entgegengesetzt gleichen Brennweiten vor der mit gleichen Brennweiten den Vorzug, die mittlere Krümmung einer hindurchtretenden Welle ($1/q_1 + 1/q_2$) nicht zu verändern.

Anwendungen.

Wir wenden uns jetzt zu den Anwendungen der Combination zweier gegeneinander drehbarer Cylinderlinsen, und

können diese vielleicht dreifach classificiren, je nachdem der Endzweck Erzeugung, Compensation oder Messung des Astigmatismus ist.

Erzeugung von Astigmatismus als Endzweck könnte wohl nur für *Demonstrationszwecke* in Betracht kommen; bei der Bedeutung des Astigmatismus für optische Constructionen scheint es mir aber auch wichtig, Bildstörungen durch rein astigmatische Defecte zu demonstrieren; wäre nicht das Verständniss der aus Sammel- und Zerstreuungslinse bestehenden Combination etwas schwieriger, so würde diese besonders empfehlenswerth sein.

Compensation von Astigmatismus als Selbstzweck kann sich auf Mängel im Auge wie in künstlichen optischen Instrumenten beziehen und für Untersuchungen, bei denen es gilt, die Schärfe des Auges möglichst zu steigern nicht unwichtig sein; man kann aber darüber nur nach sorgfältigen experimentellen Untersuchungen ein Urtheil haben. Für astigmatische Defecte im Auge ist natürlich eine Compensation nur soweit möglich, als der Astigmatismus „regulärer Natur“ ist, ferner genügt, wenn der Astigmatismus constant ist, eine passend gewählte einfache Cylinderlinse. Variirt er aber, so dürfte — und zwar natürlich hauptsächlich in Verbindung mit einem optischen Instrument — die Anwendung der an zweiter Stelle beschriebenen Combination von Vortheil sein. Der mit dem Mehr von zwei Flächen verbundene Lichtverlust kommt kaum in Betracht und liesse sich natürlich auch durch Anwendung eines Tropfens Oel leicht beseitigen.

Astigmatische Defecte in optischen Instrumenten sind ein misslicher Fall für die Compensation, denn ausser den hier nicht in Betracht kommenden Resten von regelmässigem Astigmatismus schiefer Büschel könnte es sich nur um Fehler handeln, wie sie z. B. ein Fernrohrobjectiv mit Spannung besitzt. Gerade diese Defecte sind aber meistens unregelmässiger Art und der bei der Kostbarkeit eines Objectives immerhin lohnende Versuch hat wenig Aussicht auf Erfolg.

Die Hauptanwendung scheint mir in der Benutzung zu *Messzwecken* zu bestehen; die überaus bequeme Art, die astigmatische Differenz eines Büschels zu messen, ist sicher für manche Zwecke von Bedeutung. Der Augenarzt braucht ausser

dem die Netzhaut beobachtenden Instrument nur die Cylinderlinsen an einer passenden Stelle in den Strahlengang einzuschalten, um ohne weiteres die astigmatische Differenz in Dioptrien ablesen zu können.¹⁾ Das ist beim Auge um so bequemer, als man ja hier die Lage der astigmatischen Focalebene annähernd kennt und also nur kleinere Drehungen der ganzen Combination zur genaueren Feststellung der Azimuthe zu machen hat, — eine Untersuchung, von der man natürlich auch bei den sonst gebräuchlichen Hilfsmitteln nicht entbunden ist.

Sehr leicht kann man den Astigmatismus der eigenen Augen bestimmen, indem man — am besten mit Zuhülfenahme eines Fernrohres — durch die Cylinderlinsen ein feineres Kreuzgitter betrachtet, dessen Striche nur 45° zum Horizont geneigt stehen. Man findet für die Cylinderlinsen zwei Stellungen maximaler Deutlichkeit, deren Unterschied ein Maass für den Astigmatismus ist. Ob man die Cylinderlinsen vor das Objectiv oder hinter das Ocular bringt, ist nur insofern wesentlich, als bei ersterer Stellung grössere Anforderungen an die Dimensionen und vor allem die *Qualität* der Linsen gestellt werden.

Auch für *rein physikalische* Zwecke wird die Combination mannichfach verwendbar sein. Ich selbst habe sie bei einer Untersuchung über die Gestalt deformirter Flächen gefunden und benutzt. Bekanntlich kann man aus der Deformation, die Flächen eines Prismas von rechteckigem Querschnitt bei der Biegung des Prismas erfahren, das Verhältniss der Quervertraction zur Längsdilatation, den sogenannten Poisson'schen Coefficienten bestimmen. Diese Grösse ist nämlich einfach das Verhältniss der Hauptkrümmungshalbmesser in und senkrecht zur Biegungsebene. Wenn es gelingt, einer Lichtwellenfläche genau die Gestalt der zu untersuchenden „*physischen Grenzfläche*“ zu geben, so sind die beschriebenen Hilfsmittel unmittelbar für die Untersuchung dieser letzteren geeignet. Ob aber exacte Gleichheit der Gestalt erreicht ist,

1) *Nachschrift bei der Correctur*: Ich habe mittlerweile erfahren, dass die Combination von zwei gleichen Cylinderlinsen den Augenärzten bereits bekannt ist.

ist ohne weiteres zu controlliren, wenn man die Lichtwelle normal und im Azimuth richtig orientirt auf die (regelmässig reflectirende) Grenzfläche auffallen lässt. Ist die reflectirte Welle gleichgestaltet und gleich orientirt wie die auffallende, so gilt das Gleiche auch von der auffallenden Welle und der physischen Grenzfläche.

Instrument zur Untersuchung von regelmässig reflectirenden Flächen.

Um dies zu realisiren, befindet sich eine Reihe verschieden feiner, durch ein total reflectirendes Prisma von der Seite her beleuchteter Kreuzgitter in der Nähe der Brennebene einer sphärischen Linse. Die aus der Sammellinse convergent oder divergent austretenden Strahlenbüschel durchsetzen die Cylinderlinsencombination und fallen darauf auf die zu untersuchende Fläche. Man verändert nun solange erstens die Stellung der Kreuzgitter zur sphärischen Linse, zweitens das mittlere Azimuth und die gegenseitige Stellung der Cylinderlinsen, und drittens die Normale des untersuchten Flächenelementes bez. des Instrumentes, bis die reflectirten Bilder genau in der Ebene der Kreuzgitter liegen, deutlich erscheinen und mit den Objecten nahezu zusammenfallen. — Alle früheren Formeln entsprechen offenbar gerade der hier vorliegenden Anordnung; ϱ_1 und ϱ_2 bedeuten die Hauptkrümmungsradien des untersuchten Flächenelementes, ϱ''' den Radius der aus dem „Objectiv“¹⁾ austretenden oder wieder ins „Objectiv“ eintretenden Kugelwellen. Benutzen wir Cylinderlinsen von gleicher Brennweite, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho'''} + \frac{1}{f'} (1 - \cos 2\delta')$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho'''} + \frac{1}{f'} (1 + \cos 2\delta');$$

benutzen wir dagegen Cylinderlinsen von entgegengesetzt gleicher Brennweite, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho'''} - \frac{\cos 2\delta'}{f'}$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho'''} + \frac{\cos 2\delta'}{f'}.$$

1) Dieses kann hier natürlich auch eine Zerstreuungslinse sein.

In diesen Formeln haben wir nur noch $1/\varrho'''$ durch $1/F - 1/\varrho$ zu ersetzen, wo F die Brennweite des Objectives und ϱ den Abstand der Kreuzgitter vom Objectiv bedeutet, um neben Constanten (F, f') nur beobachtete Grössen (δ, ϱ) zu haben. — Dass hier normal auffallende Büschel gewählt wurden, ist natürlich im Interesse der Einfachheit geschehen, hat aber auch Nachtheile, da die Reflexe von den zahlreichen Flächen stören; über die Beseitigung sollen bei anderer Gelegenheit einige Bemerkungen gemacht werden.

Das Vorliegende mag genügen, um die Verwendungsfähigkeit der beschriebenen Combination zu zeigen.

Jena, Physik. Inst. d. Univ., 11. Nov. 1897.

(Eingegangen 17. November 1897.)